

Recueil de thèmes classiques  
Adapté aux programmes PC-PSI

Nicolas Maillard

4 février 2022

---

Références aux sujets : Concours - Année - Filière - Partie du sujet.

Abréviations des banques d'épreuves :

- CCP    Concours commun CCinP
- CS     Concours Centrale-Supélec
- MP     Concours Mines-Ponts
- E3A    Concours E3A

M'envoyer un mail

# Table des matières

1	Autour de l'espérance et de la variance	7
2	CAUCHY-SCHWARZ et coefficient de corrélation linéaire	11
3	MARKOV et BIENAYMÉ-TSCHEBYCHEV	15
4	Lois hypergéométrique et multinomiale	17
5	Formule de l'espérance totale, problème du collectionneur et vagues d'appels	25
6	Problème du scrutin et marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$	31
7	Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ et séries entières	39
8	Lemmes de BOREL-CANTELLI et marches aléatoires	45
9	Intervalles de confiance et grandes déviations de BERNSTEIN	55
10	Incertitude ou entropie de SHANNON d'une variable aléatoire	63
11	Fonction caractéristique d'une Variable Aléatoire Réelle	67
12	Approximations successives : le point fixe et les tangentes de Newton	81
13	Triangle de PASCAL, binôme de NEWTON & formule de LEIBNIZ	91
14	Autour des formules de TAYLOR	95

15 Développements de sommes et de restes	105
16 Sommation par parties et transformation d'Abel	121
17 Convexité et applications très classiques	129
18 Variation des constantes et wronskien	145
19 Irrationalité de constantes célèbres	163
20 La quête de $\pi$ par l'Arc-tangente	169
21 $\pi$ et les produits infinis de VIÈTE et WALLIS	181
22 Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$	187
23 Intégrale de GAUSS et fonction $\Gamma$ d'EULER	193
24 Intégrale de DIRICHLET et sinus cardinal	197
25 Formule de STIRLING sans les intégrales de WALLIS	203
26 Une jolie formule pour une belle synthèse	211
27 Linéarisations et sommes trigonométriques	215
28 Polynômes de TCHEBYCHEV	219
29 Interpolation polynomiale de LAGRANGE	231
30 Phénomène de RUNGE	237
31 Convergence de l'interpolation de LAGRANGE et points de TCHEBYCHEV	245
32 Espaces de HILBERT et familles de polynômes orthogonaux	253
33 Polynômes de LEGENDRE	259
34 Intégration numérique de GAUSS	263
35 Approximation polynomiale en norme $L^2$ de HILBERT	267

---

36	Approximation polynomiale uniforme et polynômes de BERNSTEIN	269
37	Produit de convolution et régularisation	275
38	Transformée de LAPLACE	289
39	Séries de FOURIER	295
40	Transformée de FOURIER	313
41	Séries entières complexes et grands principes	323
42	Droites et sous-espaces stables par un endomorphisme	339
43	Exemples de parties ouvertes, fermées ou denses en algèbre linéaire	343
44	Utilisation des polynômes annulateurs	347
45	Normes matricielles et quotient de RAYLEIGH	355
46	Hyperplans et formes linéaires	371
47	Bases adaptées à l'étude des endomorphismes nilpotents	377
48	Matrices circulantes et racines n-èmes de l'unité	381
49	Matrices compagnons, suites récurrentes, E.D.L. & localisation des racines d'un polynôme	387
50	Matrices stochastiques	395
51	Formes bilinéaires & formes quadratiques	401
52	Matrices symétriques positives et strictement positives	411
53	Commutant et racines carrées d'une matrice carrée	417
54	Matrices symplectiques	421
55	Théorème des moindres carrées et application aux ajustements polynomiaux	429

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>56</b>	<b>Intégration numérique avec Python</b>	<b>437</b>
<b>57</b>	<b>GAUSS-LEGENDRE et GAUSS-TCHEBYCHEV avec Python</b>	<b>447</b>
<b>58</b>	<b>Programmation orientée objet : la classe Polynome</b>	<b>461</b>
<b>59</b>	<b>POO &amp; interpolation polynomiale</b>	<b>467</b>
<b>60</b>	<b>Simulation aléatoire et méthode de Monte-Carlo</b>	<b>479</b>
<b>61</b>	<b>Propagation d'une épidémie &amp; résolutions numériques d'équations</b>	<b>495</b>
<b>62</b>	<b>Liste de exercices</b>	<b>517</b>
	<b>Index</b>	<b>527</b>

# Chapitre 1

## Autour de l'espérance et de la variance

### Exercice 1

*Variable positive d'espérance nulle*

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ , et possédant une espérance.

Montrer que

$$X \geq 0 \text{ et } \mathbb{E}(X) = 0 \iff \mathbb{P}([X = 0]) = 1,$$

autrement dit *une variable positive d'espérance nulle est presque-sûrement nulle, et réciproquement.*

**Solution** (Ex.1 – Variable positive d'espérance nulle)

On sait que :  $\forall x \in X(\Omega), \quad x \geq 0$ .

Supposons que :  $\exists x_0 > 0$  tq  $\mathbb{P}([X = x_0]) > 0$ .

Alors  $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x]) \geq x_0 \mathbb{P}([X = x_0]) > 0$  : absurde.

Donc :  $\forall x \in X(\Omega)$  tq  $x \neq 0, \quad \mathbb{P}([X = x]) = 0$ .

Or  $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$  (système complet d'événements), donc  $\mathbb{P}([X = 0]) =$

1.

**Exercice 2**

*Caractérisation de la nullité de la variance*

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ , et possédant une variance.

Montrer que

$$\mathbb{V}(X) = 0 \iff \mathbb{P}([X = \mathbb{E}(X)]) = 1,$$

autrement dit *la variance de  $X$  est nulle si, et seulement si,  $X$  est presque-sûrement constante, égale (du coup) à son espérance.*

**Solution (Ex.2 – Caractérisation de la nullité de la variance)**

$\mathbb{V}(X) = 0 \iff \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = 0 \iff \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 = 0) = 1$  car  $(X - \mathbb{E}(X))^2$  est une variable aléatoire réelle positive. On poursuit :

$$\mathbb{V}(X) = 0 \iff \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) = 0) = 1 \iff \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)).$$

**Exercice 3**

*Espérance d'une variable bornée*

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ . On suppose que  $X$  est bornée, *i.e.*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leq M.$$

Autrement dit :  $X(\Omega) \subset [-M; M]$ .

Montrer que  $\mathbb{E}(X)$  existe, et  $|\mathbb{E}(X)| \leq M$ .

**Solution (Ex.3 – Espérance d'une variable bornée)**

$$\forall x \in X(\Omega), \quad |x| \mathbb{P}([X = x]) \leq M \mathbb{P}([X = x]),$$

or la série  $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x])$  converge car  $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$  est un système

complet d'événements (et sa somme vaut 1).

Par comparaison,  $\sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x])$  est absolument convergente, donc  $\mathbb{E}(X)$

existe.

De :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad -M \mathbb{P}([X = x]) \leq x \mathbb{P}([X = x]) \leq M \mathbb{P}([X = x])$$

et  $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$

on tire :

$$-M \leq \mathbb{E}(X) \leq M.$$

☞ Ce dernier encadrement est une conséquence directe de la *croissance de l'espérance* car

Si  $\mathbb{E}(X)$  existe, alors  $-M \leq X \leq M \implies -M \leq \mathbb{E}(X) \leq M$ .

### Exercice 4

#### *Espérance par domination*

Soit  $X$  et  $Y$  deux variable aléatoire réelle définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ . On suppose que :

- (i)  $|X| \leq Y$ , i.e.  $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leq Y(\omega)$ ,
- (ii)  $\mathbb{E}(Y)$  existe.

Montrer qu'alors  $\mathbb{E}(X)$  existe, et  $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(Y)$ .

**Solution** (Ex.4 – *Espérance par domination*)

Là, il faut revenir à une expression encore plus fondamentale de l'espérance :

$$(\mathcal{F}) \quad \mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \mathbb{P}([Y = y]) = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}),$$

toujours la même idée :  $\mathbb{E}(Y)$  est la moyenne, pour chaque résultat  $\omega$  possible de l'expérience, de la valeur  $Y(\omega)$  prise par  $Y$  pondérée par la probabilité que ce résultat  $\omega$  se réalise.

Au passage, à méditer, pour  $y \in Y(\Omega)$ ,

$$y \mathbb{P}([Y = y]) = y \sum_{\omega \in \Omega, Y(\omega)=y} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega, Y(\omega)=y} Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$$

donc

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} y \mathbb{P}([Y = y]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left( \sum_{\omega \in \Omega, Y(\omega)=y} Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \right) = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$$

car les deux sommes imbriquées constituent une partition de l'ensemble  $\Omega$  : on classe les éléments de  $\Omega$  suivant la valeur de  $y = Y(\omega)$ , mais au final on somme pour tous les éléments de  $\Omega$ .

Alors :  $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \mathbb{P}(\{\omega\}) \leq Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$ ,

or par hypothèse la série  $\sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$  converge,

donc  $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \mathbb{P}(\{\omega\})$  converge.

Ainsi,  $\mathbb{E}(X)$  existe, et par croissance de l'espérance,

$$-Y \leq X \leq Y \implies -\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$



## Chapitre 2

# CAUCHY-SCHWARZ et coefficient de corrélation linéaire

C'est deux inégalités reposent sur le même procédé :

### Exercice 5

*Trinôme de signe constant*

Montrer que si le trinôme  $P : \lambda \mapsto a\lambda^2 + b\lambda + c$  est de signe constant sur  $\mathbb{R}$ , alors  $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ .

**Solution** (**Ex.5** – *Trinôme de signe constant*)

...car sinon  $P$  admettrait deux racines distinctes et changerait de signe entre ces deux racines.

### Exercice 6

*Inégalité de Cauchy-Schwarz en algèbre euclidienne*

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Montrer que

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

avec égalité si, et seulement si,  $u$  et  $v$  sont colinéaires.

**Solution (Ex.6 – Inégalité de Cauchy-Schwarz en algèbre euclidienne)**

Soit  $(u, v) \in E^2$ .

① Soit  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto \|u + \lambda v\|^2$ .

②  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \geq 0$  et  $P(\lambda) = \|v\|^2 \lambda^2 + 2\langle u, v \rangle \lambda + \|u\|^2$  est un trinôme du second degré en  $\lambda$ .

③ Donc  $\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$ , donc  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$  : c'est l'inégalité!

④ S'il y a égalité, alors  $\Delta = 0$  et  $P$  possède une racine (double)  $\lambda_0$ . Or  $P(\lambda_0) = 0$  donne  $\|u + \lambda_0 v\| = 0$  donc  $u = -\lambda_0 v$  :  $u$  et  $v$  sont colinéaires.

⑤ Réciproquement, si  $u$  et  $v$  sont colinéaires avec  $u = kv$ , alors

$$|\langle u, v \rangle| = |k| \langle u, u \rangle = |k| \|u\|^2 = \|u\| \|ku\| = \|u\| \|v\|.$$

**Exercice 7**

*Inégalité de Cauchy-Schwarz pour le coefficient de corrélation linéaire*

Soit  $X$  et  $Y$  deux variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ . On suppose que  $X$  et  $Y$  admettent un écart-type non nul.

On pose :  $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ .

Montrer que

$$|\rho(X, Y)| \leq 1$$

avec égalité si, et seulement si,  $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$

**Solution (Ex.7 – Inégalité de Cauchy-Schwarz pour le coefficient de corrélation linéaire)**

① Soit  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto \mathbb{V}(\lambda X + Y)$ .

②  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \geq 0$  (toute variance est positive!) et  $P(\lambda) = \mathbb{V}(X)\lambda^2 + 2\text{Cov}(X, Y)\lambda + \mathbb{V}(Y)$  est un trinôme du second degré en  $\lambda$ .

③ Donc  $\Delta = 4\text{Cov}(X, Y)^2 - 4\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \leq 0$ , donc  $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$ . Les écarts-types étant positifs (toujours) et non nuls (par hypothèse) :

$$|\rho(X, Y)| \leq 1.$$

④ S'il y a égalité, alors  $\Delta = 0$  et  $P$  possède une racine (double)  $\lambda_0$ . Or  $P(\lambda_0) = 0$  donne  $\mathbb{V}(\lambda_0 X + Y) = 0$  donc la variable  $\lambda_0 X + Y$  est presque sûrement constante.

Donc :  $\exists \mu \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\lambda_0 X + Y = \mu) = 1$ , soit  $\mathbb{P}(Y = -\lambda_0 X + \mu) = 1$ .

⑤ Si  $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$ , alors  $\mathbb{P}(Y - aX = b) = 1$ , donc  $\mathbb{V}(Y - aX) = 0$  :  $P$  possède une racine, nécessairement double car il est toujours positif. Donc

---

$\Delta = 0$ , donc  $|\text{Cov}(X, Y)| = \sigma(X)\sigma(Y)$ .



# Chapitre 3

## MARKOV et BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV

☞ [CCP – 2018 – PSI – Pb 2]

### Exercice 8

*Inégalité de MARKOV*

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ .  
On suppose que  $X$  est positive et possède une espérance.

Montrer que

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

**Solution** (Ex.8 – *Inégalité de MARKOV*)

*Le raisonnement repose sur une majoration assez grossière : dans la somme définissant l'espérance, on oublie une partie des termes, puis on minore ceux qui restent.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x]) \\ &\geq \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} x \mathbb{P}([X = x]) \\ &\geq \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} a \mathbb{P}([X = x]) \\ &\geq a \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} \mathbb{P}([X = x]) \geq a \mathbb{P}([X \geq a]) \end{aligned}$$

**Exercice 9**

*Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV*

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ .

On suppose que  $X$  possède une variance.

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

**Solution** (**Ex.9** – *Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV*)

*Le résultat est immédiat : on applique l'inégalité de MARKOV pour*

$$Y = (X - \mathbb{E}(X))^2 \text{ et } a = \varepsilon^2.$$

On a alors :

$Y$  est positive,  $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{V}(X)$ ,  $a = \varepsilon^2$ , et  $[Y \geq a] = [(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2] = [|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon]$ , donc l'inégalité découle de celle de MARKOV.

## Chapitre 4

# Lois hypergéométrique et multinomiale

*Deux lois d'utilisation fréquente prolongent la loi binomiale. La loi hypergéométrique envisage de compter un nombre de succès lors de tirages sans remise, donc non indépendants. La loi multinomiale s'intéresse aux successions d'expériences indépendantes pouvant se solder par des succès de plusieurs types, et non une issue binaire succès vs échec.*

### Exercice 10

#### *Loi hypergéométrique*

On considère un ensemble  $E$  de  $N$  objets (avec  $N \geq 2$ ), dont un nombre  $r \geq 1$  est de couleur rouge et un nombre  $b \geq 1$  est de couleur bleue, de sorte que  $r + b = N$ .

On note par ailleurs  $p \stackrel{\text{déf.}}{=} r/N$  et  $q \stackrel{\text{déf.}}{=} b/N$  la proportion initiale d'objets rouges respectivement bleus de cet ensemble, de sorte que  $p + q = 1$ .

Soit  $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$ . Dans cet ensemble  $E$ , on tire successivement et **sans remise**  $n$  objets de cet ensemble et on s'intéresse au nombre  $R$  d'objets rouges parmi ces  $n$  objets.

Notons que, vu la définition de  $R$ , il reviendrait au même de tirer simultanément ces  $n$  objets.

1. Montrer que la loi de  $R$  est donnée par

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(R = k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

La loi de  $R$  s'appelle la *loi hypergéométrique* et est fréquemment notée  $\mathcal{H}(N, n, p)$ .

2. Interpréter le paramètre  $p$  comme une probabilité.  
 3. Démontrer la *formule de Vandermonde*

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{N}{n}.$$

4. *Calcul des moments en décomposant  $R$  en somme de variables indicatrices*  
 On note, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $X_i$  la variable indicatrice de l'événement « le  $i$ -ème objet tiré est rouge ».

- a) Déterminer la loi de chaque  $X_i$ . On pourra déterminer la loi de  $X_1$  et justifier que les autres variables  $X_i$  suivent la même loi.  
 b) En déduire l'espérance de  $R$ .  
 c) Déterminer, pour  $i \neq j$ , la loi de  $X_i X_j$ .  
 d) En déduire la variance de  $R$ .

5. *Calcul des moments par la formule de Vandermonde*

- a) Justifier que, pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}$ .

- b) Calculer  $\mathbb{E}(R)$ .  
 c) Calculer  $\mathbb{E}(R(R-1))$  et en déduire  $\mathbb{V}(R)$ .

6. *Convergence de  $\mathcal{H}(N, n, p)$  vers  $\mathcal{B}(n, p)$*

*Heuristique* : si l'on tire un petit nombre d'objets  $n$  dans un grand ensemble  $E$ , on peut penser que les tirages modifient peu la composition de l'ensemble, les proportions  $p = r/N$  et  $q = b/N$  restant sensiblement égales au cours des tirages. Donc on peut penser que tout ce passe comme si les tirages avec lieu *avec remise*, auquel cas  $R$  suit une loi binomiale.

- a) Que dire, pour  $n$  et  $p$  fixés, de  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(R)$  et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(R)$  ?

- b) Soit  $i$  fixé. Montrer que  $\binom{j}{i} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{j^i}{i!}$ .

- c) En déduire que, pour  $n$ ,  $p$  et  $k$  fixés,  $\mathbb{P}(R = k) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

On dit que, lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ ,  $\mathcal{H}(N, n, p)$  converge en loi vers  $\mathcal{B}(n, p)$ .

**Solution (Ex.10 – Loi hypergéométrique)**

1. On tirage peut être modélisé par une partie à  $n$  éléments de l'ensemble  $E$ .

Soit  $\Omega$  l'ensemble des parties à  $n$  éléments de  $E$ . Alors  $\text{Card}(\Omega) = \binom{N}{n}$ .

Soit  $k \in [[0; n]]$ . Les parties favorables à l'événement  $[R = k]$  sont obtenues en choisissant  $k$  éléments parmi les  $r$  rouges puis  $n - k$  parmi les  $b$  bleus.

Donc  $\text{Card}([R = k]) = \binom{r}{k} \binom{b}{n-k}$ .

Les tirages étant équiprobables,

$$\mathbb{P}([R = k]) = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

2.  $p$  est la probabilité de tirer un objet rouge au premier tirage, mais pas au-delà car la composition de l'ensemble  $E$  est ensuite modifiée.
3. Comme  $([R = k])_{0 \leq k \leq n}$  est un système complet d'événements, on a

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([R = k]) = 1, \text{ donc } \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{N}{n}.$$

4. *Calcul des moments en décomposant  $R$  en somme de variables indicatrices*  
Ici, il devient nécessaire de changer  $\Omega$  qui ne tenait pas compte de l'ordre en  $\Omega'$  ensemble des  $n$ -listes (ordonnées, donc) d'éléments distincts de  $E$ .

- a) •  $X_1$  suit la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ .

• Soit  $i \in [[2; n]]$ .

Soit  $\sigma : [X_i = 1] \rightarrow [X_1 = 1]$  l'application qui à chaque tirage  $\omega$  faisant apparaître un objet rouge au  $i$ -ème rang (donc favorable à  $[X_i = 1]$ ) associe le tirage  $\omega'$  obtenu en permutant le premier objet et le  $i$ -ème de  $\omega$ , donc  $\omega'$  est favorable à  $[X_1 = 1]$ .

Alors  $\sigma$  est une bijection de  $[X_i = 1]$  sur  $[X_1 = 1]$ .

Par conséquent,  $\text{Card}([X_i = 1]) = \text{Card}([X_1 = 1])$ , donc  $\mathbb{P}([X_i = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$  et  $X_i \overset{d}{\sim} \mathcal{B}(p)$ .

*C'est assez moral*, car si on prend au hasard un objet de notre tirage sans connaître son rang, on sera enclin à penser qu'il y a une probabilité  $p$  qu'il soit rouge.

b)  $\mathbb{E}(R) = \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = np.$

- c) •  $X_1 X_2(\Omega) = \{0, 1\}$  donc  $X_1 X_2$  suit une loi de Bernoulli.

$\mathbb{P}([X_1 X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 1])\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 1])$   
(il n'y a pas indépendance!!!)

$\mathbb{P}([X_1 X_2 = 1]) = p \frac{r-1}{N-1}$  car au second tirage il reste  $r-1$  objets rouges parmi les  $N-1$  restant.

Donc  $X_1 X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(p \frac{r-1}{N-1}\right)$

- Un argument analogue à la question précédente montre que, pour tout

$i \neq j, X_i X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(p \frac{r-1}{N-1}\right)$ .

$$\text{d) } \mathbb{V}(R) = \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j),$$

or  $\forall i \in [[1; n]], \mathbb{V}(X_i) = p(1-p)$  et  $\forall 1 \leq i < j \leq n,$

$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = p \frac{r-1}{N-1} - p^2$ , donc

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(R) &= np(1-p) + n(n-1)p \left( \frac{r-1}{N-1} - p \right) \\ &= np(1-p) + n(n-1)p \left( \frac{p-1}{N-1} \right) \text{ puisque } pN = r \\ &= npq \left( 1 - \frac{n-1}{N-1} \right) = npq \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \end{aligned}$$

5. Calcul des moments par la formule de Vandermonde

$$\text{a) } k \binom{r}{k} = \frac{r!}{(k-1)!(r-k)!} = r \frac{(r-1)!}{(k-1)!((r-1)-(k-1))!} = r \binom{r-1}{k-1}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathbb{E}(R) &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^n k \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} = \frac{r}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^n \binom{r-1}{k-1} \binom{b}{n-k} \\ &= \frac{r}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r-1}{k} \binom{b}{n-1-k}, \text{ et par la formule de Vander-} \end{aligned}$$

monde

$$= \frac{r}{\binom{N}{n}} \binom{r+b-1}{n-1} = \frac{r}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1} = \frac{rn}{N} = np$$

- c)  $\mathbb{E}(R(R-1))$  et en déduire  $\mathbb{V}(R)$ . De façon très analogue,

$$\mathbb{E}(R(R-1)) \stackrel{\text{transfert}}{=} \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{r}{k} \binom{b}{n-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r(r-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=2}^n \binom{r-2}{k-2} \binom{b}{n-k}. \\
&= \frac{r(r-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r-2}{k} \binom{b}{n-2-k}, \text{ et par la formule de}
\end{aligned}$$

Vandermonde

$$\begin{aligned}
&= \frac{r(r-1)}{\binom{N}{n}} \binom{r+b-2}{n-2} = \frac{r}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2} = \frac{r(r-1)n(n-1)}{N(N-1)} \\
&= np \frac{(r-1)(n-1)}{N-1}
\end{aligned}$$

Comme par linéarité  $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$ , la formule de König-Huygens donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= np \left( \frac{(r-1)(n-1)}{N-1} + 1 - np \right) \text{ et comme } r = Np \\
&= np \left( \frac{Npn - Np - n + 1 + N - 1 - npN + np}{N-1} \right) \\
&= np \left( \frac{N(1-p) - n(1-p)}{N-1} \right) \\
&= npq \frac{N-n}{N-1}
\end{aligned}$$

6. a)  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(R) = np$  et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(R) = npq$ , qui sont respectivement l'espérance et la variance de la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ .

b) Soit  $i$  fixé.

$$\binom{j}{i} = \frac{j(j-1)\dots(j-i+1)}{i!} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{j^i}{i!} \text{ (produit de } i \text{ facteurs tous équivalents à } j \text{).}$$

c) Pour  $n, p$  (donc  $q$ ) et  $k$  fixés,

$$\mathbb{P}(R = k) = \frac{\binom{pN}{k} \binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(pN)^k (qN)^{n-k} n!}{N^n k! (n-k)!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

### Exercice 11

*Loi multinomiale et matrice de covariance*

Une urne contient des boules de  $r$  couleurs différentes  $C_1, \dots, C_r$ , en proportion respective  $p_1, \dots, p_r$  de sorte que :  $p_1 + \dots + p_r = 1$ . On tire au hasard et avec remise  $n$  boules dans cette urne et on note, pour chaque  $i$  entre 1 et  $r$ ,  $\nu_i$  le nombre de boules de couleur  $C_i$  obtenues au cours des  $n$  tirages, de sorte que :  $\nu_1 + \dots + \nu_r = n$  (étonnant non ?).

1. On note  $X$  le vecteur aléatoire  $(\nu_1, \dots, \nu_r)$ .
  - a) Décrire l'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs possibles de  $X$ .
  - b) Donner la loi de  $X$ .
  - c) Qu'obtient-on lorsque  $r = 2$  ?
2. a) Donner, pour chaque  $i$  entre 1 et  $r$ , la loi, l'espérance et la variance de  $\nu_i$ .
  - b) Donner, pour chaque  $i$  et  $j$  distincts entre 1 et  $r$ , la loi de  $\nu_i + \nu_j$ . En déduire la covariance du couple  $(\nu_i, \nu_j)$ .
3. a) Pour chaque  $i$  entre 1 et  $r$ , on pose  $y_i = \frac{\nu_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ . Les v.a.r.  $y_i$  sont-elles centrées, c'est-à-dire d'espérance nulle ? Sont-elles réduites, c'est-à-dire de variance égale à 1 ?
  - b) On note  $C$  la matrice de variance-covariance des  $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$  :
 
$$C \stackrel{\text{déf.}}{=} (\text{Cov}(y_i, y_j))_{1 \leq i, j \leq r}.$$
 Montrer que  $C = I_r - N$  où  $N = {}^t\text{L.L}$  avec  $L = (\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_r}) \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$ .
    - c) Montrer que :  $N^2 = N$  et que :  $\text{rg}(N) = 1$ .
    - d) Que dire de  $\text{rg}(C)$  ?

**Solution (Ex.11 – Loi multinomiale et matrice de covariance)**

1. On note  $X$  le vecteur aléatoire  $(\nu_1, \dots, \nu_r)$ .
  - a)  $X(\Omega) = \{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r, \sum_{i=1}^r k_i = n\}$ .
  - b) Donner la loi de  $X$ .  
 Soit  $\mathcal{T} = \{(c_1, \dots, c_n) \in [[1; r]]^n\} = [[1; r]]^n$  l'ensemble des tirages possibles.  
 Dénombrons les tirages favorables à  $X = (k_1, \dots, k_r) \in X(\Omega)$ .  
 Pour construire un tirage favorable, il faut choisir les rangs de  $k_1$  tirages amenant la couleur  $C_1$  et il y a  $\binom{n}{k_1}$  possibilités.  
 Puis il faut choisir les rangs de  $k_1$  tirages amenant la couleur  $C_2$  et il y a  $\binom{n - k_1}{k_2}$  possibilités.

En itérant le procédé, il y a :

$$\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \cdots \binom{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}{k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

tirages favorables à  $X = (k_1, \dots, k_r)$ , et chacun d'eux a une probabilité  $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$  de se réaliser, par indépendance des expériences.

Les tirages étant deux à deux incompatibles, la loi de  $X$  est

$$\forall (k_1, \dots, k_r) \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = (k_1, \dots, k_r)) = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}.$$

c) Pour  $r = 2$ ,  $\mathbb{P}(X = (k_1, k_2)) = \frac{n!}{k_1!k_2!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} = \binom{n}{k_1} p_1^{k_1} (1-p_1)^{n-k_1}$ , on retombe sur la loi binomiale.

2. a)  $\nu_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_i)$ ,  $\mathbb{E}(\nu_i) = np_i$  et  $\mathbb{V}(\nu_i) = np_i(1-p_i)$ .

b)  $\nu_i + \nu_j \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_i + p_j)$ .

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\nu_i, \nu_j) &= \frac{1}{2} (\mathbb{V}(\nu_i + \nu_j) - \mathbb{V}(\nu_i) - \mathbb{V}(\nu_j)) \\ &= \frac{1}{2} (n(p_i + p_j)(1-p_i-p_j) - np_i(1-p_i) - np_j(1-p_j)) \\ &= \frac{1}{2} (-2np_i p_j) = -np_i p_j \end{aligned}$$

3. a) •  $\mathbb{E}(y_i) = \frac{1}{\sqrt{np_i}} (\mathbb{E}(\nu_i) - np_i) = 0$  :  $y_i$  est centrée.

•  $\mathbb{V}(y_i) = \frac{1}{np_i} \mathbb{V}(\nu_i) = 1 - p_i \neq 1$  :  $y_i$  n'est pas réduite.

b) •  $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $c_{i,i} = \text{Cov}(y_i, y_i) = \mathbb{V}(y_i) = 1 - p_i = 1 - \sqrt{p_i p_i}$   
 •  $\forall (i, j) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2$  avec  $i \neq j$ , comme  $\text{Cov}(aX+b, cY+d) = ac \text{Cov}(X, Y)$ , on a

$$c_{i,j} = \text{Cov}(y_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{np_i} \sqrt{np_j}} \text{Cov}(\nu_i, \nu_j) = -\sqrt{p_i p_j}$$

• On a bien :  $C = I_r - N$  où  $N = (\sqrt{p_i p_j})_{1 \leq i, j \leq r} = {}^t L L$  avec  $L = (\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_r})$ .

c) •  $N^2 = {}^t L L {}^t L L = {}^t L (L {}^t L) L$  or  $L {}^t L = (\sum_{i=1}^r p_i) = (1)$  donc  $N^2 = {}^t L L = N$ .

• Les colonnes de  $N$  sont toutes proportionnelles à sa première colonne qui est non nulles :  $C_j = \frac{\sqrt{p_j}}{\sqrt{p_1}} C_1$ , donc  $\text{rg}(N) = 1$ .

d) Remarquons que  $N$  est une matrice de projecteur et  $C$  est la matrice du projecteur complémentaire. Ce sont même des matrices de projecteurs orthogonaux pour  $\mathbb{R}^r$  muni du produit scalaire canonique car elles sont symétriques.

En effet :  $C^2 = (I_r - N)^2 = I_r - 2N + N^2 = I_r - N = C$ .

Voici deux arguments pour le rang.

• Soit  $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ .

$X \in \text{Ker}(C) \iff CX = 0 \iff X - NX = 0 \iff NX = X \iff X \in \text{Im}(N)$

Donc  $\text{Ker}(C) = \text{Im}(N)$  et  $\text{rg}(C) = r - \dim(\text{Ker}(C)) = r - \text{rg}(N) = r - 1$ .

•  $C$  est une matrice de projecteur donc diagonalisable avec  $\text{Sp}(C) \subset$

$\{0, 1\}$ , donc semblable à une matrice  $\left( \begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ .

Alors  $\text{rg}(C) = k = \text{Tr}(C) = \sum_{i=1}^r (1 - p_i) = r - \sum_{i=1}^r p_i = r - 1$ .

## Chapitre 5

# Formule de l'espérance totale, problème du collectionneur et vagues d'appels

*La formule de l'espérance totale, qui est la jumelle de la formule des probabilités totales, fournit des réponses élégantes à un certain nombre de problèmes pour lesquelles la détermination explicite de lois peut être très fastidieuses.*

### **Définition – Espérance conditionnelle**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ . Soit  $A \in \mathcal{T}$  un événement de probabilité non nulle. On appelle *espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $A$* , notée  $\mathbb{E}(X|A)$ , l'espérance de  $X$  pour la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}_A$ , sous réserve qu'elle existe :

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}_A([X = x]).$$

### **Exercice 12**

*Formule de l'espérance totale*

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ . Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  un système complet d'événements tous de probabilité non nulle.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
  - (i)  $\mathbb{E}(X)$  existe et
  - (ii) pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\mathbb{E}(X|A_i)$  existe.
2. Dans ce cas, montrer qu'on a la *formule de l'espérance totale*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{E}(X|A_i).$$

**Solution (Ex.12 – Formule de l'espérance totale)**

1. • Supposons que  $\mathbb{E}(X)$  existe. Alors  $\sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x])$  converge absolument.

Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Par la formule des probabilités totales

$$|x| \mathbb{P}([X = x]) = |x| \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}_{A_j}([X = x]) \geq \mathbb{P}(A_i) |x| \mathbb{P}_{A_i}([X = x])$$

donc

$$|x \mathbb{P}_{A_i}([X = x])| \leq \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} |x \mathbb{P}([X = x])|$$

Par comparaison,  $\sum_{x \in X(\Omega)} |x \mathbb{P}_{A_i}([X = x])|$  converge, donc  $\mathbb{E}(X|A_i)$  existe.

• Réciproquement, si  $\mathbb{E}(X|A_i)$  existe pour tout  $i$ , alors par linéarité

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{E}(X|A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}_{A_i}([X = x]) \text{ converge absolument.}$$

Or

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{E}(X|A_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) x \mathbb{P}_{A_i}([X = x]) \stackrel{\text{FPT}}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x]).$$

Donc  $\mathbb{E}(X)$  existe.

2. Formule obtenue dans la réciproque ci-dessus...

**Exercice 13**

*Vagues d'appels*

Une secrétaire doit contacter  $n$  clients ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) par téléphone. Elle tente de les appeler les uns après les autres. Pour chaque client, la probabilité que l'appel téléphonique aboutisse est  $p$  ( $p \in ]0; 1[$ ) et est indépendante des

autres clients. À l'issue des  $n$  tentatives, on note  $Y_1$  le nombre de clients que la secrétaire a réussi à contacter.

Un peu plus tard, la secrétaire tente à nouveau d'appeler les  $n - Y_1$  clients non joints lors de la première vague d'appels. On suppose que la probabilité d'aboutir de chaque tentative reste égale à  $p$  et indépendante des autres, et on note  $Y_2$  le nombre total de clients contactés au cours de ces deux vagues d'appels.

La secrétaire procède ensuite à une 3-ème vague d'appels, puis une 4-ème, ... et ainsi de suite jusqu'à avoir contacté les  $n$  clients. On suppose qu'au cours de chacune des ces vagues d'appels, la probabilité d'aboutir de chaque tentative reste égale à  $p$  et indépendante des autres.

On demande l'espérance  $Y_k$ , le nombre total de clients contactés à l'issue de la  $k$ -ème vague.

1. En notant, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_k$  le nombre de tentatives fructueuses lors de la  $k$ -ème vague d'appels, déterminer la loi conditionnelle de  $X_{k+1}$  sachant  $[Y_k = j]$ .  
est binomiale de paramètres  $n - j$  et  $p$ .
2. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  
$$\mathbb{E}(Y_{k+1}) = (1 - p)\mathbb{E}(Y_k) + np$$
 (en convenant que  $Y_0 = 0$ ).
3. En déduire que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{E}(Y_k) = n - n(1 - p)^k$ .
4. Que vaut  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y_k)$ ? Commentaire?
5. Reprendre depuis le début en raisonnant avec la variable  $Z_k$  égale au nombre de clients *non* contactés à l'issue des  $k$  premiers essais.

**Solution (Ex.13 – Vagues d'appels)**

1. Si  $[Y_k = j]$  se réalise,  $X_{k+1}$  compte le nombre de succès de probabilité  $p$  lors de  $n - j$  expériences indépendantes, donc la loi conditionnelle cherchée est la loi binomiale  $\mathcal{B}(n - j, p)$ .
2. Il s'ensuit  $\mathbb{E}(X_{k+1} | Y_k = j) = (n - j)p$ .

Par le formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements  $([Y_k = j])_{1 \leq j \leq n}$ ,

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = \sum_{j=1}^n (n - j)p \mathbb{P}([Y_k = j]) \stackrel{\text{transfert}}{=} \mathbb{E}((n - Y_k)p) \stackrel{\text{lin.}}{=} np - p\mathbb{E}(Y_k)$$

Or  $Y_{k+1} = Y_k + X_{k+1}$ , donc

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}) \stackrel{\text{lin.}}{=} \mathbb{E}(Y_k) + \mathbb{E}(X_{k+1}) = (1 - p)\mathbb{E}(Y_k) + np$$

Cette relation est vraie pour  $k = 0$  puisque  $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$ .

3.  $(\mathbb{E}(Y_k))_k$  est une suite arithmético-géométrique de point fixe  $n$ .  $(\mathbb{E}(Y_k) - n)_k$  est géométrique de raison  $1 - p$ , de premier terme  $-n$ .
4. Puisque  $|1 - p| < 1$ ,  $\mathbb{E}(Y_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} n$ , ce qui prouve que les efforts de la secrétaire devraient finir par être couronner de succès, et même de  $n$  succès, l'espérance fait vivre, en quelque sorte...
5. L'application de la formule de l'espérance totale donne

$$\mathbb{E}(Z_{k+1}) = (1 - p)\mathbb{E}(Z_k)$$

d'où une suite géométrique donnant  $\mathbb{E}(Z_k) = n(1 - p)^k$ . Et  $Y_k = n - Z_k$  induit  $\mathbb{E}(Y_k) = n - n(1 - p)^k$ .

**Exercice 14**

*Problème du collectionneur*

Une collection est constituée de  $n$  images distinctes numérotées de 1 à  $n$ . Un collectionneur achète des images une à une, dans des emballages opaques. On suppose le marché suffisamment grand pour considérer que chaque achat du collectionneur est une expérience indépendante des autres, de sorte que, à chaque achat, la probabilité d'obtenir l'image n°  $i$  de la collection est  $\frac{1}{n}$ .

On note :

- ☞  $T_n$  la variable aléatoire réelle égale au nombre d'achats nécessaires pour achever la collection ;
- ☞  $X_k$  le nombre d'image(s) distincte(s) acquise(s) à l'issue du  $k$ -ème achat, de sorte que, lorsqu'on commence une collection vide,  $X_0 = 0$  et  $X_1 = 1$  ;
- ☞  $H_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$  le  $m$ -ème nombre harmonique ;
- ☞  $R_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2}$  la  $m$ -ème somme partielle de la série de Riemann  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ ,
- ☞  $\gamma$  la *constante d'Euler* :  $\gamma = \lim_{m \rightarrow +\infty} H_m - m \ln(m)$ .

1. Montrer que

$$\mathbb{E}(T_n) = nH_n \text{ et } \sigma(T_n) = \sqrt{n^2 R_n - nH_n}.$$

2. On admet<sup>1</sup> que  $H_m = \ln(m) + \gamma + \frac{1}{2m} + o\left(\frac{1}{m}\right)$  et  $R_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$ .

---

1. ... et cela devrait faire partie de notre culture mathématique...

Montrer que

$$\mathbb{E}(T_n) = n \ln(n) + \gamma n + \frac{1}{2} + o(1) \text{ et } \sigma(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n\pi}{\sqrt{6}}.$$

Voici un aperçu des espoirs que l'on peut nourrir :

$n$	10	20	30	40	50	75	100	150	200
$\mathbb{E}(T_n)$	29	72	120	171	225	368	519	839	1 175
$\sigma(T_n)$	11	24	36	49	62	94	126	190	254

3. Par la formule de l'espérance totale, montrer que  $(\mathbb{E}(X_k))_k$  est une suite arithmético-géométrique et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X_k) = n - n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k.$$

4. Que vaut  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_k) = n$  ?  
 5. Et si l'on raisonnait sur le nombre  $Y_k$  d'images non encore obtenues à l'issue du  $k$ -ème tirage ?

**Solution (Ex.14 – Problème du collectionneur)**

1. On note  $Y_k$  le nombre d'achat(s) nécessaire(s) pour obtenir une  $k$ -ème image distincte des autres lorsqu'on possède déjà  $k - 1$  images distinctes.  
 Alors :  $T_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ .

Les  $Y_k$  suivent des lois géométriques<sup>2</sup> respectivement de paramètre  $\frac{n - k + 1}{n}$ , d'espérance  $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{n}{n - k + 1}$  et de variance  $\mathbb{V}(Y_k) = \frac{n(k - 1)}{(n - k + 1)^2}$  et sont indépendantes. Par linéarité,

$$\mathbb{E}(T_n) \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n - k + 1} = n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = nH_n.$$

Par indépendance des variables  $(Y_k)_{k=1}^n$ ,

$$\mathbb{V}(T_n) \stackrel{\text{indép.}}{=} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(Y_k) = \sum_{k=1}^n \frac{n(k - 1)}{(n - k + 1)^2} = n \sum_{j=1}^n \frac{n - j}{j^2} = n^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} -$$

$$n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = n^2 R_n - nH_n.$$

---

2. Pour mémoire, rang d'obtention du premier succès dans un schéma de Bernoulli, d'espérance  $1/p$  et de variance  $(1 - p)/p^2$  si la probabilité de succès est  $p$ .

Ainsi  $\sigma(T_n) = \sqrt{n^2 R_n - n H_n}$ .

2. Obtenus à partir des développements  $H_n = n \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  et

$$R_n = \frac{\pi^2}{6} + o(1).$$

3. En notant  $X_k$  le nombre d'images distinctes du collectionneur à l'issue du  $k$ -ème achat, j'ai, par un dénombrement immédiat :

$$\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = \ell) = \begin{cases} \frac{j}{n} & \text{si } \ell = j \\ \frac{n-j}{n} & \text{si } \ell = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour  $j$  dans  $X_k(\Omega)$ ,  $\mathbb{E}(X_{k+1} | [X_k = j]) = j \frac{j}{n} + (j+1) \frac{n-j}{n} = 1 + \frac{n-1}{n} j$ .

Avec le système complet  $([X_k = j])_{j \in X_k(\Omega)}$ , la formule de l'espérance totale donne

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = \sum_{j \in X_k(\Omega)} \left(1 + \frac{n-1}{n} j\right) \mathbb{P}(X_k = j) \stackrel{\text{transfert}}{=} \mathbb{E} \left(1 + \frac{n-1}{n} X_k\right) \stackrel{\text{lin.}}{=} 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}(X_k).$$

Par conséquent,  $(\mathbb{E}(X_k))_k$  est une suite arithmético-géométrique, de point fixe  $n$ ,  $(\mathbb{E}(X_k) - n)_k$  est géométrique de raison  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ , de premier terme  $\mathbb{E}(X_1) - n = 1 - n$ .

Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{E}(X_k) = n - n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ .

4. La limite (rassurante!) est  $n$  puisque  $\left|1 - \frac{1}{n}\right| < 1 \dots$

5. On obtient  $\mathbb{E}(Y_{k+1} | [Y_k = j]) = j \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ,

$$\text{puis } \mathbb{E}(Y_{k+1}) \stackrel{\text{FET}}{=} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}(Y_k)$$

$$\text{d'où } \mathbb{E}(Y_k) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$$

$$\text{et on retrouve } \mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(n - Y_k) = n - n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$$

# Chapitre 6

## Problème du scrutin et marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$

☞[CCP – 2020 – PC – Exo no3]☞[MP-M1 – 2016 – PC-PSI – ]☞[CS-M1 – 2018 – PC – Partie IV]

### Propos du « Problème du scrutin »

Deux candidats A et B s'affrontent lors d'un scrutin. À l'issue du scrutin, A a obtenu  $p$  voix et B  $q$  voix, avec  $p > q$ .

On suppose que tous les ordres de dépouillements sont équiprobables.

Alors la probabilité que A ait toujours été en tête lors du dépouillement est

$$\mathbb{P}_{p,q} = \frac{p-q}{p+q}.$$

*Nous allons étudier deux démonstrations très différentes.*

### Exercice 15

*Problème du scrutin par la démonstration de Joseph BERTRAND*

Soit  $n = p + q$  le nombre total de voix. Notons  $D(n, p)$  le nombre de dépouillements où A est toujours en tête, avec du coup  $D(n, p) = 0$  si  $p \leq n/2$  ou si  $p > n$ .

On va démontrer par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  que

$$(\mathcal{H}_n) : \quad \forall p \in [[\lfloor n/2 \rfloor + 1; n]], \quad D(n, p) = \binom{n-1}{p-1} - \binom{n-1}{p}.$$

1. Montrer que :  $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $D(n, p) = D(n-1, p-1) + D(n-1, p)$ .
2. En déduire  $(\mathcal{H}_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

3. Montrer que ce résultat conduit bien à

$$\mathbb{P}_{p,q} = \frac{p-q}{p+q}.$$

**Solution (Ex.15 – Problème du scrutin par la démonstration de Joseph BERTRAND)**

1.  $D(n, p)$  se décompose en deux types de dépouillements

(i) ceux qui se terminent par un bulletin du vainqueur A, et il y en a  $D(n-1, p-1)$  car A doit être en tête au cours du dépouillement de  $n-1$  premiers bulletins,

(ii) ceux qui se terminent par un bulletin du perdant B, et il y en a  $D(n-1, p)$  (à l'avant dernière ouverture d'enveloppe il y avait  $q-1$  bulletins du perdant sortis).

On a donc la relation  $D(n, p) = D(n-1, p-1) + D(n-1, p)$ .

2. C'est parti pour la récurrence...

**I** Pour  $n = 1, p \in [[1; 1]]$ ,  $D(1, 1) = 1 = \binom{0}{0} - \binom{0}{1}$ .

Pour  $n = 2, p \in [[2; 2]]$ ,  $D(2, 2) = 1 = \binom{1}{1} - \binom{1}{2}$ .

**H** Supposons la propriété vraie pour  $n \geq 2$ .

Soit  $p \in [[\lfloor (n+1)/2 \rfloor + 1; n+1]]$ , donc  $p \geq 2$ .

$$\begin{aligned} D(n+1, p) &= D(n, p-1) + D(n, p) \\ &= \binom{n-1}{p-2} - \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p-1} - \binom{n-1}{p} \\ &\quad \text{y compris si } p = n+1 \dots \\ &\stackrel{\text{Pascal}}{=} \binom{n}{p-1} - \binom{n}{p} \end{aligned}$$

**C** Donc la propriété est établie par récurrence sur  $n$ .

3.  $\binom{n-1}{p-1} - \binom{n-1}{p} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!q!} - \frac{(p+q-1)!}{p!(q-1)!} = \frac{(p-q)(p+q-1)!}{p!q!}$

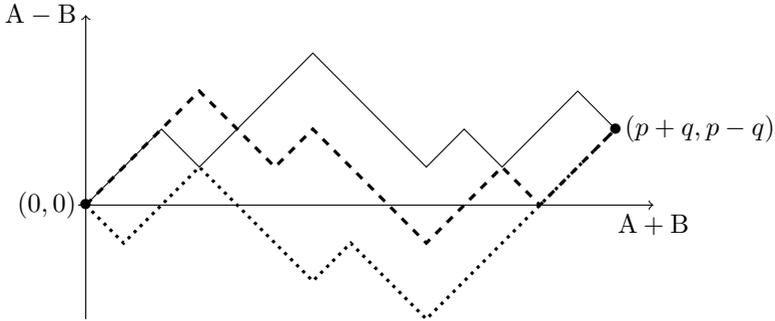
Donc  $D(n, p) = \frac{p-q}{p+q} \binom{p+q}{p}$ .

Et comme il y a  $\binom{p+q}{p}$  ordres de dépouillements possibles – il suffit de choisir la place des  $p$  bulletins parmi les  $p+q$  bulletins –, la probabilité cherchée vaut bien  $\frac{p-q}{p+q}$ .

$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad D(n, p) = D(n-1, p-1) + D(n-1, p)$ .

### Exercice 16

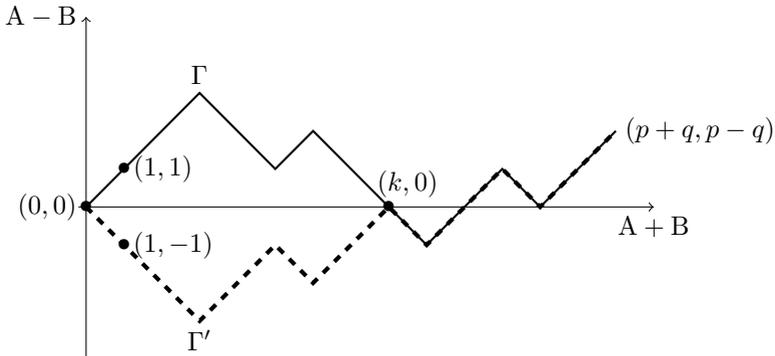
*Problème du scrutin par le principe de symétrie*



Chaque dépouillement est représenté par un chemin joignant  $(0, 0)$  à  $(p+q, p-q)$  en suivant des déplacements du type  $(1, \pm 1)$ , ce qui fait  $\binom{p+q}{p}$  chemins possibles : il faut choisir les  $p$  déplacements du type  $(1, +1)$  parmi les  $p+q$  déplacements.

Un chemin favorable est un chemin passant par  $(1, 1)$  et ne rencontrant pas l'axe des abscisses.

1. Justifier qu'il y a exactement  $\binom{p+q-1}{p-1}$  chemins joignant  $(1, 1)$  à  $(p+q, p)$ .
2. Parmi ceci, on va dénombrer ceux qui rencontrent l'axe des abscisses par symétrie. À un tel chemin  $\Gamma$  qui rencontre l'axe des abscisses pour la première en  $(k, 0)$ , on associe le chemin  $\Gamma'$  symétrique de  $\Gamma$  jusqu'à  $(k, 0)$  et identique à  $\Gamma$  au-delà.



Montrer que le nombre de chemins passant par  $(1, 1)$  sans rencontrer l'axe des abscisses est

$$\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}.$$

3. Conclure.

**Solution** (Ex.16 – *Problème du scrutin par le principe de symétrie*)

- Il suffit de placer les  $p-1$  voix de A parmi les  $p+q-1$  bulletins restants.
- À chaque chemin  $\Gamma$  joignant  $(1, 1)$  et rencontrant l'axe des abscisses correspond un unique chemin  $\Gamma'$  joignant  $(1, -1)$ , ceci établit une bijection et il y a autant de chemins  $\Gamma$  que de chemin  $\Gamma'$ , or le nombre de chemins  $\Gamma'$  joignant  $(1, -1)$  à  $(p+q, p)$  est exactement  $\binom{p+q-1}{p}$  (placer les  $p$  voix de A parmi les  $p+q-1$  bulletins restants).

Finalement, le nombre de chemins passant par  $(1, 1)$  sans rencontrer l'axe des abscisses est  $\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$ .

- Le nombre de chemins possibles est le nombre de façons de placer les  $p$  bulletins de A au cours des  $p+q$  dépouillements, soit  $\binom{p+q}{p}$ .

Le nombre de chemins favorables est

$$\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!q!} - \frac{(p+q-1)!}{p!(q-1)!} = \frac{p-q}{p+q} \binom{p+q}{p}$$

Les chemins sont équiprobables, donc

$$\mathbb{P}_{p,q} = \frac{p-q}{p+q}.$$

**Exercice 17**

*Application à une marche aléatoire dans  $\mathbb{Z}$*

On considère un mobile se déplaçant sur un axe gradué suivant le protocole :

- à l'instant  $i = 0$ , le mobile est à l'abscisse 0 ;
- à chaque instant  $i \in \mathbb{N}^*$ , le mobile se déplace d'une unité, équiprobablement dans le sens croissant ou dans le sens décroissant ;
- à chaque instant, le sens du déplacement est indépendant des autres déplacements déjà effectués.

On note  $X_i$  la variable modélisant le  $i$ -ème déplacement et  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

Soit J l'événement « le mobile ne revient jamais à l'origine du repère ».

- 
1. a) Justifier que  $(X_i)$  sont indépendantes, de même loi à préciser.  
 b) Que représente  $S_n$  ?

2. Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(S_{2n-1} = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}.$$

3. En utilisant le problème du scrutin, justifier que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall r \in [[1; n]]$ ,

$$\mathbb{P}(S_2 > 0, \dots, S_{2n-2} > 0, S_{2n} = 2r) = \frac{r}{2^{2n}} \binom{2n}{n+r}.$$

4. À l'aide de l'identité  $\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} = \frac{r}{n} \binom{2n}{n+r}$ , montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbb{P}(S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}.$$

5. En déduire que  $\mathbb{P}(J) = 0$ . Commentaire ?

**Solution (Ex.17 – Application à une marche aléatoire dans  $\mathbb{Z}$ )**

1. L'énoncé indique que les  $X_i$  sont indépendantes avec

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_i = -1]) = \mathbb{P}([X_i = 1]) = \frac{1}{2}.$$

$S_n$  est l'abscisse du mobile à l'instant  $n$ .

2. • Soit  $g$  (reps.  $d$ ) le nombre de déplacements à gauche (resp. à droite). Le nombre total de déplacements est  $g + d$  et la condition *sine que non* pour être à l'origine est  $g = d$ , donc le nombre de déplacements  $g + d = 2g$  doit être pair :  $[S_{2n-1} = 0] = \emptyset$ .

Les déplacements étant équiprobables, il y a  $2^n$  déplacements possibles, dont  $\binom{2n}{n}$  correspondent à exactement  $n$  déplacements à gauche parmi les  $2n$  déplacements (les  $2n - n$  restants étant fatalement à droite).

• À noter : en posant  $D_n$  le nombre de déplacements à droite (i.e. positifs), alors  $D_n \leftrightarrow \mathcal{B}(n; 1/2)$ . Et comme  $[S_{2n} = 0] = [D_{2n} = n]$ , on a bien

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(D_{2n} = n) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}.$$

3. En appliquant le problème du scrutin pour  $2n$  voix avec une différence de voix valant  $2r$ ,

$$\mathbb{P}_{[S_{2n}=2r]}(S_2 > 0, \dots, S_{2n-2} > 0) = \frac{2r}{2n} = \frac{r}{n}.$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_2 > 0, \dots, S_{2n-2} > 0, S_{2n} = 2r) &= \mathbb{P}(S_{2n} = 2r) \mathbb{P}_{[S_{2n}=2r]}(S_2 > 0, \dots, S_{2n-2} > 0) \\ \mathbb{P}(S_2 > 0, \dots, S_{2n-2} > 0, S_{2n} = 2r) &= \frac{r}{2^{2n}} \binom{2n}{n+r}. \end{aligned}$$

4. En remarquant la réunion d'événements deux à deux incompatibles,

$$(S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) = \bigcup_{1 \leq r \leq n} (S_2 > 0, \dots, S_{2n-2} > 0, S_{2n} = 2r)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) &= \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(S_2 > 0, \dots, S_{2n-2} > 0, S_{2n} = 2r) \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{r}{2^{2n} n} \binom{2n}{n+r} \end{aligned}$$

Essayons d'arranger ce calcul :

$$\begin{aligned} \binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} &= \frac{(2n-1)!}{(n+r-1)!(n-r)!} - \frac{(2n-1)!}{(n+r)!(n-r-1)!} = \\ \frac{n+r}{2n} \binom{2n}{n+r} - \frac{n-r}{2n} \binom{2n}{n+r} &= \frac{r}{n} \binom{2n}{n+r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=1}^n \left( \binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=1}^n \left( \binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=1}^n \left( \binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \left( \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{2n} \right) \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \end{aligned}$$

5. Soit  $J_n$  l'événement « le mobile ne retourne pas à l'origine au cours des  $2n$  premiers déplacements ». De

$$J_n = (S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) \cup (S_2 < 0, \dots, S_{2n} < 0),$$

réunion de deux événements incompatibles, et de même probabilité par symétrie, on déduit :

$$\mathbb{P}(J_n) = 2 \times \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Or

$$J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} J_n$$

Et la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite décroissante d'événements :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_{n+1} \subset J_n,$$

car s'il n'y a pas de retour à l'origine au cours de  $2n+2$  premiers déplacements, il n'y a pas eu de retour au cours des  $2n$  premiers...

Par *continuité monotone de la probabilité*,

$$\mathbb{P}(J) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} J_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(J_n) = 0.$$

---

En effet, par la formule de Stirling

$$\mathbb{P}(J_n) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n} e^{-2n}}{2^{2n} (\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n})^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$\mathbb{P}(J) = 0$  et il est presque-certain que le mobile reviendra à l'origine du repère au bout d'un nombre fini de déplacements.



# Chapitre 7

## Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ et séries entières

☞[CCP – 2020 – PC – Exo no3]☞[MP-M1 – 2016 – PC-PSI – ]☞[CS-M1 – 2018 – PC – Partie IV]

Le § « Problème du scrutin et marche aléatoire dans  $\mathbb{Z}$  » présentait une marche aléatoire équiprobable. Ici s'intéresse aux marches aléatoires non nécessairement équiprobables, en s'appuyant techniquement sur les séries entières.

### Définition – Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit  $p \in ]0; 1[$  et  $q = 1 - p$ . On considère une suite de variables  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  indépendantes toutes de lois définies par

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad X_i(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = q.$$

On pose

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

On peut se représenter la situation par un mobile se déplaçant sur  $\mathbb{Z}$ , considéré comme axe gradué, situé en 0 à l'instant  $i = 0$ , et se déplaçant à chaque instant  $i \in \mathbb{N}^*$  de  $X_i = \pm 1$  unité.  $S_n$  est alors l'abscisse du mobile à l'issue du  $n$ -ième déplacement,  $S_0 = 0$  caractérisant l'abscisse nulle au début de l'expérience.

On s'intéresse au premier retour à l'origine du mobile.

Bien que les  $X_i$  ne suivent pas exactement une loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ , elles s'en rapprochent et cette observation permet de trouver sans fatigue la loi des  $S_n$ .

**Exercice 18**

*Petite considération préliminaire, ou l'enfance de l'art*

1. Donner pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , la loi de  $Y_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{X_i + 1}{2}$ .
2. En s'appuyant sur les  $Y_i$ , expliciter la loi de  $S_n$ .
3. Expliciter en particulier  $\mathbb{P}(S_n = 0)$ , probabilité d'un retour en 0 à l'issue du  $n$ -ième déplacement.

*Le cas  $n$  impair se médite :*

(i) d'une part,  $S_1(\Omega) = \{-1, 1\}$ ,  $S_3(\Omega) = \{-3, -1, 1, 3\}$ , etc., et  $0 \notin S_n(\Omega)$  si  $n$  est impair,

(ii) d'autre part,  $[S_n = 0]$  exige autant de déplacements « +1 » que de déplacements « -1 », donc un nombre pair de déplacements, donc  $n$  pair.

**Solution (Ex.18 – Petite considération préliminaire, ou l'enfance de l'art)**

1.  $X_i = -1 \iff Y_i = 0$ , et  $X_i = 1 \iff Y_i = 1$ , tout est dit...
2. Les  $(Y_i)$  sont indépendantes et toutes de lois  $\mathcal{B}(p)$ , donc par stabilité de la loi binomiale,  $\Sigma_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

Donc  $\Sigma_n(\Omega) = [[0; n]]$  et,  $\forall k \in [[0; n]]$ ,  $\mathbb{P}(\Sigma_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

Or :  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n (2Y_i - 1) = 2 \sum_{i=1}^n Y_i - n = 2\Sigma_n - n$ .

Donc :  $S_n(\Omega) = \{2k - n | k \in \Sigma_n(\Omega)\} = \{2k - n | k \in [[1; n]]\}$

Et :  $\forall k \in [[1; N]]$ ,  $\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \mathbb{P}(\Sigma_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

3.  $2k - n = 0 \iff k = n/2$ , impossible si  $n$  est impair, et sinon on applique la formule précédente :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair,} \\ \binom{n}{n/2} (pq)^{n/2} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

---

### Exercice 19

*Retour à l'origine par les séries entières*

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \mathbb{P}(S_n = 0), \\ f_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0).$$

On note les sommes de séries entières associées

$$\forall s \in ]-1; 1[, \quad P(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n s^n \quad \text{et} \quad F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n s^n.$$

☞ Il ne s'agit pas pour autant de fonctions génératrices puisqu'elles ne sont pas du type  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n) s^n$ . Cependant,

$$|p_n| \leq 1 \quad \text{et} \quad |f_n| \leq 1 \quad \text{pour tout } n$$

assure un rayon de convergence valant au moins 1.

Montrer successivement :

1.  $\forall n \geq 1, \quad p_n = \sum_{k=1}^n p_{n-k} f_k.$

2.  $\forall s \in ]-1; 1[, \quad P(s) = 1 + P(s)F(s).$

3. Or  $\forall s \in ]-1; 1[, \quad P(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}$ , donc  $F(s) = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}$ .

4. La probabilité que le mobile revienne à l'origine au moins une fois vaut  $1 - |p - q|$ . En particulier, on est presque-sûr que le mobile repasse par l'origine si, et seulement si,  $p = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire les sens de déplacement sont équiprobables<sup>1</sup> Ici, on recourra à une fonction génératrice.

5. Dans le cas  $p = \frac{1}{2}$ , le temps moyen de retour à l'origine, défini comme espérance de la variable T égale à l'instant du premier retour en 0, est infini, i.e. donc  $\mathbb{E}(T)$  n'existe pas au sens de notre cours<sup>2</sup>.

**Solution** (Ex.19 – Retour à l'origine par les séries entières)

1. Commençons par nommer les événements sur lesquels nous allons raisonner.

Soit pour  $n \geq 0$ ,  $A_n \stackrel{\text{déf.}}{=} [S_n = 0]$  « le mobile est en 0 à l'instant  $n$  »,

---

1. Ce cas est aussi celui étudié au §« Problème du scrutin et marche aléatoire dans  $\mathbb{Z}$  ».

2. Lorsqu'une série à terme général positif diverge, ses sommes partielles tendent nécessairement vers  $+\infty$ .

et pour  $k \geq 1$   $B_k \stackrel{\text{déf.}}{=} [S_1 \neq 0, \dots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0]$  « le mobile repasse pour la première fois en 0 à l'instant  $k$ .

Soit  $n \geq 1$ . De  $A_n = \bigcup_{1 \leq k \leq n} (A_n \cap B_k)$  (le passage en 0 à l'instant  $n$  n'étant pas nécessairement le premier retour en 0...), on tire par incompatibilité deux à deux :

$$p_n = \mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_n \cap B_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}_{B_k}(A_n)$$

Or

- $\mathbb{P}(B_k) = f_k$  par définition,
- $\mathbb{P}_{B_k}(A_n) = \mathbb{P}(X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_n = 0) = \mathbb{P}(S_{n-k} = 0) = p_{n-k}$ , car les  $X_i$  sont indépendantes et de même loi, donc la somme de  $n-k$  quelconques (distinctes) d'entre elles suit la même loi que  $S_{n-k}$ .

$$\text{D'où } p_n = \sum_{k=1}^n p_{n-k} f_k.$$

2. Par le produit de Cauchy et comme  $p_0 = 1$  et  $f_0 = 0$ ,

$$P(s)F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n p_{n-k} f_k \right) s^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n s^n = P(s) - 1$$

$$\forall s \in ]-1; 1[, \quad P(s) = 1 + P(s)F(s).$$

3.  $\forall s \in ]-1; 1[, \quad P(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}$  et  $F(s) = \sqrt{1-4pqs^2}$

On sait par la propriété préliminaire que

$$p_n = \mathbb{P}(S_n = 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \binom{n}{n/2} (pq)^{n/2} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

y compris pour  $n = 0$ .

Le développement en série entière de  $\frac{1}{\sqrt{1-u}} = (1-u)^{-1/2}$  est

$$(1-u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{u}{1!} + \frac{3}{2^2} \frac{u^2}{2!} + \frac{3 \times 5}{2^3} \frac{u^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$$

$$\text{où } a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!} \times \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (4pqs^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (pq)^n s^{2n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{k/2} (pq)^{k/2} s^k$$

$$\text{D'où } \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}} = P(s).$$

---


$$\text{Et } F(s) = 1 - \frac{1}{P(s)} = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}.$$

4. Soit B l'événement « le mobile revient à l'origine au moins une fois ».

$B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ , réunion d'événements deux à deux incompatibles. Par  $\sigma$ -additivité,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k = F(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq},$$

or  $1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2 = (p-(1-p))^2 = (p-q)^2$ ,  
donc

$$\mathbb{P}(B) = 1 - |p - q|.$$

Du coup,  $\mathbb{P}(B) = 1 \iff p = q \iff p = \frac{1}{2}$ .

5. Soit la variable T égale à l'instant du premier retour en 0, ce qui suppose  $p = 1/2$ !

En effet, on a :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(B_k) = f_k$  et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k = 1 - |p - q| \neq 1 \text{ si } p \neq 1/2, \text{ ce qui signifie que } T$$

n'est pas correctement définie si  $p \neq 1/2$ .

Alors F est la fonction génératrice de la variable T, et d'après le cours, T possède une espérance si, et seulement si, F est dérivable en 1.

Or, comme  $p = q = 1/2$ ,  $F : s \mapsto \sqrt{1 - s^2}$  n'est pas dérivable en  $1^-$  :

$$\frac{F(s) - F(1)}{s - 1} = \frac{\sqrt{1 - s^2}}{s - 1} = \frac{\sqrt{(1-s)(1+s)}}{s - 1} \underset{s \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1-s}} \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} -\infty$$



## Chapitre 8

# Lemmes de BOREL-CANTELLI et marches aléatoires

### La « limsup » et l'infiniment souvent

On se donne une suite infinie d'événements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et on cherche la probabilité que, lors de la réalisation de l'expérience aléatoire, une infinité de  $A_n$  se réalisent.

Par exemple, on lance indéfiniment une pièce de probabilité d'obtention de *pile* valant  $p \in ]0; 1[$  et on cherche la probabilité d'obtenir une infinité de *piles* au cours de ces lancers.  $p$  étant strictement positive, l'intuition peut nous laisser penser qu'il est certain qu'une infinité de *piles* sortiront.

L'événement « une infinité de  $A_n$  se réalise » signifie que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , l'événement  $U_m = \bigcup_{n \geq m} A_n$  : aussi grand que soit  $m$ , l'un au moins des  $A_n$  au-delà de  $m$  i.e. avec  $n \geq m$  s'est réalisé. Autrement dit, cet événement se formalise

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n.$$

Comme les événements  $(U_m)_{m \geq 0}$  forment une suite décroissante,  $\bigcap_{0 \leq m \leq M} U_m = U_M$  et  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} U_m$  peut être envisagé<sup>1</sup> comme une limite ensembliste de  $(U_m)$ .

De plus,  $U_m = \bigcup_{n \geq m} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \exists n \geq m, \omega \in A_n\}$  peut être envisagé comme une borne supérieure des  $(A_n)_{n \geq m}$ .

---

1. Il ne s'agit pas ici de donner une définition rigoureuse des notions de *limite* et de *borne supérieure* ensembliste, mais d'expliquer l'origine du terme *limsup*.

Aussi l'ensemble précédent est souvent appelé « *limsup* » des  $(A_n)$ .

$$\limsup(A_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n.$$

Une autre notation pour cet événement est

$$\{A_n : \text{i.s.}\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n$$

où « i.s. » signifie « infiniment souvent ».

**Exercice 20**

*Lemmes de BOREL-CANTELLI*

1. *Premier lemme de Borel-Cantelli*

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements.

On suppose que la série  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$  converge<sup>2</sup>.

On va montrer que

$$\mathbb{P}(\{A_n : \text{i.s.}\}) = 0.$$

*Autrement dit, on est presque-certain que seulement un nombre fini de  $A_n$  se réalisent.*

a) Soit, pour tout  $m \geq 0$ ,  $U_m = \bigcup_{n \geq m} A_n$ .

Montrer que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_m) = 0$ .

b) Conclure

2. *Second lemme de Borel-Cantelli*

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements *indépendants*.

On suppose que la série  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$  diverge<sup>3</sup>.

On va montrer que

$$\mathbb{P}(\{A_n : \text{i.s.}\}) = 1.$$

*Autrement dit, on est presque-certain qu'une infinité de  $A_n$  se réalisent.*

2. Ce que de nombreux auteurs écrivent  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$  car il s'agit d'une série à terme général positif.

3. Ce que de nombreux auteurs écrivent  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$  car il s'agit d'une série à terme général positif.

a) Décrire  $\overline{\{A_n : \text{i.s.}\}}$  à l'aide des événements  $V_m \stackrel{\text{déf.}}{=} \bigcap_{n \geq m} \overline{A_n}$  (pour tout  $m$  de  $\mathbb{N}$ ).

b) Justifier que, pour tout  $m$  de  $\mathbb{N}$  et tout  $p \geq m$ ,

$$\mathbb{P}(V_m) \leq \prod_{n=m}^p (1 - \mathbb{P}(A_n)).$$

c) Montrer que pour tout  $m$  de  $\mathbb{N}$   $\prod_{n=m}^p (1 - \mathbb{P}(A_n)) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$

d) En déduire  $\mathbb{P}(V_m)$  pour tout  $m$  de  $\mathbb{N}$ .

e) Conclure.

3. Que peut-on dire de général à propos de  $\mathbb{P}(\{A_n : \text{i.s.}\})$  lorsque les  $(A_n)$  sont indépendants ?

*On parle parfois d'une loi du « zéro ou un », ou du « tout ou rien ».*

**Solution (Ex.20 – Lemmes de BOREL-CANTELLI)**

1. a) Puisque pour  $m \geq 0$   $U_m = \bigcup_{n \geq m} A_n$ , on a :  $\mathbb{P}(U_m) \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ .

Comme la série  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$  converge,  $\sum_{n=m}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$  en tant que reste d'une série convergente. Donc  $\mathbb{P}(U_m) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$ .

b) La suite  $(U_m)$  est décroissante puisque pour tout  $m$   $\bigcup_{n \geq m+1} A_n \subset \bigcup_{n \geq m} A_n$ .

Alors par continuité monotone

$$\mathbb{P}(\{A_n : \text{i.s.}\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m \geq 0} U_m\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_m) = 0.$$

2. a)  $\overline{\{A_n : \text{i.s.}\}} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} \overline{A_n} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m$ .

b) Pour  $p \geq m$ , on a  $V_m \subset \bigcap_{m \leq n \leq p} \overline{A_n}$  donc  $\mathbb{P}(V_m) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{m \leq n \leq p} \overline{A_n}\right)$ .

Comme les  $(A_n)$  sont indépendants, les  $(\overline{A_n})$  le sont aussi, d'où

$$\mathbb{P}(V_m) \leq \prod_{n=m}^p \mathbb{P}(\overline{A_n}) \leq \prod_{n=m}^p (1 - \mathbb{P}(A_n)).$$

c)  $\ln\left(\prod_{n=m}^p (1 - \mathbb{P}(A_n))\right) = \sum_{n=m}^p \ln((1 - \mathbb{P}(A_n))) \leq -\sum_{n=m}^p \mathbb{P}(A_n)$  en vertu de l'inégalité classique  $\ln(1 + u) \leq u$  pour tout  $u > -1$ .

Or par hypothèse  $\sum_{n=m}^p \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ , donc

$$\ln \left( \prod_{n=m}^p (1 - \mathbb{P}(A_n)) \right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} -\infty,$$

et finalement  $\prod_{n=m}^p (1 - \mathbb{P}(A_n)) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .

d) Par encadrement, on déduit de b) que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(V_m) = 0$ .

e) Par sous-additivité,  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m\right) \leq \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V_m)$  donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m\right) = 0$$

Par conséquent,  $\mathbb{P}\left(\overline{\{A_n : \text{i.s.}\}}\right) = 0$  et

$$\mathbb{P}\{A_n : \text{i.s.}\} = 1.$$

3. Dans ce cas, l'événement  $\{A_n : \text{i.s.}\}$  est soit de probabilité 0, soit de probabilité 1, donc soit presque-impossible, soit presque-certain. Toute autre valeur pour cette probabilité est exclue.

**Exercice 21**

*Apparition d'un motif donné*

*Cet exercice répond et généralise l'exemple donné en introduction.*

On lance indéfiniment une pièce de probabilité d'obtention de *pile* (noté P) valant  $p \in ]0; 1[$  et on choisit un motif donné par une succession de  $\ell$  piles ou faces, où  $\ell \in \mathbb{N}^*$ .

Par exemple, pour  $\ell = 3$ , on se donne le motif P-P-F. Si les premiers lancers donnent P-F-P-P-F-F-F-P-P-F-P..., on dit que le motif est apparu deux fois au cours de 11 premiers lancers, aux rangs 3 à 5 et aux rangs 8 à 10.

Montrer que l'événement « *le motif apparaît une infinité de fois* » est presque-certain.

**Solution (Ex.21 – Apparition d'un motif donné)**

Notons pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$   $A_n$  l'événement « *le motif apparaît aux rangs  $n$  à  $n + \ell - 1$*  ».

On souhaite montrer que  $\{A_n : \text{i.s.}\}$  est probabilité 1, donc utiliser le second lemme de Borel-Cantelli. Mais les  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne sont pas indépendants.

Considérons les événements  $A_1, A_{1+\ell}, A_{1+2\ell}, \dots, A_{1+k\ell}, \dots$ . Ils sont indé-

pendants puisque définis par des lancers distincts, et tous de probabilités  $p^a(1-p)^{\ell-a}$  où  $a$  est le nombre de *pires* dans le motif choisi. Alors la série de terme général  $\mathbb{P}(A_{1+k\ell})$  est grossièrement divergente, et le second lemme affirme que

$$\mathbb{P}(\{A_{1+k\ell} : \text{i.s.}\}) = 1.$$

Or :  $\{A_{1+k\ell} : \text{i.s.}\} \subset \{A_n : \text{i.s.}\}$ , donc  $\mathbb{P}(\{A_{1+k\ell} : \text{i.s.}\}) \leq \mathbb{P}(\{A_n : \text{i.s.}\})$ .

Par conséquent

$$\mathbb{P}(\{A_n : \text{i.s.}\}) = 1.$$

### Exercice 22

*Retour en 0 d'une marche aléatoire inéquitable*

Dans les § consacrés aux marches aléatoires, on a vu que si  $p = 1/2$ , la probabilité d'un retour à l'origine vaut 1, tandis qu'elle vaut  $1 - |p - q| < 1$  sinon. Dans le cas où  $p = 1/2$ , la probabilité d'un second retour à l'origine vaut à nouveau 1, etc.

Que dire lorsque  $p \neq 1/2$  ?

On reprend les notations des marches aléatoires :

①  $p \in ]0; 1[ \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  et  $q = 1 - p$ ;

②  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = q.$$

③ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , de sorte que  $S_n$  est l'abscisse du mobile à l'issue du  $n$ -ième déplacement.

Montrer que l'événement « le mobile ne revient à l'origine qu'un nombre fini de fois » est presque-certain.

**Solution** (Ex.22 – *Retour en 0 d'une marche aléatoire inéquitable*)

Soit  $F$  l'événement « le mobile ne revient à l'origine qu'un nombre fini de fois ».

Comme « le mobile revient à l'origine à l'issue du  $n$ -ième déplacement » est l'événement  $[S_n = 0]$ , on a

$$\bar{F} = \{[S_n = 0] : \text{i.s.}\}.$$

Or

$$\mathbb{P}([S_n = 0]) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \binom{n}{n/2} p^{n/2} q^{n/2} & \text{sinon} \end{cases}$$

puisqu'il faut exactement  $n/2$  succès (déplacements positifs) et  $n/2$  échecs pour revenir à l'origine, et les déplacements étant indépendants, le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

En notant  $n = 2k$  lorsque  $n$  est pair, la formule de Stirling conduit à

$$\mathbb{P}([S_{2k} = 0]) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} (4pq)^k.$$

Or  $0 \leq 4pq \leq 4(p(1-p)) \leq 4\left(-\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \leq 1 - 4\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 < 1$ , donc

$$\mathbb{P}([S_{2k} = 0]) = o((4pq)^k)$$

où la série géométrique de raison  $4pq$  est convergente.

Par domination, la série  $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}([S_{2k} = 0])$  converge, et comme pour tout  $k$  de

$\mathbb{N}$   $\mathbb{P}([S_{2k+1} = 0]) = 0$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}([S_n = 0])$  converge.

Le premier lemme de Borel-Cantelli assure alors que

$$\mathbb{P}(\{[S_n = 0] : \text{i.s.}\}) = 0.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(\overline{\{[S_n = 0] : \text{i.s.}\}}) = 1.$$

Il est presque certain que le mobile ne repassera qu'un nombre fini de fois par l'origine, certainement pour finir par s'échapper définitivement du côté le plus probable...  $+\infty$  si  $p > 1/2$  et  $-\infty$  si  $p < 1/2$ ...

**Exercice 23**

*Loi forte des grands nombres*

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes toutes de même loi possédant une espérance  $\mathbb{E}(X_i)$  nulle et admettant un moment d'ordre 4 fini noté  $m_4 \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}(X_i^4)$ . On note de plus  $\sigma^2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}(X_i^2)$ .

On pose  $S_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^n X_i$ .

1. Montrer que  $\mathbb{E}(S_n^4) = nm_4 + 3n(n-1)\sigma^4$ .
2. Justifier à l'aide de l'inégalité de Markov que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{m_4}{\varepsilon^4 n^3} + \frac{3\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2}.$$

3. Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon : \text{i.s.}\right\}\right) = 0$ .

4. Dans cette question, on souhaite démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right) = 1.$$

Autrement dit, on est presque-certain que  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Ce résultat s'appelle la « loi forte des grands nombres », ici sous l'hypothèse d'existence d'un moment d'ordre 4.

On convient d'écrire «  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} \neq 0$  » pour signifier que  $\left(\frac{S_n}{n}\right)$  n'a pas de limite ou a une limite distincte de 0.

a) Justifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} \neq 0 \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n \geq N, \left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \frac{1}{k}$$

b) On note L l'événement  $\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} \neq 0\right]$ .

$$\text{Justifier que } L \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \frac{1}{k} : \text{i.s.}\right\}.$$

c) En déduire que  $\mathbb{P}(L) = 0$  et conclure.

5. *Application aux marches aléatoires inévitables*

Soit  $p \in ]0; 1[ \setminus \{1/2\}$ ,  $q = 1 - p$  et  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes prenant la valeur 1 avec une probabilité  $p$  et  $-1$  avec une probabilité  $q$ .

On pose  $T_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^n Y_i$ .

a) En étudiant les variables  $X_i = Y_i - p + q$ , montrer que

$$\mathbb{P}\left(T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n(p - q)\right) = 1.$$

b) Interpréter ce résultat pour une marche aléatoire.

**Solution (Ex.23 – Loi forte des grands nombres)**

1. On développe  $S_n^4 = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} X_i X_j X_k X_l$  et par linéarité

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} \mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l).$$

Maintenant, par indépendance, on a que  $\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) = 0$ , sauf si

•  $i = j = k = l$ , auquel cas on a  $\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) = \mathbb{E}((X_i)^4) = m_4$ ,

•  $i = j, j \neq k, k = l$  (et tous les cas semblables :  $i = k, k \neq j, j = l$ , ou  $i = l, l \neq j, j = k$ ), auquel cas on a  $\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) = (?^2)^2 = \sigma^4$ .

Au final, on a donc  $\mathbb{E}(S_n^4) = nm_4 + 3n(n-1)\sigma^4$  car il y a  $n$  cas du premier type et  $3n(n-1)$  cas du second type (je choisis la valeur pour le couple contenant  $i$ , soit  $n$  choix, puis celle pour l'autre couple, soit  $n-1$  choix, et il y a à chaque fois 3 jeux de couples possibles).

2. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par l'inégalité de Markov appliquée à  $S_n^4 \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(S_n^4 \geq n^4 \varepsilon^4) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{n^4 \varepsilon^4} \leq \frac{m_4}{\varepsilon^4 n^3} + \frac{3\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2}.$$

Comme  $\left[ \left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon \right] = [|S_n| \geq n\varepsilon] = [S_n^4 \geq n^4 \varepsilon^4]$ , on a la majoration voulue.

3. Posons pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $A_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \left[ \left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon \right]$ .

Par la majoration précédente, la série  $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$  converge par majoration

de terme général positif, car les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  convergent pour  $\alpha \in \{2, 3\}$ .

Par le premier lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \left[ \left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon \right] : \text{i.s.} \right\}\right) = \mathbb{P}(\{A_n : \text{i.s.}\}) = 0$$

4. a) Par définition de la limite, on peut écrire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, \left| \frac{S_n}{n} \right| < \frac{1}{k}.$$

Il n'y a qu'à nier cette proposition pour obtenir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} \neq 0 \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n \geq N, \left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \frac{1}{k}$$

b)  $\exists k \in \mathbb{N}^*, \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n \geq N, \left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \frac{1}{k}$  peut aussi s'exprimer

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \text{ pour une infinité d'entiers } n, \text{ on a : } \left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \frac{1}{k}.$$

$$\text{D'où : } L \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left\{ \left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \frac{1}{k} : \text{i.s.} \right\}.$$

c) La réunion étant dénombrable, par sous-additivité on a

$$\mathbb{P}(L) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ \left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \frac{1}{k} : \text{i.s.} \right\}\right).$$

Et par la question précédente où  $\varepsilon = \frac{1}{k}$ ,  $\mathbb{P}(L) \leq 0$ , donc  $\mathbb{P}(L) = 0$ . Donc

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right) = \mathbb{P}(\bar{L}) = 1.$$

5. *Application aux marches aléatoires inéquitables*

Soit  $p \in ]0; 1[ \setminus \{1/2\}$ ,  $q = 1 - p$  et  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes prenant la valeur 1 avec une probabilité  $p$  et  $-1$  avec une probabilité  $q$ .

On pose  $T_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^n Y_i$ .

a) • Comme pour tout  $i$   $\mathbb{E}(Y_i) = p \times 1 + q \times (-1) = p - q$ , les variables  $X_i$  sont centrées, *i.e.* d'espérance nulle.

• Les  $X_i$  sont comme les  $Y_i$  indépendantes et de même loi.

• Les  $X_i$  sont finies (ne pouvant prendre que 2 valeurs), donc possède un moment d'ordre 4.

• On peut donc appliquer la loi forte précédente aux  $X_i$  :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right) = 1$$

où  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

• Or  $T_n = \sum_{i=1}^n (Y_i - p + q) = S_n - n(p - q)$ , donc

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \iff \frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} p - q \iff T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n(p - q).$$

• Ainsi

$$\mathbb{P}\left(T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n(p - q)\right) = 1.$$

b) Quand  $n$  devient grand, on a toutes les chances de trouver le mobile au voisinage de  $n(p - q)$ , donc vers  $+\infty$  si  $p > 1/2$  et  $-\infty$  si  $p < 1/2$ .



## Chapitre 9

# Intervalles de confiance et grandes déviations de BERNSTEIN

*C'est pas juste ! Ça fait dix fois que je lance le dé et j'ai toujours pas de 6 !*

*Dans ce problème, on étudie la probabilité que, dans un schéma de Bernoulli de probabilité de succès  $p$ , la fréquence des succès s'écartent sensiblement de  $p$ . Si la loi faible des grands nombres nous assure que, plus le nombre d'épreuves est « grand », moins la fréquence des succès a de chances de s'écartier de  $p$ , comment peut-on quantifier plus précisément la probabilité que cette fréquence dévie sensiblement de  $p$  ? C'est l'objet de l'estimation des grandes déviations de Serge BERNSTEIN<sup>1</sup>, estimation qui peut déboucher sur des tests statistiques d'hypothèse et des intervalles de fluctuation.*

Dans tout ce paragraphe,  $n$  désigne un entier naturel non nul,  $p$  un réel de  $]0; 1[$  et  $q \stackrel{\text{déf.}}{=} 1 - p$  de sorte que  $p + q = 1$ .

On réalise une succession de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes, toutes de probabilité de succès  $p$ , et on note  $S_n$  le nombre total de succès à l'issue de ces  $n$  expériences.

Dans les applications des résultats théoriques, on s'intéressera au cas de  $n$  lancers successifs d'une pièce dont la probabilité d'obtention de « pile » est  $p$ ,  $S_n$  désignant alors le nombre de « piles » obtenus au cours des  $n$  lancers.

---

1. In *Sur une modification de l'inégalité de Tchebychev*, 1924

**Exercice 24**

*Tests d'hypothèse et intervalles de fluctuation par Bienaymé-Tchebychev*

1. Pour tout  $i$  de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $X_i$  la variable indicatrice de de l'événement « la  $i$ -ème épreuve est un succès ».
 

« la  $i$ -ème épreuve est un succès ».

 Vérifier que l'on peut appliquer la loi faible des grands nombres à la suite de variables  $(X_i)$  et indiquer la conclusion de cette application.
2. a) Justifier que :
 
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$
 b) Dans le cas  $p = q = 1/2$ , justifier que :
 
$$\mathbb{P} \left( \frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \right) = \mathbb{P} \left( \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2} - \varepsilon \right)$$
 et majorer cette probabilité en fonction de  $n$  et de  $\varepsilon$ .
3. *Application à un test d'hypothèse.*
  - a) On suppose qu'une pièce amène « pile » avec une probabilité  $p = 1/2$ . On lance 1000 fois la pièce pour tester cette hypothèse. À l'aide de 2.a) donner un intervalle  $[a; b]$  tel que
 
$$\mathbb{P}(S_{1000} \in [a; b]) \geq 95\%.$$
 On dit que  $[a; b]$  est un *intervalle de fluctuation* de  $S_{1000}$  au *niveau de confiance* de 95%.
  - b) On note  $\Sigma_{1000}$  le nombre effectif de « piles » obtenus lors de ces 1000 lancers. On dit qu'on *accepte l'hypothèse*  $p = 1/2$ , *i.e.* « la pièce est juste », *au risque* 5% (sous-entendu “risque de se tromper”) si  $\Sigma_{1000} \in [a; b]$ . Pour quelles valeurs de  $\Sigma_{1000}$  rejette-t-on l'hypothèse “ $p = 1/2$ ” ?
4. Reprendre la question précédente avec un niveau de confiance de 99% (donc un risque de 1%).
5. Quelle majoration obtient-on en 2.a) pour  $p = 1/2$ ,  $n = 25$  et  $\varepsilon = 0,1$ ? Et avec  $n < 25$ ? Commentaire?

**Solution** (Ex.24 – *Tests d'hypothèse et intervalles de fluctuation par Bienaymé-Tchev*)

1. Les  $X_i$  sont indépendantes, toutes de loi  $\mathcal{B}(p)$  donc possédant une variance, donc la loi faible des grands nombres s'applique.
 

L'espérance commune des  $X_i$  est  $p$ . Et comme  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , la conclusion de la loi faible des grands nombres est :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Qualitativement, lorsque  $n$  devient grand, la probabilité que la fréquence de succès  $\frac{S_n}{n}$  s'éloigne de  $p$  devient très faible.

2. a) Comme  $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$ ,  $S_n$  possède une variance, donc  $F_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{S_n}{n}$  aussi. On peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à  $F_n$ , avec  $\mathbb{E}(F_n) = \mathbb{E} \left( \frac{S_n}{n} \right) = p$  et  $\mathbb{V}(F_n) = \mathbb{V} \left( \frac{S_n}{n} \right) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

- b) Notons  $E_n = n - S_n$  le nombre d'échecs. Dans le cas  $p = q = 1/2$ ,  $E_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; q)$  i.e.  $\mathcal{B}(n; 1/2)$ , c'est-à-dire la même loi que  $S_n$ .

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( S_n \geq \frac{n}{2} + n\varepsilon \right) &= \mathbb{P} \left( E_n \geq \frac{n}{2} + n\varepsilon \right) = \mathbb{P} \left( n - S_n \geq \frac{n}{2} + n\varepsilon \right) \\ &= \mathbb{P} \left( S_n \leq \frac{n}{2} - n\varepsilon \right) \end{aligned}$$

ce qui justifie

$$\mathbb{P} \left( \frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \right) = \mathbb{P} \left( \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2} - \varepsilon \right)$$

Or  $\left[ \frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \right] \cup \left[ \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2} - \varepsilon \right] = \left[ \left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right]$  avec une réunion de deux événements incompatibles.

Et par la question précédente  $\mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ , donc

$$2\mathbb{P} \left( \frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

et finalement

$$\mathbb{P} \left( \frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \right) \leq \frac{1}{8n\varepsilon^2}.$$

### 3. Application à un test d'hypothèse.

- a) On suppose qu'une pièce amène « pile » avec une probabilité  $p = 1/2$ . On lance 1000 fois la pièce pour tester cette hypothèse.

À l'aide de 2.a) donner un intervalle  $[a; b]$  tel que

$$\mathbb{P}(S_{1000} \in [a; b]) \geq 95\%.$$

On dit que  $[a; b]$  est un *intervalle de fluctuation* de  $S_{1000}$  au *niveau de confiance* de 95%.

En passant à l'événement contraire, 2a) peut s'écrire

$$\mathbb{P}(np - n\varepsilon < S_n < np + n\varepsilon) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

i.e. avec  $a = np - n\varepsilon$  et  $b = np + n\varepsilon$ ,

$$\mathbb{P}(S_n \in [a; b]) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

On veut  $1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = c$  avec  $c = 95\%$  :

$$1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = c \iff \varepsilon = \sqrt{\frac{pq}{n(1-c)}}.$$

Avec  $n = 1000$ ,  $p = q = 1/2$  et  $c = 0,95$ , on trouve  $\varepsilon \simeq 0,0707$  et

$$\mathbb{P}(S_{1000} \in [430; 570]) \geq 95\%.$$

**b)** Pour  $\Sigma_{1000} \leq 429$  ou  $\Sigma_{1000} \geq 571$ , on rejette l'hypothèse que la pièce soit juste, au risque de se tromper de 5%.

**4.** Avec  $n = 1000$ ,  $p = q = 1/2$  et  $c = 0,95$ , on trouve  $\varepsilon \simeq 0,158$  et

$$\mathbb{P}(S_{1000} \in [342; 658]) \geq 99\%.$$

Pour  $\Sigma_{1000} \leq 341$  ou  $\Sigma_{1000} \geq 659$ , on rejette l'hypothèse que la pièce soit juste, au risque de se tromper de 1%.

**5.** Pour  $p = 1/2$ ,  $n = 25$  et  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1$  donc on majore la probabilité par 1, ce qui n'est pas fameux.

Et avec  $n < 25$ , on majore par un nombre plus grand que 1... bof

### Exercice 25

*Estimation des grandes déviations, application à la fluctuation*

On peut observer que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est établie pour toute variable aléatoire possédant une variance, et ne tient pas compte de la loi de la variable. Or ici nous connaissons la loi de  $S_n$ . Cette connaissance permet d'établir un résultat beaucoup plus précis, dû à Serge BERNSTEIN.

Dans tout cet exercice,  $\varepsilon$  désigne un réel tel que

$$0 < \varepsilon < \min(p, q) \text{ de sorte que } 0 < p \pm \varepsilon < 1.$$

**1.** Rappeler la loi de  $S_n$ .

**2. a)** Soit  $X$  une variable discrète à valeurs positives possédant une espérance finie.

Justifier que  $\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}(X)$ .

**b)** Soit  $t > 0$ . En remarquant que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) = \mathbb{P}(e^{t(S_n - np - n\varepsilon)} \geq 1),$$

montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) \leq e^{-n(t(p+\varepsilon) - \ln(q+pe^t))}.$$

**c)** Montrer que le maximum de  $f : t \mapsto t(p + \varepsilon) - \ln(q + pe^t)$  sur  $\mathbb{R}_+$  vaut

$$h_+(p, \varepsilon) \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} (p + \varepsilon) \ln \frac{p + \varepsilon}{p} + (q - \varepsilon) \ln \frac{q - \varepsilon}{q},$$

et justifier que  $h_+(p, \varepsilon)$  est strictement positif.

d) En d\u00e9duire les in\u00e9galit\u00e9s suivantes, dites des grandes d\u00e9viations<sup>2</sup> :

i -  $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) \leq e^{-nh_+(p, \varepsilon)},$

ii -  $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon\right) \leq e^{-nh_+(p, -\varepsilon)},$

(on pourra chercher un argument permettant d'utiliser le r\u00e9sultat pr\u00e9c\u00e9dent sans refaire de calcul)

iii -  $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nh_+(p, \varepsilon)} + e^{-nh_+(p, -\varepsilon)},$

iv - pour  $p = 1/2,$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{2}{(1 + 2\varepsilon)^{(n+n\varepsilon)/2}(1 - 2\varepsilon)^{(n-n\varepsilon)/2}}.$$

Ces in\u00e9galit\u00e9s montrent que la d\u00e9croissance des probabilit\u00e9s de fortes d\u00e9viations est au moins exponentielle.

3. *Application aux tests d'hypoth\u00e8se et intervalles de fluctuation* -

a) \u00c9crire en Python une fonction `fluctuation(n, p, c)` qui, connaissant  $n$ ,  $p$  et le seuil de confiance  $c$ , calcule un intervalle de fluctuation  $[a; b]$  tel que

$$\mathbb{P}(S_n \in [a; b]) \geq c$$

en s'appuyant sur l'in\u00e9galit\u00e9 de la question 2.d)iii

b) Reprendre les questions 3. et 4. du premier exercice en utilisant les in\u00e9galit\u00e9s des grandes d\u00e9viations au lieu de l'in\u00e9galit\u00e9 de Bienaym\u00e9-Tchebychev. Comparer et commenter les r\u00e9sultats obtenus par les in\u00e9galit\u00e9s des grandes d\u00e9viations \u00e0 ceux obtenus par l'in\u00e9galit\u00e9 de Bienaym\u00e9-Tchebychev.

**Solution (Ex.25 - Estimation des grandes d\u00e9viations, application \u00e0 la fluctuation)**

1.  $S_n \leftrightarrow \mathcal{B}(n; p).$

2. a) Comme  $\forall x \in X(\Omega), x \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x]) \geq \sum_{x \in X(\Omega), x \geq 1} x \mathbb{P}([X = x]) \\ &\geq \sum_{x \in X(\Omega), x \geq 1} \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X \geq 1]). \end{aligned}$$

b)  $\left[\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right] = [S_n - np - n\varepsilon \geq 0] = [t(S_n - np - n\varepsilon) \geq 0]$

---

2. Ou des grands \u00e9cart.

$$= [e^{t(S_n - np - n\varepsilon)} \geq 1].$$

Donc  $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) = [e^{t(S_n - np - n\varepsilon)} \geq 1] \leq \mathbb{E}(e^{t(S_n - np - n\varepsilon)}).$

Par linéarité :

$$\mathbb{E}(e^{t(S_n - np - n\varepsilon)}) = e^{-tn(p+\varepsilon)}\mathbb{E}(e^{tS_n})$$

Par transfert :

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{tk} p^k q^{n-k} = (pe^t + q)^n$$

On a bien :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) \leq e^{-n(t(p+\varepsilon) - \ln(q+pe^t))}.$$

- c) L'étude de  $f$  révèle que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \varepsilon > 0$  et  $f'$  s'annule uniquement au point  $t_0 = \ln \frac{(1-p)(p+\varepsilon)}{p(1-p-\varepsilon)}$ .

Le maximum de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$  vaut  $f(t_0) = (p+\varepsilon) \ln \frac{p+\varepsilon}{p} + (q-\varepsilon) \ln \frac{q-\varepsilon}{q}$ .

Comme  $f$  est nulle en 0 et strictement croissante au voisinage de  $0^+$ , ce maximum est strictement positif.

- d) i – En prenant  $t = t_0 > 0$  dans l'inégalité de 2.b), on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) \leq e^{-nh_+(p,\varepsilon)},$$

- ii – En appliquant l'inégalité précédente à  $E_n = n - S_n$  (nombre d'échecs) de loi  $\mathcal{B}(n; q)$ ,

$$\mathbb{P}\left(\frac{E_n}{n} \geq q + \varepsilon\right) \leq e^{-nh_+(q,\varepsilon)},$$

Mais  $\left[\frac{E_n}{n} \geq q + \varepsilon\right] = \left[\frac{n - S_n}{n} \geq q + \varepsilon\right] = \left[\frac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon\right]$ , et

$$h_+(q, \varepsilon) = (p + \varepsilon) \ln \frac{p + \varepsilon}{p} + (q - \varepsilon) \ln \frac{q - \varepsilon}{q} = h_+(p, -\varepsilon)$$

car  $\varepsilon < \min(p, q)$ . Par conséquent :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon\right) \leq e^{-nh_+(p, -\varepsilon)},$$

- iii – Comme  $\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right]$  est la réunion disjointe des deux événements dont on vient de calculer la probabilité, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nh_+(p,\varepsilon)} + e^{-nh_+(p,-\varepsilon)},$$

- iv – En substituant, avec  $p = 1/2$ , on a directement

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{2}{(1+2\varepsilon)^{(n+n\varepsilon)/2}(1-2\varepsilon)^{(n-n\varepsilon)/2}}.$$

Ces inégalités montrent que la décroissance des probabilités de fortes déviations est au moins exponentielle.

**3. Application aux tests d'hypothèse et intervalles de fluctuation -**

a) La question 2.d)iii fournit

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - (e^{-nh_+(p,\varepsilon)} + e^{-nh_+(p,-\varepsilon)}),$$

$$\mathbb{P}\left(np - n\varepsilon \leq \frac{S_n}{n} - p \leq np + n\varepsilon\right) \geq 1 - e^{-nh_+(p,\varepsilon)} - e^{-nh_+(p,-\varepsilon)}.$$

Si on détermine  $\varepsilon$  tel que  $1 - e^{-nh_+(p,\varepsilon)} - e^{-nh_+(p,-\varepsilon)} \geq c$ , alors

$$[a; b] = [np - n\varepsilon; np + n\varepsilon]$$

convient.

On peut partir de  $\varepsilon = 0$  puis faire croître  $\varepsilon$  en se donnant un pas de  $\frac{1}{n}$ , ce qui permettra d'obtenir une amplitude de l'intervalle progressant de 1 en 1, puisque l'amplitude est  $2n\varepsilon$ .

Proposition :

def hplus(p,e) :

```
return (p+e)*np.log((p+e)/p)+(1-p-e)*np.log((1-p-e)/(1-p))
```

def fluctuation(n,p,c) :

```
e = 0
```

```
while (1-np.exp(-n*hplus(p,e))-np.exp(-n*hplus(p,-e))) < c:
    e +=1/(2*n)
```

```
return n*(p-e),n*(p+e)
```

b) • Avec  $n = 1000$ ,  $p = 1/2$  et  $c = 95\%$ , on obtient

$$\mathbb{P}(457 \leq S_{1000} \leq 543) \geq 95\%$$

• Avec  $n = 1000$ ,  $p = 1/2$  et  $c = 99\%$ , on obtient

$$\mathbb{P}(448,5 \leq S_{1000} \leq 551,5) \geq 99\%$$

Comme  $S_n$  est à valeurs entières, on peut annoncer

$$\mathbb{P}(449 \leq S_{1000} \leq 551) \geq 99\%$$

• On constate que les intervalles que l'on peut assurer sont nettement plus serrés que ceux fournis en utilisant uniquement l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Les inégalités de Bernstein exploitent la loi de  $S_n$ , tandis que celle de Bienaymé-Tchebychev est très générale, valable pour toute loi, donc du coup moins fine.



## Chapitre 10

# Incertitude ou entropie de SHANNON d'une variable aléatoire

*En 1948, Claude Shannon, ingénieur en génie électrique aux Laboratoires Bell, formalisa mathématiquement la nature statistique de « l'information perdue » dans les signaux des lignes téléphoniques. Pour ce faire, il développa le concept général d'entropie de l'information, fondamental dans la théorie de l'information, ce qui lui permit d'évaluer la quantité d'information maximale qu'on pouvait transmettre dans un canal donné.*

**Définition – Incertitude ou entropie de SHANNON** Pour tout réel strictement positif  $x$ , on désigne par  $\log_2(x)$  le logarithme de base 2 de  $x$  :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad \log_2(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

On appelle distribution de probabilités toute suite finie de nombres strictement positifs dont la somme vaut 1.

Pour tout variable aléatoire  $X$  de support  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$  et de loi la distribution de probabilités  $(p_1, \dots, p_n)$  (où, pour tout  $i$  de  $[[1; n]]$ ,  $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ ), on appelle *incertitude* ou *entropie*<sup>1</sup> de  $X$ , notée  $\mathcal{H}(X)$ , le nombre

---

1. Cette dernière appellation provient de la coïncidence entre l'incertitude de Shannon introduite ici et l'entropie définie à la fin du XIX-ème siècle par Boltzmann en physique statistique.

$$\mathcal{H}(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i).$$

On notera que  $\mathcal{H}(X)$  dépend uniquement de la distribution de probabilités  $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$  et non du support  $X(\Omega)$  de  $X$ .

**Exercice 26**

*Quelques exemples usuels*

1. a) Soit  $X$  une variable aléatoire constante. Que vaut  $\mathcal{H}(X)$  ?  
 b) Pour  $p$  dans  $]0; 1[$ ,  $X_p$  désigne une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .  
 Étudier et représenter graphiquement la fonction  $p \mapsto \mathcal{H}(X_p)$ .  
 Justifier pour cet exemple l'appellation "incertitude" pour  $\mathcal{H}(X_p)$ .
2. On suppose que  $X$  suit une loi uniforme sur un ensemble de cardinal  $n$ . Que vaut  $\mathcal{H}(X)$  ?

**Solution (Ex.26 – Quelques exemples usuels)**

1. a) Pour  $X$  variable aléatoire constante,  $n = 1$  et  $p_1 = 1$ . Donc  $\mathcal{H}(X) = -1 \times \ln(1) = 0$ .

b) Soit  $f : ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \mathcal{H}(X_p)$ .

$\forall p \in ]0; 1[, f(p) = -p \ln(p) - (1-p) \ln(1-p)$  et  $f'(p) = \frac{-1}{\ln(2)} (\ln(p) - \ln(1-p))$ .

$f'(p) > 0 \iff \ln(p) < \ln(1-p) \iff p < 1-p \iff p < \frac{1}{2}$ .

$p$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(p)$	+	0	-
$f(p)$	0	1	0

$\mathcal{H}(X_p)$  est maximale lorsque  $p = 1/2$ , autrement dit quand les deux valeurs de  $X$  sont équiprobables, tandis qu'elle diminue lorsqu'une des

deux issues devient plus probable, pour tendre vers 0 lorsqu'une des deux issues devient certaine, d'où son appellation d'incertitude.

2. On a alors :  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $p_i = \frac{1}{n}$  et  $\mathcal{H}(X) = -\log_2(n)$ . Cette valeur coïncide avec celle trouvée en a) où  $n = 1$ , et en b) avec  $n = 2$  lorsque  $p = 1/2$ .
3.  $\mathcal{H}(X_T) = -\sum_{i=1}^6 p_i \log_2(p_i) \simeq 2,10$  et  $\mathcal{H}(X_J) = \log_2(6) \simeq 2,59$ . L'incertitude du dé truqué est plus faible, certaines valeurs étant manifestement plus probables.  $\mathbb{P}(X_T \leq 3) = \frac{7}{8}$  tandis que  $\mathbb{P}(X \geq 4) = \frac{1}{8}$  par exemple.

### Exercice 27

*Inégalité de Gibbs et encadrement de l'incertitude*

1. Montrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $\ln(x) \leq x - 1$ .  
Pour quelle valeur de  $x$  y a-t-il égalité ?
2. On considère deux distributions de probabilités  $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$ .  
Montrer que  $-\sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \geq 0$ , et donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.
3. En déduire l'inégalité de Gibbs :  
si  $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont deux distributions de probabilités, alors

$$-\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \leq -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 q_i$$

avec égalité si, et seulement si,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad p_i = q_i.$$

4. Montrer que, pour tout variable aléatoire  $X$  de support de cardinal  $n$ ,

$$0 \leq \mathcal{H}(X) \leq \log_2(n).$$

Préciser pour quelles lois les bornes 0 et  $\log_2(n)$  sont atteintes.

**Solution** (Ex.27 – *Inégalité de Gibbs et encadrement de l'incertitude*)

1. L'étude de la fonction  $x \mapsto x - 1 - \ln(x)$  sur  $]0; +\infty[$  montre que  $\ln(x) \leq x - 1$  avec égalité si, et seulement si,  $x = 1$ .

C'est aussi une inégalité due à la concavité de la fonction  $\ln$ ,  $y = x - 1$  étant l'équation de la tangente à sa courbe en 1.

$$2. \ln \frac{q_i}{p_i} \leq \frac{q_i}{p_i} - 1 \text{ d'où } \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leq \sum_{i=1}^n (q_i - p_i) \leq \sum_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^n p_i \leq 1 - 1 \leq 0$$

$$\text{d'où } - \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \geq 0.$$

Puisqu'on a sommé  $n$  inégalités, il y a égalité si, et seulement si, il y a égalités pour chacune des  $n$  inégalités, donc si, et seulement si,  $\forall i \in [[1; n]]$ ,  $\frac{q_i}{p_i} = 1$ , *i.e.*  $\forall i \in [[1; n]]$ ,  $q_i = p_i$ .

$$3. \text{ Il suffit d'exploiter } \ln \frac{q_i}{p_i} = \ln q_i - \ln p_i \text{ pour obtenir}$$

$$- \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \leq - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 q_i$$

avec égalité si, et seulement si,

$$\forall i \in [[1; n]], \quad p_i = q_i.$$

$$4. \text{ Soit } X \text{ de distribution } (p_1, \dots, p_n) \text{ et, pour tout } i \in [[1; n]], q_i = \frac{1}{n}.$$

• L'inégalité de Gibbs donne :

$$\mathcal{H}(X) \leq - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(1/n) \leq \log_2(n) \sum_{i=1}^n p_i \leq \log_2(n).$$

Et il y a égalité si, et seulement si,  $\forall i \in [[1; n]]$ ,  $p_i = q_i = \frac{1}{n}$ , donc si  $X$  suit une loi uniforme.

• On a  $\mathcal{H}(X) \geq 0$  car :  $\forall i \in [[1; n]]$ ,  $p_i \log_2(p_i) \leq 0$ .

Si  $\mathcal{H}(X) = 0$ , comme  $\forall i \in [[1; n]]$ ,  $p_i > 0$ , on a :  $\forall i \in [[1; n]] \log_2(p_i) = 0$ , donc  $\forall i \in [[1; n]]$ ,  $p_i = 1$ .

# Chapitre 11

## Fonction caractéristique d'une Variable Aléatoire Réelle

☞[CS-M2 – 2020 – PC – ]

Dans toute cette partie, on se donne un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ .

**Variable aléatoire à valeurs complexes –**

On étend aux variables aléatoires complexes  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  les notions et propriétés liées à l'espérance en posant que  $Z$  est d'espérance finie notée  $\mathbb{E}(Z)$  si, et seulement si,  $\mathcal{R}e(Z)$  et  $\mathcal{I}m(Z)$  sont d'espérance finie. Et dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathcal{R}e(Z)) + i\mathbb{E}(\mathcal{I}m(Z)).$$

Il est équivalent de dire que  $Z$  possède une espérance finie si, et seulement si, la série

$$\sum_{n \geq 0} z_n \mathbb{P}([Z = z_n])$$

est absolument convergente, où  $Z(\Omega) = \{z_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ . Dans ce cas,  $\mathbb{E}(Z)$  est la somme de cette série.

On admet dans la suite que la linéarité, l'inégalité triangulaire et le théorème de transfert demeurent vrais pour les V.A. à valeurs complexes, et que si  $Z$  possède une espérance finie, alors  $\bar{Z}$  possède une espérance finie vérifiant

$$\mathbb{E}(\overline{Z}) = \overline{\mathbb{E}(Z)}.$$

Dans toute la suite, l'expression « posséder une espérance » sous-entendra « posséder une espérance **finie** ».

*La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle discrète est une forme de transformée de Fourier discrète. Elle partage des propriétés analogue à la transformée. D'un autre côté, elle partage des propriétés de la fonction génératrice, mais est plus générale car la fonction génératrice n'est définie que pour les variables dont le support est inclus dans  $\mathbb{N}$ .*

**Exercice 28**

*Définition et exemples*

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle discrète. On appelle **fonction caractéristique de X**, notée  $\phi_X$ , la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}(e^{itX}).$$

1. a) Justifier que  $\phi_X$  est effectivement définie sur  $\mathbb{R}$ , et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , proposer une écriture sommatoire de  $\phi_X(t)$ .  
 b) Montrer que  $\phi_X$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ , et préciser  $\|\phi_X\|_\infty$ .
2. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $Y = aX + b$ . Exprimer  $\phi_Y$  à l'aide de  $\phi_X$ ,  $a$  et  $b$ .
3. Lorsque  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ , quel lien existe-t-il en  $\phi_X$  et la fonction génératrice  $\mathcal{G}_X$  de  $X$  ?
4. Soit  $p \in ]0; 1[$  et  $q = 1 - p$ .  
 a) On suppose que  $n \in \mathbb{N}^*$  et que  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ . Déterminer  $\phi_X$ .  
 b) On suppose que  $X$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ . Déterminer  $\phi_X$ .
5. Soit  $\lambda \in ]0; +\infty[$ . On suppose que  $X$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Déterminer  $\phi_X$ .

**Solution (Ex.28 – Définition et exemples)**

1. a) Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

• Si  $X(\Omega)$  est fini, écrivons  $X(\Omega) = \{x_n, n \in [[1; N]]\}$ .

Alors  $(e^{itX})(\Omega) = \{e^{itx_n}, n \in [[1; N]]\}$  est fini, donc  $e^{itX}$  possède une espérance. Donc  $\phi_X(t)$  existe.

Et par le théorème de transfert,  $\phi_X(t) = \sum_{n=1}^N e^{itx_n} \mathbb{P}([X = x_n])$ .

• Si  $X(\Omega)$  est infini dénombrable, écrivons  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

On a :  $\forall n \in \mathbb{N}, |e^{itx_n} \mathbb{P}([X = x_n])| \leq \mathbb{P}([X = x_n])$ .

Or la série  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}([X = x_n])$  converge (et sa somme vaut 1).

Donc par comparaison, la série  $\sum_{n \geq 0} e^{itx_n} \mathbb{P}([X = x_n])$  est absolument

convergente, donc par le théorème de transfert,  $e^{itX}$  possède une espérance, donc  $\phi_X(t)$  est défini.

• Dans les deux cas,

$$\phi_X(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{itx} \mathbb{P}([X = x]).$$

b) • Avec les notations précédentes, lorsque  $X(\Omega)$  est fini,  $\phi_X$  est la somme des  $N$  fonctions continues  $t \mapsto \mathbb{P}([X = x_n])e^{itx_n}$  ( $1 \leq n \leq N$ ) donc  $\phi_X$  est continue.

• Toujours avec les notations précédentes, lorsque  $X(\Omega)$  est infini dénombrable,  $\phi_X$  est la somme de la série de fonctions continues

$$f_n : t \mapsto \mathbb{P}([X = x_n])e^{itx_n},$$

chacune bornée sur  $\mathbb{R}$ . Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \leq \mathbb{P}([X = x_n])$$

Donc cette série de fonctions converge normalement, donc uniformément, et comme chacune est continue,  $\phi_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

• Par l'inégalité triangulaire,

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\phi_X(t)| \leq \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x])$$

donc  $\|\phi_X\|_\infty \leq 1$ .

De plus,  $\phi_X(0) = \mathbb{E}(1) = 1$ , donc  $\|\phi_X\|_\infty = 1$ .

2. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{it(aX+b)}) \stackrel{\text{lin.}}{=} e^{itb} \mathbb{E}(e^{itaX}) = e^{itb} \phi_X(at).$$

3. Comme pour  $u \in \mathbb{C}$  tel que  $|u| \leq 1$ ,  $\mathcal{G}_X(u) = \mathbb{E}(u^X)$ , on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \mathcal{G}_X(e^{it}).$$

4. a) En s'appuyant sur  $\mathcal{G}_X$  (au programme!) ou en calculant la somme par la formule du binôme,  $\phi_X : t \mapsto (q + pe^{it})^n$ .  
 b) De même, lorsque  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ,  $\phi_X : t \mapsto \frac{p}{1 - qe^{it}}$ .
5. Et pour  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ ,  $\phi_X : t \mapsto \exp(\lambda(e^{it} - 1))$ .

**Exercice 29**

*Périodicité et support*

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle discrète de support  $X(\Omega)$  dénombrable :  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n = \mathbb{P}([X = x_n])$ . On n'exclut pas qu'il puisse exister  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a_n = 0$ , auquel cas l'événement  $[X = x_n]$  est presque-impossible.

1. On suppose que  $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ . Montrer que  $\phi_X$  est périodique.

Dans la suite, pour tous réels  $a$  et  $b$ , on note  $a + b\mathbb{Z}$  l'ensemble

$$a + b\mathbb{Z} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{a + bk, k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. On suppose qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}^*$  tel que  $|\phi_X(t_0)| = 1$ .

a) Montrer qu'il existe un réel  $a$  tel que  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{i(t_0 x_n - t_0 a)} = 1$ .

b) En déduire que  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = 0$ .

c) Montrer finalement que  $\mathbb{P}\left(X \in a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$ .

3. On suppose qu'il existe  $(a, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  tel que  $\mathbb{P}\left(X \in a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$ .

Calculer  $\phi_X(t_0)$  et en déduire  $|\phi_X(t_0)| = 1$ .

**Solution (Ex.29 – Périodicité et support)**

1. On a :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{Z}$ . Donc  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi_X(t + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{i(t+2\pi)x_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{itx_n} e^{i2\pi x_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{itx_n} = \phi_X(t)$$

$\phi_X$  est  $2\pi$ -périodique.

*Remarque* : les trois exemples de la fin de l'exercice précédent était de ce type-là.

2. On suppose qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}^*$  tel que  $|\phi_X(t_0)| = 1$ .

a) Pour tout réel  $a$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{i(t_0 x_n - t_0 a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{it_0 x_n} e^{-it_0 a} = \phi_X(t_0) e^{-it_0 a}.$$

Comme  $|\phi_X(t_0)| = 1$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\phi_X(t_0) = e^{i\alpha}$ . En prenant  $a = \alpha/t_0$ , on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{i(t_0 x_n - t_0 a)} = e^{i(\alpha - t_0 a)} = e^0 = 1.$$

b) On a alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{i(t_0 x_n - t_0 a)} = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ , donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n (1 - e^{i(t_0 x_n - t_0 a)}) = 0$ . Prenons la partie réelle des deux membres :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = 0.$$

c) La somme précédente de termes tous positifs est nulle, donc tous les termes sont nuls.

Soit  $n$  tel que  $p_n \neq 0$ . Alors  $\cos(t_0 x_n - t_0 a) = 1$ , donc il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $t_0 x_n - t_0 a = 2k\pi$ , i.e.  $x_n = a + \frac{2k\pi}{t_0}$ . Donc  $x_n \in a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}$ .

Ainsi  $x_n \notin a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}$  entraîne  $p_n = 0$ . Alors :

$$\mathbb{P}\left(X \notin a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}\right) = \sum_{n \text{ t.q. } x_n \notin a + 2\pi/t_0 \mathbb{Z}} p_n = \sum_{n \text{ t.q. } x_n \notin a + 2\pi/t_0 \mathbb{Z}} 0 = 0.$$

$$\text{Et : } \mathbb{P}\left(X \in a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}\right) = 1 - 0 = 1.$$

3.  $\mathbb{P}\left(X \in a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}\right) = 1$  entraîne que si  $x_n \notin a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}$ , alors  $p_n = 0$ .

$$\phi_X(t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{it_0 x_n} = \underbrace{\sum_{n \text{ t.q. } x_n \notin a + 2\pi/t_0 \mathbb{Z}} p_n e^{it_0 x_n}}_{=0 \text{ car } p_n=0} + \sum_{n \text{ t.q. } x_n \in a + 2\pi/t_0 \mathbb{Z}} p_n \underbrace{e^{it_0 x_n}}_{=e^{it_0 a}}$$

$$\phi_X(t_0) = e^{it_0 a} \left( \sum_{n \text{ t.q. } x_n \in a + 2\pi/t_0 \mathbb{Z}} p_n \right) = e^{it_0 a} \mathbb{P}\left(X \in a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}\right) = e^{it_0 a}.$$

Et par conséquent :  $|\phi_X(t_0)| = 1$ .

**Exercice 30**

*Développement en série entière de  $\phi_X$*

1. Dans cette question, on suppose que  $X$  est une variable aléatoire réelle discrète de support  $X(\Omega)$  fini

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in \llbracket 1; N \rrbracket\}.$$

On pose pour tout  $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ,  $p_n = \mathbb{P}([X = x_n])$ .

- a) Justifier que  $\phi_X$  est de classe  $\mathcal{C}$  sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}(X^n).$$

- b) Montrer que  $\phi_X$  est développable en série entière de rayon infini et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n).$$

2. Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle discrète de support  $X(\Omega)$  dénombrable :  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n = \mathbb{P}([X = x_n])$ .

On suppose de plus que  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et qu'il existe une constante réel  $R$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(|X|^n) = \mathcal{O}\left(\frac{n^n}{R^n}\right).$$

- a) Établir que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| e^{iy} - \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leq \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- b) En majorant  $\left| \phi_X(t) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n) \right|$ , montrer que

$$\forall t \in \left[-\frac{R}{e}; \frac{R}{e}\right], \quad \phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n).$$

- c) En déduire la classe de dérivabilité de  $\phi_X$  sur  $[-R/e; R/e]$ , et exprimer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $\mathbb{E}(X^n)$  à l'aide des dérivées de  $\phi_X$ .

**Solution (Ex.30 – Développement en série entière de  $\phi_X$ )**

1. a) •  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{iXt}) \stackrel{\text{transfert}}{=} \sum_{k=1}^N p_k e^{ix_k t}$ , donc  $\phi_X$  est la somme de

$N$  fonctions exponentielles de classe  $\mathcal{C}$  donc est  $\mathcal{C}$  sur  $\mathbb{R}$ .

•  $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^N p_k (ix_k)^n e^{ix_k t}$  donc

$$\phi_X^{(n)}(0) = i^n \sum_{k=1}^N p_k x_k^n = i^n \mathbb{E}(X^n).$$

b) Développons en série entière les exponentielles :  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=1}^N \left( p_k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix_k t)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{(it)^n}{n!} \sum_{k=1}^N p_k x_k^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n)$$

par linéarité des sommes finies de séries convergentes.

Donc  $\phi_X$  est développable en série entière de rayon infini et

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n \mathbb{E}(X^n)}{n!} t^n.$$

Bien évidemment, on retrouve la série de Taylor puisque  $a_n = \frac{\phi_X^{(n)}(0)}{n!}$ .

2. a) Établir que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| e^{iy} - \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leq \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Il s'agit de l'INÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE que l'on démontre à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $y \in \mathbb{R}$ .  $f : t \mapsto \exp(it)$  est de classe  $\mathcal{C}$  donc  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}$ . Par la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\begin{aligned} \left| e^{iy} - \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} \right| &\stackrel{\text{F.T.R.I.}}{=} \left| \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \\ &\stackrel{\text{I.T.}}{\leq} \left| \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} i^{n+1} e^{it} dt \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{n!} \int_0^y |y-t|^n dt \right| \\ &\stackrel{u=y-t}{\leq} \left| \frac{1}{n!} \int_0^y |u|^n dt \right| \end{aligned}$$

$$\text{Or } \int_0^y |u|^n dt = \pm \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\text{Donc } \left| e^{iy} - \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leq \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}$$

b) Soit  $t \in \left[ -\frac{\mathbb{R}}{e}; \frac{\mathbb{R}}{e} \right]$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\left| \phi_X(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}(X^k) \right| \stackrel{\text{lin.}}{=} \left| \mathbb{E} \left( e^{iXt} - \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} X^k \right) \right|$$

$$\stackrel{\text{I.T}}{\leq} \mathbb{E} \left( \left| e^{iXt} - \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} X^k \right| \right)$$

$$\stackrel{\text{a)}}{\leq} \mathbb{E} \left( \frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{\leq} |t|^{n+1} \mathbb{E} \left( \frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

Or  $|t|^{n+1} \mathbb{E} \left( \frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!} \right) = \mathcal{O} \left( \frac{|t|^{n+1} (n+1)^{n+1}}{(n+1)! R^{n+1}} \right)$ , et par l'équivalent de Stirling, on a :

$$\frac{|t|^n n^n}{n! R^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|t|^n \times n^n}{\sqrt{2\pi n} \times n^n / e^n \times R^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \frac{|t|e}{R} \right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Or :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left| \frac{te}{R} \right|^n \leq 1$  car  $|t| \leq \frac{R}{e}$ , donc  $\left( \frac{|t|e}{R} \right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

$|t|^{n+1} \mathbb{E} \left( \frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , et par encadrement, on a bien :

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n).$$

c) Puisque  $\phi_X$  est développable en série entière de rayon non nul,  $\phi_X$  est de classe  $\mathcal{C}$  sur  $[-R/e; R/e]$ .

Par la formule de Taylor, les coefficients de la série entière sont  $\frac{\varphi_X^{(n)}(0)}{n!}$ , d'où par unicité de ces coefficients,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X^n) = i^n \varphi_X^{(n)}(0).$$

**Exercice 31**

*Caractérisation de la loi par  $\phi_X$*

Soit  $X$  une variable aléatoire et  $m \in \mathbb{R}$ .

Pour tout  $T \in ]0; +\infty[$ , on pose  $V_m(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \phi_X(t) e^{-imt} dt$ .

1. *sinus cardinal*

On définit la fonction « *sinus cardinal* » noté *sinc* par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

- a) Montrer que sinc est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
 b) Montrer que  $\|\text{sinc}\|_\infty = 1$ .  
 2. Dans cette question, on suppose que  $X$  est une variable aléatoire réelle discrète de support  $X(\Omega)$  fini

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in \llbracket 1; N \rrbracket\}.$$

On pose pour tout  $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ,  $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$ .

- a) Montrer que, pour tout  $T \in ]0; +\infty[$ ,

$$V_m(T) = \sum_{n=1}^N \text{sinc}(T(x_n - m))p_n.$$

- b) En déduire que  $V_m(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = m)$ .

3. Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle discrète de support  $X(\Omega)$  dénombrable :  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $h \in ]0; +\infty[$ , on pose

$$g_n(h) = \text{sinc}\left(\frac{x_n - m}{h}\right)p_n.$$

- a) Montrer que pour tout  $T \in ]0; +\infty[$ ,  $V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right)$ .

- b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_n$  se prolonge en une fonction  $\tilde{g}_n$  définie et continue sur  $[0; +\infty[$ .

- c) Montrer que la fonction  $G = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n$  est définie et continue sur  $[0; +\infty[$ .

- d) Établir que  $V_m(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = m)$ .

4. Montrer que si  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux variables aléatoires telles que  $\phi_X = \phi_Y$ , alors  $X$  et  $Y$  suivent la même loi.

### Solution (Ex.31 – Caractérisation de la loi par $\phi_X$ )

1. a) • Sur  $\mathbb{R}^*$ , sinc est un quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc est continue.  
 •  $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$  donc  $\text{sinc}(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 = \text{sinc}(0)$  donc sinc est aussi continue en 0.  
 b) • Notons que sinc est paire.  
 •  $\forall t \geq 1, |\text{sinc}(t)| \leq \frac{1}{t} \leq 1$  donc  $\|\text{sinc}\|_{\infty, [1; +\infty[} \leq 1$ .  
 • sinc est dérivable que  $]0; 1]$  avec

$$\text{sinc}'(t) = \frac{\cos(t)t - \sin(t)}{t^2}.$$

Or  $\forall t \in ]0; 1]$ ,  $\cos(t)t \leq \sin(t) \iff \tan(t) \geq t$

L'étude de  $f : t \mapsto \tan(t) - t$  sur  $]0; 1]$  montre que  $f$  est croissante ( $f' = \tan^2 \geq 0$ ) et nulle en 0, donc  $f$  est positive sur  $]0; 1]$ .

Donc  $\text{sinc}'$  est négative sur  $]0; 1]$ ,  $\text{sinc}$  étant continue sur  $[0; 1]$ , son maximum est  $\text{sinc}(0) = 1$  et son minimum  $\text{sinc}(1) = \sin(1) > 0$ . Donc  $\|\text{sinc}\|_{\infty, [0; 1]} = 1$ .

• Bilan :  $\|\text{sinc}\|_{\infty, [0; +\infty[} = 1$ , et par parité  $\|\text{sinc}\|_{\infty} = 1$ .

**2. a)** Soit  $T \in ]0; +\infty[$ .

$$\begin{aligned} V_m(T) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \phi_X(t) e^{-imt} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{n=1}^N p_n e^{itx_n} e^{-imt} dt \\ &= \sum_{n=1}^N \left( p_n \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{it(x_n - m)} dt \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \left( p_n \frac{1}{2T} \left[ \frac{e^{iT(x_n - m)} - e^{-iT(x_n - m)}}{x_n - m} \right]_{-T}^T \right) \end{aligned}$$

• Si  $x_n \neq m$ , alors

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{it(x_n - m)} dt = \frac{1}{2T} \left[ \frac{e^{it(x_n - m)}}{x_n - m} \right]_{-T}^T = \frac{1}{2T} \left[ \frac{e^{iT(x_n - m)} - e^{-iT(x_n - m)}}{x_n - m} \right]_{-T}^T$$

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{it(x_n - m)} dt = \frac{1}{2T} \left[ \frac{e^{iT(x_n - m)} - e^{-iT(x_n - m)}}{x_n - m} \right]_{-T}^T = \text{sinc}(T(x_n - m))$$

• Si  $x_n = m$ , alors

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{it(x_n - m)} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T 1 dt = 1 = \text{sinc}(0) = \text{sinc}(T(x_n - m))$$

• Finalement, on a bien

$$V_m(T) = \sum_{n=1}^N \text{sinc}(T(x_n - m)) p_n.$$

**b)** • Observons que, si  $x_n \neq m$ ,

$$|\text{sinc}(T(x_n - m))| \leq \frac{1}{T|x_n - m|} \text{ et } \frac{1}{T|x_n - m|} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0,$$

donc par encadrement  $\text{sinc}(T(x_n - m)) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$ .

• Premier cas : si  $m \notin X(\Omega)$ .

Alors :  $\forall n \in [[1; N]]$ ,  $\text{sinc}(T(x_n - m)) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc  $V_m(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$ , or dans ce cas,  $\mathbb{P}(X = m) = 0$ .

Donc  $V_m(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = m)$ .

• Second cas : si  $m \in X(\Omega)$ . Notons  $i$  tel que  $m = x_i$ .

$$V_m(T) = \sum_{n \text{ tq } x_n \neq m} \text{sinc}(T(x_n - m))p_n + 1 \times p_i \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} p_i = P(X = m)$$

$$\text{Donc } V_m(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = m).$$

**3. a)** Soit  $T \in ]0; +\infty[$ .

$$\begin{aligned} V_m(T) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \phi_X(t) e^{-imt} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{n=1}^{+\infty} p_n e^{itx_n} e^{-imt} dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{n=1}^{+\infty} p_n e^{it(x_n - m)} dt \end{aligned}$$

Nous avons :  $\|t \mapsto p_n e^{it(x_n - m)}\|_{\infty, [-T; T]} = p_n$  car  $|e^{i\alpha}| = 1$  ( $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ).

Or  $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$  converge (et sa somme est 1).

Donc la convergence de série de fonctions  $t \mapsto p_n e^{it(x_n - m)}$  est normale donc uniforme sur le segment  $[-T; T]$ . On peut donc permuter intégration et sommation :

$$\begin{aligned} V_m(T) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( p_n \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{it(x_n - m)} dt \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \text{sinc}(T(x_n - m)) \end{aligned}$$

D'où

$$V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n \left( \frac{1}{T} \right).$$

**b)** • Si  $x_n = m$ , alors  $\forall h \in ]0; +\infty[, g_n(h) = \text{sinc}(0)p_n = p_n$  donc  $g_n$  admet une limite finie en 0, à savoir  $p_n$ .

• Si  $x_n \neq m$ , alors comme  $\text{sinc}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$  car  $|\text{sinc}(x)| \leq 1/|x|$ ,  $g_n(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

• Par conséquent,  $g_n$  admet une limite finie en 0 donc se prolonge en fonction continue sur  $[0; +\infty[$ .

**c)** Comme  $\|\text{sinc}\|_{\infty} = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|\tilde{g}_n\|_{\infty} \leq p_n$  (il y a même égalité car  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \tilde{g}_n(h) = p_n$ ).

Et comme la série de t.g.  $p_n$  converge, la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} \tilde{g}_n$  converge

normalement donc uniformément, donc  $G$  est définie, et comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{g}_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $G$  est continue par convergence uniforme.

**d)** • On a :  $\forall T > 0, V_m(T) = G(1/T)$  et  $G$  est continue en 0 donc  $V_m(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty}$

$G(0)$ .

- $G(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n(0)$ , et l'étude menée en b) montre que  $\tilde{g}_n(0) = p_n$  si  $x_n = m$  et 0 sinon.

Donc s'il existe un entier  $n$  tel que  $x_n = m$ , alors  $G(0) = p_n = \mathbb{P}(X = m)$ , et sinon  $G(0) = 0 = \mathbb{P}(X = m)$ .

Finalement, on a bien  $V_m(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = m)$ .

4. Supposons que  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux variables aléatoires telles que  $\phi_X = \phi_Y$ .

Soit  $m \in \mathbb{R}$ .

$$V_m^X(T) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \phi_X(t) e^{-imt} dt \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = m) \text{ et}$$

$$V_m^Y(T) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \phi_Y(t) e^{-imt} dt \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = m).$$

Comme  $\phi_X = \phi_Y$ , on a aussi :  $\forall T > 0, V_m^X(T) = V_m^Y(T)$ .

Donc par unicité de la limite,  $\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}(Y = m)$ .

Ceci étant valable pour tout  $m$  de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  et  $Y$  suivent la même loi.

**Exercice 32**

*Indépendance et stabilités*

Dans cet exercice, on utilise l'exercice précédent ainsi que le premier exercice de cette partie.

1. Montrer que, si  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux variables aléatoires indépendantes, alors  $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$ .
2. a) En déduire que si  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre respectif  $\lambda$  et  $\mu$ , alors  $X + Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda + \mu$ .  
b) Montrer de même si  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux variables aléatoires indépendantes de loi binomiale de paramètre respectif  $(m, p)$  et  $(n, p)$ , alors  $X + Y$  suit une loi de binomiale de paramètre  $(m + n, p)$ .

**Solution (Ex.32 – Indépendance et stabilités)**

1. Puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, pour tout  $t \in \mathbb{R}$   $e^{itX}$  et  $e^{itY}$  sont indépendantes, donc  $\mathbb{E}(e^{itX} e^{itY}) = \mathbb{E}(e^{itX}) \mathbb{E}(e^{itY})$ .  
Par conséquent  $\mathbb{E}(e^{it(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{itX}) \mathbb{E}(e^{itY})$ . Ainsi  $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$ .
2. a) On a :

---

$$\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y : t \mapsto \exp(\lambda(e^{it} - 1)) \exp(\mu(e^{it} - 1)) = \exp((\lambda + \mu)(e^{it} - 1))$$

Or  $t \mapsto \exp((\lambda + \mu)(e^{it} - 1))$  est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ . Par la conclusion de l'exercice précédent,  $X + Y$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .

- b)** Montrer de même si  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux variables aléatoires indépendantes de loi binomiale de paramètres respectifs  $(m, p)$  et  $(n, p)$ , alors  $X + Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $(m + n, p)$ .

On a, avec  $q = 1 - p$ ,

$$\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y : t \mapsto (q + pe^{it})^m (q + pe^{it})^n = (q + pe^{it})^{m+n}$$

Or  $t \mapsto (q + pe^{it})^{m+n}$  est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètre  $(m + n, p)$ . Par la conclusion de l'exercice précédent,  $X + Y$  suit la loi binomiale de paramètre  $(m + n, p)$ .



# Chapitre 12

## Approximations successives : le point fixe et les tangentes de Newton

On étudie deux suites de nombres rationnelles convergeant vers le nombre d'or

$$\Phi \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

parfois appelé *divine proportion*.

Puis on exploite l'une de ces suites pour déterminer des décimales de  $\Phi$  par milliers...

Les méthodes développées ici portent le nom de *méthodes des approximations successives*.

### Exercice 33

*Le nombre d'or, méthodes élémentaires*

1. a) Montrer que  $\Phi$  est l'unique solution positive de

$$x^2 = x + 1.$$

b) Justifier que  $\Phi$  appartient à l'intervalle  $I \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \left[ \frac{3}{2}; 2 \right]$ .

2. On définit la suite  $u$  par

$$u_0 = 2 \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

- a) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n$  appartient à I.  
b) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} - \Phi = \frac{-1}{\Phi u_n} (u_n - \Phi).$$

- c) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$|u_n - \Phi| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \right)^{2n}.$$

- d) En déduire que la suite  $u$  converge vers  $\Phi$ .  
e) Déterminer un entier  $n_0$  le plus petit possible tel que  $u_n$  approche  $\Phi$  avec une erreur inférieure à  $10^{-9}$ .

- f) Justifier que  $|u_{n+1} - \Phi| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3 - \sqrt{5}}{2} |u_n - \Phi|$ .

*Interprétation :* Comme  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \simeq 0,38$ , l'erreur entre deux itérations successives se réduit d'un facteur 0,38.

3. On définit la suite  $v$  par

$$v_0 = 2 \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2 + 1}{2v_n - 1}.$$

- a) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $v_n$  appartient à I.  
b) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$v_{n+1} - \Phi = \frac{(v_n - \Phi)^2}{2v_n - 1}.$$

- c) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$|v_n - \Phi| \leq 2 \left( \frac{1}{2} \right)^{2^{n+1}}.$$

- d) En déduire que la suite  $v$  converge vers  $\Phi$ .  
e) Déterminer un entier  $n_0$  le plus petit possible tel que  $v_n$  approche  $\Phi$  avec une erreur inférieure à  $10^{-9}$ .

- f) Justifier que  $|v_{n+1} - \Phi| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}} |v_n - \Phi|^2$ .

*Interprétation :* Si  $v_n$  approche  $\Phi$  avec une précision de  $d$  décimales (erreur inférieure à  $10^{-d}$ ), alors  $v_{n+1}$  approche  $\Phi$  avec une précision de plus de  $2d$  décimales (erreur inférieure à  $10^{-2d}$ ), ce qui est extrêmement rapide. On parle de *convergence quadratique*.

**Solution (Ex.33 – Le nombre d'or, méthodes élémentaires)**

1. a) Les deux solutions sont  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , et  $\Phi$  est l'unique solution positive.

b)  $4 \leq 5 \leq 9 \implies 2 \leq \sqrt{5} \leq 3 \implies \Phi \in I = \left[ \frac{3}{2}; 2 \right]$ .

$$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2 \implies \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{2}{3} \implies \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{3} \leq 2.$$

c) Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

$$u_{n+1} - \Phi = \frac{\Phi(u_n + 1) - \Phi^2 u_n}{\Phi u_n} = \frac{\Phi u_n + \Phi - \Phi u_n - u_n}{\Phi u_n} = \frac{-1}{\Phi u_n} (u_n - \Phi).$$

d) • Puisque  $\Phi \in [3/2; 2]$ ,  $|u_n - \Phi| \leq \frac{1}{2}$  donc la majoration est valable pour  $n = 0$ .

• Supposons la majoration valable pour un  $n$  de  $\mathbb{N}$  fixé.

$$\Phi u_n \geq \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \text{ donc } \left| \frac{-1}{\Phi u_n} \right| \leq \left( \frac{2}{3} \right)^2 \text{ donc } |u_{n+1} - \Phi| \leq \left( \frac{2}{3} \right)^2 |u_n - \Phi|.$$

Et par hypothèse de récurrence  $|u_{n+1} - \Phi| \leq \left( \frac{2}{3} \right)^2 \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \right)^{2n} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \right)^{2n+2}$ , ce qui est la majoration au rang  $n + 1$ .

• Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , la majoration est valable pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

e) Comme  $\left| \frac{2}{3} \right| < 1$ ,  $\frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \right)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc par encadrement la suite  $u$  converge vers  $\Phi$ .

f) Déterminer un entier  $n_0$  le plus petit possible tel que  $u_n$  approche  $\Phi$  avec une erreur inférieure à  $10^{-10}$ .

$$\text{On veut } \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \right)^{2n} \leq 10^{-9}.$$

Il suffit que  $2n \geq \frac{\ln(2) - 9 \ln(10)}{\ln(2/3)}$ . Or  $\frac{\ln(2) - 9 \ln(10)}{\ln(2/3)} \simeq 49,40\dots$ , donc  $n_0 = 25$  convient.

$u_{25}$  est une valeur approchée de  $\Phi$  à  $10^{-9}$  près.

g) Il suffit d'observer que  $\Phi u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi^2 = 1 + \Phi = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ .

2. a) Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2x - 1}$ . On a  $f' : x \mapsto \frac{2(x^2 - x - 1)}{2x - 1}$  donc  $f$  est décroissante sur  $\left[ \frac{3}{2}; \Phi \right]$  et croissante sur  $[\Phi; 2]$ .

Comme  $f(\Phi) = \frac{\Phi^2 + 1}{2\Phi - 1} = \frac{2\Phi^2 - \Phi}{2\Phi - 1} = \Phi \geq \frac{3}{2}$  (en utilisant  $1 = \Phi^2 - \Phi$ ),

$f(3/2) = 13/8 \leq 2$  et  $f(2) = 5/3 \leq 2$ , on a  $f(I) \subset I$ .

Par récurrence immédiate,  $v_n \in I$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

b)  $v_{n+1} - \Phi = \frac{v_n^2 + 1 - 2v_n\Phi + \Phi}{2v_n - 1} = \frac{(v_n - \Phi)^2}{2v_n - 1}$  puisque  $1 + \Phi = \Phi^2$ .

c) La relation précédente montre que  $v_n \geq \Phi$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

Comme  $2v_n - 1 \geq 2$ ,  $\frac{1}{2v_n - 1} \leq \frac{1}{2}$ .

Montrons la propriété souhaitée par récurrence sur  $n$ .

- $2^{0+1} - 1 = 1$  et on a bien  $|v_0 - \Phi| = 2 - \Phi \leq \frac{1}{2}$  car  $\Phi \in [3/2; 2]$ .

- Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Supposons  $|v_n - \Phi| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$ . On a alors

$$|v_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{2} \left[ 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}} \right]^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+2}}$$

- La majoration est donc vraie pour tout  $n$  par récurrence.

d) On cherche  $n$  tel que  $2^{-2^{n+1}+1} \leq 10^{-9}$ . Il suffit que  $2^{-2^{n+1}+1} \leq 2^{-30}$  car  $2^{-10} \leq 10^{-3}$  ( $1024 \geq 1000\dots$ ). On veut  $2^{n+1} - 1 \geq 30$ , donc  $n = 4$  suffit.  $v_4$  approche  $\Phi$  avec une erreur inférieure à  $10^{-9}$ .

e) Comme  $2v_n - 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2\Phi - 1 = \sqrt{5}$ ,  $|v_{n+1} - \Phi| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}} |v_n - \Phi|^2$ .

### Exercice 34

*Méthode du point fixe et méthode des tangentes de Newton*

1. On suppose que  $I$  est un intervalle contenant  $\Phi$ , que  $g$  est une fonction continue sur  $I$  telle que  $g(I) \subset I$  et  $g(\Phi) = \Phi$ .

On définit la suite  $(x_n)$  par  $x_0 \in I$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $x_{n+1} = g(x_n)$ .

On suppose enfin que  $(x_n)$  converge vers  $\Phi$ .

a) Dans cette sous-question, on suppose  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $g'(\Phi) \neq 0$ .

i – Montrer que  $x_{n+1} - \Phi \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} g'(\Phi)(x_n - \Phi)$ .

ii – Appliquer cela à la suite  $u$  de l'exercice précédent.

b) Dans cette sous-question, on suppose  $g$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $g'(\Phi) = 0$  et  $g''(\Phi) \neq 0$ .

i – Montrer que  $x_{n+1} - \Phi \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{g''(\Phi)}{2}(x_n - \Phi)^2$ .

ii – Appliquer cela à la suite  $v$  de l'exercice précédent.

---

## 2. Méthode du point fixe

On suppose que  $I = [a; b]$ , que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , que  $I$  est stable par  $g$  et qu'il existe un réel  $k$  de  $]0; 1[$  tel que

$$\forall x \in I, \quad |g'(x)| \leq k$$

- a) Justifier que  $g$  admet au moins un point fixe.  
b) Justifier que  $g$  est  $k$ -contractante, i.e. que

$$\forall (x, y) \in I, \quad |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|.$$

Comme  $0 \leq k < 1$ ,  $g$  réduit les écarts, donc est contractante.

- c) En déduire l'unicité du point fixe de  $g$ , que l'on notera  $\alpha$ .  
d) Soit  $u_0 \in I$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = g(u_n)$ .

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|.$$

- e) Qu'en déduit-on ?

## 3. Méthode des tangentes de Newton

Soit  $I$  un intervalle,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^3$ .

On suppose que  $f$  s'annule en un point  $\alpha$  intérieur à  $I$ , que  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ .

On construit une suite  $(x_n)$  de la façon suivante :

- ①  $x_0 \in I$  tel que  $|x_0 - \alpha| \leq \varepsilon$  où  $\varepsilon \in ]0; 1[$  est tel que  $[\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon] \subset I$  (donc *a priori* pas trop loin de  $\alpha$ );  
② pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $x_{n+1}$  est l'abscisse du point d'intersection de la tangente en  $x_n$  à la courbe de  $f$  et de l'axe des abscisses (*il est conseillé de faire un dessin*).

On fait pour l'instant l'hypothèse que cette suite existe, i.e. que le procédé permet de définir des termes  $x_n$  appartenant tous à  $I$

- a) Montrer que  $x_{n+1}$  est défini par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- b) On pose  $g : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

Calculer  $g(\alpha)$  et  $g'(\alpha)$ .

On suppose jusque la fin qu'il existe  $k \in ]0; 1[$  tel que  $|g''| \leq 2k$ .

- c) En déduire, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que

$$|x_1 - \alpha| \leq k\varepsilon^2$$

- d) En déduire que la suite  $(x_n)$  est effectivement définie et vérifie

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{(k\varepsilon)2^n}{k}.$$

- e) Montrer finalement que  $(x_n)$  converge vers  $\alpha$  et que la vitesse de convergence est quadratique.

- f) Quelle fonction  $g$  obtient-on si l'on prend  $f : x \mapsto x^2 - x - 1$  sur  $[3/2; 2]$ ?  
Vérifier que toutes les conditions précédentes sont réunies.

**Solution (Ex.34 – Méthode du point fixe et méthode des tangentes de Newton)**

1. a) Dans cette question, on suppose  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $g'(\Phi) \neq 0$ .

i – Comme  $g$  est classe  $\mathcal{C}^1$ , le développement limité en  $\Phi$  permet d'écrire  
 $g(x_n) = g(\Phi) + g'(\Phi)(x_n - \Phi) + o(x_n - \Phi)$ , donc avec  $g(x_n) = x_{n+1}$ ,  
 $g(\Phi) = \Phi$  et  $g'(\Phi) \neq 0$ ,  

$$x_{n+1} - \Phi \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} g'(\Phi)(x_n - \Phi).$$

ii – Avec  $I = [3/2; 2]$ ,  $g : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$  vérifie les hypothèses, avec notamment  

$$g'(\Phi) = \frac{-1}{\Phi^2} = \frac{-2}{3 + \sqrt{5}} = -\frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Donc  $u_{n+1} - \Phi \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{3 - \sqrt{5}}{2}(u_n - \Phi)$ ... comme dans l'exercice précédent.

b) Dans cette question, on suppose  $g$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $g'(\Phi) = 0$  et  $g''(\Phi) \neq 0$ .

i – Comme  $g$  est classe  $\mathcal{C}^2$ , le développement limité en  $\Phi$  permet d'écrire  
 $g(x_n) = g(\Phi) + g'(\Phi)(x_n - \Phi) + \frac{g''(\Phi)}{2}(x_n - \Phi)^2 + o((x_n - \Phi)^2)$ ,  
 donc avec  $g(x_n) = x_{n+1}$ ,  $g(\Phi) = \Phi$ ,  $g'(\Phi) = 0$  et  $g''(\Phi) \neq 0$ ,

$$x_{n+1} - \Phi \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{g''(\Phi)}{2}(x_n - \Phi)^2.$$

ii – Avec  $I = [3/2; 2]$ ,  $g : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2x - 1}$  vérifie les hypothèses, avec notamment

$$g' : x \mapsto \frac{2(x^2 - x - 1)}{(2x - 1)^2} \text{ et } g' : x \mapsto \frac{10}{(2x - 1)^3}$$

qui conduit à  $g'(\Phi) = 0$  et  $g''(\Phi) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

Donc  $v_{n+1} - \Phi \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{5}}(v_n - \Phi)^2$ ... comme dans l'exercice précédent.

## 2. Méthode du point fixe

a)  $x \mapsto g(x) - x$  est continue sur  $[a; b]$ , positive en  $a$ , négative en  $b$  par stabilité de  $[a; b]$ , donc s'annule au moins une fois sur  $I$  par le théorème des valeurs intermédiaires.

- b) Les hypothèses sur  $g$  entraînent par l'inégalité des accroissements finis que  $g$  est  $k$ -lipschitzienne donc  $k$ -contractante.
- c) Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux points fixes de  $g$ .  
Alors  $|g(\alpha) - g(\beta)| \leq k|\alpha - \beta|$ , i.e.  $|\alpha - \beta| \leq k|\alpha - \beta|$  avec  $k < 1$ . Ce n'est possible que si  $\alpha = \beta$ .
- d) On raisonne par récurrence sur  $n$ .
  - La propriété est vraie au rang 0 car  $k^0 = 1$ .
  - Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| = |g(u_n) - g(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|$  assure l'hérédité de la propriété.
- e) Comme  $k \in [0; 1[$ ,  $k^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$  par encadrement.

### 3. Méthode des tangentes de Newton

Soit  $I$  un intervalle,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^3$ .

On suppose que  $f$  s'annule en un point  $\alpha$  intérieur à  $I$ , que  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ .

On construit une suite  $(x_n)$  de la façon suivante :

- ①  $x_0 \in I$  tel que  $|x_0 - \alpha| \leq \varepsilon$  où  $\varepsilon \in ]0; 1[$  est tel que  $[\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon] \subset I$  (donc *a priori* pas trop loin de  $\alpha$ );
- ② pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $x_{n+1}$  est l'abscisse du point d'intersection de la tangente en  $x_n$  à la courbe de  $f$  et de l'axe des abscisses (*il est conseillé de faire un dessin*).

On fait pour l'instant l'hypothèse que cette suite existe, i.e. que le procédé permet de définir des termes  $x_n$  appartenant tous à  $I$

a) L'équation de la tangente en  $x_n$  à la courbe de  $f$  est

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

On cherche  $x$  tel que  $y = 0$  :

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \implies x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

b) On pose  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

Calculer  $g(\alpha)$  et  $g'(\alpha)$ . Comme  $f(\alpha) = 0$ ,  $g(\alpha) = \alpha$ .

$$g'(x) = 1 - 1 + \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \text{ donc } g'(\alpha) = 0.$$

c) Par la formule de Taylor à l'ordre 2 en  $\alpha$  ( $g$  est au moins de classe  $\mathcal{C}^2$ ),

$$x_1 - \alpha = g(x_0) - \alpha = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_0 - \alpha) + \int_{\alpha}^{x_0} (x_0 - t)g''(t)dt - \alpha$$

$$x_1 - \alpha = \int_{\alpha}^{x_0} (x_0 - t)g''(t)dt, \text{ et comme } \int_{\alpha}^{x_0} |x_0 - t| dt = \frac{(x_0 - \alpha)^2}{2},$$

$$|x_1 - \alpha| \leq (2k) \frac{(x_0 - \alpha)^2}{2} \leq k\varepsilon^2$$

d) On observe alors que  $k\varepsilon^2 < \varepsilon$  entraîne  $x_1 \in ]\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon[ \subset I$ , donc on peut définir  $x_2$ .

Par récurrence, en raisonnant comme précédemment,  $x_n$  est défini pour tout  $n$  et on a la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - \alpha| \leq k(x_n - \alpha)^2.$$

On montre alors, toujours par récurrence sur  $n$ , que

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{(k\varepsilon)^{2^n}}{k}.$$

e) Comme  $0 \leq k\varepsilon < 1$ ,  $(x_n)$  converge vers  $\alpha$  et la vitesse de convergence est quadratique.

f)  $g(x) = x - \frac{x^2 - x - 1}{2x - 1} = \frac{2x^2 - x - x^2 + x + 1}{2x - 1} = \frac{x^2 + 1}{2x - 1} \dots$  voir alors les exercices précédents.

**Exercice 35**

*Des milliers de décimales du nombre d'or*

Soit  $g : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2x - 1}$  et  $v$  la suite définie par  $v_0 = 2$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = g(v_n)$ .

1. Vérifier que, pour tout  $(n, d) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $g\left(\frac{n}{d}\right) = \frac{n^2 + d^2}{2nd - d^2}$ .
2. Écrire en python une fonction `N_D(n)` renvoyant deux entiers  $N_n$  et  $D_n$  tels que  $v_n = \frac{N_n}{D_n}$ .
3. On admet que la fraction  $\frac{N_n}{D_n}$  ainsi calculée est irréductible et que  $v_n = \frac{N_n}{D_n}$  fournit une valeur approchée de  $\Phi$  avec une erreur inférieure à  $10^{-c_n}$  où  $c_n = 2^n$ .  
Montrer que le quotient euclidien (*i.e.* par division euclidienne d'entiers) de  $10^{c_n} N_n$  par  $D_n$  fournit les  $c_n - 1$  premières décimales de  $\Phi$ .
4. En déduire un script en PYTHON calculant les  $c_n$  premières décimales de  $\Phi$ .

**Solution (Ex.35 – Des milliers de décimales du nombre d'or)**

1.  $g(n/d) = \frac{(n/d)^2 + 1}{2(n/d) - 1} = \frac{n^2 + d^2}{2nd - d^2}$

2. Par exemple

```
def gnd(n,d):
```

---

```
return n**2+d**2, 2*n*d-d**2
```

```
def N_D(n):  
    N, D = 2, 1  
    for k in range(n):  
        N, D = gnd(N, D)  
    return N, D
```

3. On  $10^{c_n} N_n = D_n Q_n + R_n$  avec  $(Q_n, R_n) \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq R_n < D_n$ .

Donc  $10^{c_n} v_n = Q_n + \frac{R_n}{D_n}$  et  $|Q_n - 10^{c_n} v_n| < 1$ .

Or  $10^{c_n} |v_n - \Phi| \leq 1$  puisque  $v_n$  approche  $\Phi$  à moins de  $10^{-c_n}$ .

Par l'inégalité triangulaire :  $|Q_n - 10^{c_n} \Phi| < 2 < 10$ .

$Q_n$  est un entier à  $c_n + 1$  chiffres dont seul le chiffre des unités peut différer des chiffres  $10^{c_n} \Phi$ .

4. `n = eval(input('n = ? '))`

```
N, D = N_D(n)
```

```
dec=str(N*10**(2**n)//D)
```

```
# Pour un affichage par tranches de 5 chiffres
```

```
cha="1,"
```

```
dec=dec[1:]
```

```
while len(dec):
```

```
    cha += dec[0:5]+" "
```

```
    dec = dec[5:]
```

```
print(cha)
```

fournit pour  $n = 11$  les 2048 premières décimales de  $\Phi$  instantanément

```
1,61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576 28621  
35448 62270 52604 62818 90244 97072 07204 18939 11374 84754 08807 53868  
91752 12663 38622 23536 93179 31800 60766 72635 44333 89086 59593 95829  
05638 32266 13199 28290 26788 06752 08766 89250 17116 96207 03222 10432  
16269 54862 62963 13614 43814 97587 01220 34080 58879 54454 74924 61856  
95364 86444 92410 44320 77134 49470 49565 84678 85098 74339 44221 25448  
77066 47809 15884 60749 98871 24007 65217 05751 79788 34166 25624 94075  
89069 70400 02812 10427 62177 11177 78053 15317 14101 17046 66599 14669  
79873 17613 56006 70874 80710 13179 52368 94275 21948 43530 56783 00228  
78569 97829 77834 78458 78228 91109 76250 03026 96156 17002 50464 33824  
37764 86102 83831 26833 03724 29267 52631 16533 92473 16711 12115 88186  
38513 31620 38400 52221 65791 28667 52946 54906 81131 71599 34323 59734  
94985 09040 94762 13222 98101 72610 70596 11645 62990 98162 90555 20852  
47903 52406 02017 27997 47175 34277 75927 78625 61943 20827 50513 12181
```

## CHAPITRE 12. APPROXIMATIONS SUCCESSIVES : LE POINT FIXE ET LES TANGENTES DE NEWTON

---

56285 51222 48093 94712 34145 17022 37358 05772 78616 00868 83829 52304  
59264 78780 17889 92199 02707 76903 89532 19681 98615 14378 03149 97411  
06926 08867 42962 26757 56052 31727 77520 35361 39362 10767 38937 64556  
06060 59216 58946 67595 51900 40055 59089 50229 53094 23124 82355 21221  
24154 44006 47034 05657 34797 66397 23949 49946 58457 88730 39623 09037  
50339 93856 21024 23690 25138 68041 45779 95698 12244 57471 78034 17312  
64532 20416 39723 21340 44449 48730 23154 17676 89375 21030 68737 88034  
41700 93954 40962 79558 98678 72320 95124 26893 55730 97045 09595 68440  
17555 19881 92180 20640 52905 51893 49475 92600 73485 22821 01088 19464  
45442 22318 89131 92946 89622 00230 14437 70269 92300 78030 85261 18075  
45192 88770 50210 96842 49362 71359 25187 60777 88466 58361 50238 91349  
33331 22310 53392 32136 24319 26372 89106 70503 39928 22652 63556 20902  
97986 42472 75977 25655 08615 48754 35748 26471 81414 51270 00602 38901  
62077 73224 49943 53088 99909 50168 03281 12194 32048 19643 87675 86331  
47985 71911 39781 53978 07476 15077 22117 50826 94586 39320 45652 09896  
98555 67814 10696 83728 84058 74610 33781 05444 39094 36835 83581 38113  
11689 93855 57697 54841 49144 53415 09129 54070 05019 47754 86163 07542  
26417 29394 68036 73198 05861 83391 83285 99130 39607 20144 55950 44977  
92120 76124 78564 59161 60837 05949 87860 06970 18940 98864 00764 43617  
09334 17270 91914 33650 13715 76601 14803 81430 62623 80514 32117 34815  
10055 90134 561

# Chapitre 13

## Triangle de PASCAL, binôme de NEWTON & formule de LEIBNIZ

*Ces deux démonstrations sont semblables, et repose sur la formule de PASCAL et un raisonnement par récurrence naturel puisque*

$$(x + y)^{n+1} = (x + y)(x + y)^n \text{ et } (f.g)^{(n+1)} = ((f.g)^{(n)})'.$$

### Exercice 36

*Formule de PASCAL, binôme de NEWTON & formule de LEIBNIZ*

Justifier les propriétés suivantes.

①  $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$  (PASCAL).

②  $\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2,$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (\text{NEWTON}).$$

*Cette formule est encore valable pour deux matrices X et Y qui commutent.*

③ Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$  deux fonctions  $n$  fois dérivables. Alors

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (\text{LEIBNIZ}).$$

④ Relicat : symétrie du triangle de PASCAL.

$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $p \leq n,$

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}.$$

**Solution** (Ex.36 – Formule de PASCAL, binôme de NEWTON & formule de LEIBNIZ)

① Une démonstration instructive...

Soit  $E = [[1; n+1]]$ . Parmi les parties à  $p+1$  éléments de  $E$ , il y en a :

- $\binom{n}{p}$  qui contiennent le nombre  $n+1$ , car il faut et il suffit de choisir les  $p$  nombres de  $[[1; n]]$  pour créer une telle partie;
- $\binom{n}{p+1}$  qui ne contiennent pas le nombre  $n+1$ , car il faut et il suffit de choisir les  $p+1$  nombres de  $[[1; n]]$  pour créer une telle partie.

Donc  $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

... et si les calculs vous rassurent...

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} \\ &= \frac{(p+1)n! + (n-p)n!}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} = \binom{n+1}{p+1}. \end{aligned}$$

②  $\boxed{\text{I}}$   $1 = 1$ .

$\boxed{\text{H}}$  Petit regroupement de sommes :

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ &\stackrel{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \\ &\stackrel{\text{PASCAL}}{=} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \end{aligned}$$

---


$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

③ À vous de jouer...

④ Une démonstration instructive...

Il y a autant de parties à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments que de parties à  $n-p$  éléments : à chaque partie à  $p$  éléments correspond exactement une partie à  $n-p$  éléments, à savoir son complémentaire.

Plus rigoureusement, l'application

$$\varphi : E_p \rightarrow E_{n-p}, A \mapsto E \setminus A$$

de l'ensemble des parties à  $p$  éléments dans l'ensemble des parties à  $n-p$  éléments est une bijection, donc  $\text{Card}(E_p) = \text{Card}(E_{n-p})$ .

... et si les calculs vous rassurent...

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$



# Chapitre 14

## Autour des formules de TAYLOR

☞ [MP-M2 – 2018 – PSI – Partie I]

### Exercice 37

*Formule de TAYLOR-LAPLACE et cas des polynômes*

1. *Formule de Taylor avec reste intégral ou Taylor-LAPLACE*

Soit  $V \subset \mathbb{R}$  un voisinage de 0 i.e. un ouvert contenant 0. Soit  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ .

Montrer que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Par translation, on en déduit pour toute fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un voisinage  $V$  de  $a \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in V, \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

2. *Cas des polynômes*

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$ . Justifier que

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

... ce qui constitue un excellent moyen de translater un polynôme :

$$P(X + a) = P(a) + P'(a)X + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}X^n.$$

**Solution (Ex.37 – Formule de TAYLOR-LAPLACE et cas des polynômes)**

1. Il s'agit d'une simple intégration par parties, en raisonnant par récurrence.

$$\boxed{\text{I}} \int_0^x f'(t)dt = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0) \text{ d'où } f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

$$\boxed{\text{H}} \text{ Intéressons-nous à l'intégrale } I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Avec  $u : t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$  et  $v = f^{(n+1)} \mathcal{C}^1$ ,

$$I_n \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

$$I_n = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} + I_{n+1} \dots \text{ Cqfd.}$$

2. Le reste intégral est nul car  $P^{(n+1)} = 0 \dots$

**Exercice 38**

*Approximations numériques des dérivées*

Justifier les propriétés suivantes.

1. On suppose que  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un segment  $[a; b]$ .

Soit  $t \in [a; b]$  et  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $t + h \in [a; b]$ . Alors

$$\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - f'(t) \right| \leq \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{2} |h|.$$

2. On suppose que  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  sur un segment  $[a; b]$ .

Soit  $t \in [a; b]$  et  $h \geq 0$  tel que  $[t-h; t+h] \subset [a; b]$ .

$$\left| \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} - f'(t) \right| \leq \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3} h^2.$$

*Commentaire –*

$f'(t) \simeq \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$  est une approximation avec une erreur en  $O(h)$ ,  
 tandis que

$f'(t) \simeq \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}$  est une approximation bien meilleure car avec une erreur en  $O(h^2)$ .

Ce qui permet, notamment en informatique, d'estimer  $f'$  lorsqu'on connaît  $f$  en certains points uniquement.

Si je souhaite estimer la dérivée d'une fonction connaissant sa valeur en des points  $x_i = a + ih$ ,  $i \in [[0; N]]$ , je peux procéder ainsi

(i)  $f'(x_i) \simeq \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}$  ou  $f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$ , méthode d'ordre 1,

(ii)  $f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$ , méthode d'ordre 2.

**Solution (Ex.38 – Approximations numériques des dérivées)**

1.  $f''$  est continue sur le segment  $[a; b]$  donc bornée donc  $\|f^{(2)}\|_\infty$  existe.

Pour tout  $x$  de  $[a; b]$  tel que  $x+h \in [a; b]$ , on a :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \int_x^{x+h} \frac{(t-x)^1}{1!} f^{(2)}(t) dt$$

$$\text{d'où } \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \leq \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} (t-x) f^{(2)}(t) dt \right|,$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } \left| \int_x^{x+h} (t-x) f^{(2)}(t) dt \right| &\leq \int_x^{x+h} |(t-x) f^{(2)}(t)| dt \\ &\leq \|f^{(2)}\|_\infty \int_x^{x+h} (t-x) dt \end{aligned}$$

$$\text{Et } \int_x^{x+h} (t-x) dt = \frac{h^2}{2}, \text{ donc } \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \leq \|f^{(2)}\|_\infty \frac{|h|}{2}.$$

2.  $f^{(3)}$  est continue sur le segment  $[a; b]$  donc bornée.

La formule de Taylor à l'ordre 2 donne :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \int_x^{x+h} \frac{(t-x)^2}{2!} f^{(3)}(t) dt,$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \int_x^{x-h} \frac{(t-x)^2}{2!} f^{(3)}(t) dt.$$

La différence des deux expressions précédentes donne :

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right| \leq \frac{1}{2h} \left| \int_{x-h}^{x+h} \frac{(t-x)^2}{2!} f^{(3)}(t) dt \right|.$$

Il n'y a plus qu'à majorer l'intégrale :

$$\left| \int_{x-h}^{x+h} \frac{(t-x)^2}{2!} f^{(3)}(t) dt \right| \leq \int_{x-h}^{x+h} \left| \frac{(t-x)^2}{2!} f^{(3)}(t) \right| dt$$

$$\leq \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{2} \left[ \frac{(t-x)^3}{3} \right]_{x-h}^{x+h} \leq \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3} h^3$$

**Exercice 39**

*Théorème et inégalité de TAYLOR-LAGRANGE*

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $]a; b[$  et  $n+1$  fois dérivable sur  $]a; b[$ .

On souhaite prouver le théorème de Taylor-Lagrange :

$$\ll \exists c \in ]a; b[, \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \gg$$

- a) Justifier que ce théorème est vérifié pour  $n = 0$ .  
 b) Soit  $A$  le réel tel que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Soit  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$t \mapsto \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} A + \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t).$$

Justifier que  $\varphi'$  s'annule au moins une fois sur  $]a; b[$ .

- c) Conclure.

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $]a; b[$ .

Justifier l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\ll \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a; b]}. \gg$$

3. Les résultats précédents demeurent-ils vrais avec  $b < a$ , en remplaçant  $]a; b[$  et  $]a; b[$  par  $]b; a[$  et  $]b; a[$  respectivement ?  
 4. Établir l'inégalité de Taylor-Lagrange en partant de la formule de Taylor avec reste intégral (qui est au programme).

**Solution (Ex.39 – Théorème et inégalité de TAYLOR-LAGRANGE)**

1. a) Pour  $n = 0$ , il s'agit du théorème des accroissements finis :

$$\ll \exists c \in ]a; b[, \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(c) \text{ i.e. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \gg$$

- b) •  $\varphi(a) = f(b)$ ,  
 •  $\varphi(b) = f(b)$  (car  $0^0 = 1$  et  $f^{(0)} = f$ ),  
 • la régularité de  $f$  entraîne que  $\varphi$  est continue sur  $]a; b[$  et dérivable sur  $]a; b[$ .

Donc d'après le théorème de Rolle,  $\varphi'$  s'annule au moins une fois sur  $]a; b[$ .

- c)  $\forall t \in ]a; b[$ ,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -\frac{(b-t)^n}{n!}A - \sum_{k=1}^n \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t) \\ &= -\frac{(b-t)^n}{n!}A + \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) \\ &= -\frac{(b-t)^n}{n!}(A - f^{(n+1)}(t)) \end{aligned}$$

Soit  $c \in ]a; b[$  tel que  $\varphi'(c) = 0$  (qui existe d'après b)).

Alors  $b - c \neq 0$  et  $f^{(n+1)}(c) = A$ .

Donc :  $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$  et on a prouvé que

$$\exists c \in ]a; b[, \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

2. Notons que la continuité de  $f^{(n+1)}$  sur le segment  $[a; b]$  assure l'existence de  $\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a; b]}$ .

Par le théorème de Taylor-Lagrange,

$$\exists c \in ]a; b[, \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Donc

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) \right| = \left| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \right|.$$

Et comme  $b-a > 0$  et  $|f^{(n+1)}(c)| \leq \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a; b]}$ , on obtient l'inégalité souhaitée.

3. Les résultats précédents demeurent-ils vrais avec  $b < a$ , en remplaçant  $]a; b[$  et  $]a; b[$  par  $]b; a[$  et  $]b; a[$  respectivement ? • La preuve du théorème de Taylor-Lagrange n'utilise pas l'hypothèse  $a < b$ , donc il demeure vrai pour  $b < a$ , avec les modifications des intervalles indiquées.

• Dans l'inégalité de Taylor-Lagrange, si  $b < a$  alors  $|b-a| = a-b$ . On peut en toute généralité donner l'inégalité suivante :

« Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $I$ , alors

$$\forall (a, b) \in \mathbb{I}^2, \quad \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a; b]} \cdot \gg$$

4. Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a; b]$  ou  $[b; a]$ . La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Et par l'inégalité triangulaire, en prenant garde à l'ordre des bornes,

- si  $a < b$  :  $\left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a; b]}}{n!} \int_a^b (b-t)^n dt$
- si  $a > b$  :  $\left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a; b]}}{n!} \int_b^a (t-b)^n dt$

Dans les deux cas, on obtient

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a; b]}}{n!} \times \frac{|b-a|^{n+1}}{n+1} \dots \mathcal{C}qfd.$$

**Exercice 40**

*Inégalités de KOLMOGOROV*

On pourra utiliser librement l'inégalité de Taylor-Lagrange établie dans l'exercice précédent.

1. *Acte I* –

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose  $f$  et  $f''$  bornées sur  $\mathbb{R}$  et on note, pour toute fonction  $g$  bornée sur  $\mathbb{R}$ ,  $\|g\|_{\infty}$  la borne supérieure de  $|g|$  sur  $\mathbb{R}$ .

- a) Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ . Justifier que

$$|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq h^2 \|f''\|_{\infty}.$$

- b) En déduire que  $f'$  est bornée et vérifie

$$\|f'\|_{\infty} \leq \frac{h \|f''\|_{\infty}}{2} + \frac{\|f\|_{\infty}}{h}.$$

- c) Montrer finalement que

$$\|f'\|_{\infty} \leq \sqrt{2 \|f\|_{\infty} \|f''\|_{\infty}}.$$

2. *Acte II* –

Soit  $n \geq 2$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$ . On suppose  $f$  et  $f^{(n)}$  bornée sur  $\mathbb{R}$ .

- a) Soit  $V$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$  définie par

$$V \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & (n-1)^2 & \dots & (n-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Justifier que  $V$  est inversible.

- b) On munit  $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$  des normes  $\|\cdot\|_\infty$  d\u00e9finies par  
 $\forall M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad \|M\|_\infty = \max_{i,j} |m_{i,j}|$  et  
 $\forall X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}), \quad \|X\|_\infty = \max_i |x_i|.$

Montrer que, pour  $(M, N) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})^2$  et  $X \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}),$   
 $\|MN\|_\infty \leq (n-1) \|M\|_\infty \|N\|_\infty$  et  $\|MX\|_\infty \leq (n-1) \|M\|_\infty \|X\|_\infty.$

- c) Soit  $x \in \mathbb{R}.$

On note  $X(x)$  la colonne de  $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$  de coordonn\u00e9es les r\u00e9els  $\frac{f^{(k)}(x)}{k!}$   
pour  $1 \leq k \leq n-1.$

En appliquant l'in\u00e9galit\u00e9 de Taylor-Lagrange sur  $[x; x+i]$  pour  $i \in$   
 $[[1; n-1]],$  montrer que

$$\|VX(x)\|_\infty \leq K$$

o\u00f9  $K \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} 2 \|f\|_\infty + \frac{n^n \|f^{(n)}\|_\infty}{n!}.$

- d) En d\u00e9duire finalement que les d\u00e9riv\u00e9es  $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n-1)}$  sont born\u00e9es  
sur  $\mathbb{R}.$   
e) D\u00e9montrer l'in\u00e9galit\u00e9 de Kolmogorov

$$\forall k \in [[0; n]], \quad \left\| f^{(k)} \right\|_\infty \leq \sqrt{2^{k(n-k)}} \|f\|_\infty^{1-\frac{k}{n}} \left\| f^{(n)} \right\|_\infty^{\frac{k}{n}}.$$

### Solution (Ex.40 – In\u00e9galit\u00e9s de KOLMOGOROV)

#### 1. Acte I -

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2.$  On suppose  $f$  et  $f''$  born\u00e9es sur  $\mathbb{R}$  et on note,  
pour toute fonction  $g$  born\u00e9e sur  $\mathbb{R}, \|g\|_\infty$  la borne sup\u00e9rieure de  $|g|$  sur  $\mathbb{R}.$

- a) Par l'in\u00e9galit\u00e9 de Taylor-Lagrange

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2 \|f''\|_\infty}{2}$$

$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2 \|f''\|_\infty}{2}$$

ce qui permet d'\u00e9crire par l'in\u00e9galit\u00e9 triangulaire

$$\begin{aligned} & |f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \\ &= |f(x+h) - f(x) - hf'(x) - (f(x-h) - f(x) + hf'(x))| \\ &\leq \frac{h^2 \|f''\|_\infty}{2} + \frac{h^2 \|f''\|_\infty}{2} \dots \text{Cqfd.} \end{aligned}$$

b) On peut alors écrire

$$\begin{aligned} |2hf'(x)| &= |(2hf'(x) - f(x+h) + f(x-h)) + f(x+h) - f(x-h)| \\ &\leq h^2 \|f''\|_\infty + |f(x+h)| + |f(x-h)| \\ &\leq h^2 \|f''\|_\infty + 2\|f\|_\infty \end{aligned}$$

D'où

$$|f'(x)| \leq \frac{h \|f''\|_\infty}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{h}.$$

Cette majoration est valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donc  $f'$  est bornée et

$$\|f'\|_\infty \leq \frac{h \|f''\|_\infty}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{h}.$$

c) Soit  $g : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, h \mapsto \frac{h \|f''\|_\infty}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{h}$ .

$g$  est dérivable avec  $g' : h \mapsto \frac{\|f''\|_\infty}{2} - \frac{\|f\|_\infty}{h^2}$ , strictement croissante et

s'annulant en  $h_0 = \sqrt{\frac{2\|f\|_\infty}{\|f''\|_\infty}}$ .

$g(h_0) = \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$ , donc en prenant  $h = h_0$  dans l'inégalité précédente, on a finalement

$$\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}.$$

2. Soit  $n \geq 2$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$ . On suppose  $f$  et  $f^{(n)}$  bornée sur  $\mathbb{R}$ .

a)  $V$  est une matrice de Vandermonde associée aux nombres deux à deux distincts  $1, 2, \dots, n-1$ , donc de déterminant non nul.

Donc  $V$  est inversible.

$$V \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & (n-1)^2 & \dots & (n-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

b) •  $\forall (i, j) \in [[1; n-1]]^2$ ,

$$\left| (MN)_{i,j} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} m_{i,k} n_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |m_{i,k} n_{k,j}| \leq (n-1) \|M\|_\infty \|N\|_\infty$$

•  $\forall i \in [[1; n-1]]$ ,

$$\left| (MX)_i \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} m_{i,k} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |m_{i,k} x_k| \leq (n-1) \|M\|_\infty \|X\|_\infty$$

c) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Soit  $i \in [[1; n-1]]$ .

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\left| f(x+i) - f(x) - if'(x) - \dots - \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right| \leq \frac{i^n}{n!} \|f^{(n)}\|_\infty,$$

et par l'inégalité triangulaire

$$\left| if'(x) + \dots + \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right| \leq 2\|f\|_\infty + \frac{i^n}{n!} \|f^{(n)}\|_\infty, \text{ donc}$$

$$\left| if'(x) + \dots + \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right| \leq 2\|f\|_\infty + \frac{n^n}{n!} \|f^{(n)}\|_\infty$$

Or  $if'(x) + \dots + \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$  est la  $i$ -ème coordonnées de  $VX(x)$ , donc

$$\|VX(x)\|_\infty \leq K$$

$$\text{où } K \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} 2\|f\|_\infty + \frac{n^n \|f^{(n)}\|_\infty}{n!}.$$

d) On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \|X(x)\|_\infty &= \|V^{-1}VX(x)\|_\infty \\ &\leq (n-1) \|V^{-1}\|_\infty \|VX(x)\|_\infty \leq (n-1) \|V^{-1}\|_\infty K \end{aligned}$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in [[1; n-1]], \quad \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right| \leq (n-1) \|V^{-1}\|_\infty K,$$

ce qui prouve que les dérivées  $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n-1)}$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .

e) Montrons par récurrence forte que  $n \in \mathbb{N}^*$  les inégalités de Kolmogorov

$$(\mathcal{I}_n) : \forall k \in [[0; n]], \quad \|f^{(k)}\|_\infty \leq \sqrt{2^{k(n-k)}} \|f\|_\infty^{1-\frac{k}{n}} \|f^{(n)}\|_\infty^{\frac{k}{n}}.$$

- Pour  $n = 1$ , les inégalités sont triviales, et sont en fait des égalités pour  $k = 0$  et  $k = 1$  :  $\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$  et  $\|f'\|_\infty = \|f'\|_\infty$ .

- Même si le raisonnement par récurrence n'oblige pas à envisager séparément le cas  $n = 2$ , je remarque que les cas  $k = 0$  et  $k = 2$  sont des égalités triviales et le cas  $k = 1$  a été établi dans la première question.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons les inégalités de Kolmogorov  $(\mathcal{I}_j)$  établies pour tout  $j \in [[1; n]]$ .

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  avec  $f$  et  $f^{(n+1)}$  bornées sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $k = 0$  ou  $k = n+1$ , les inégalités de Kolmogorov sont vraies, et sont toujours des égalités.

Soit  $j \in [[1; n]]$ .

En appliquant  $(\mathcal{I}_2)$  avec  $k = 1$  à  $f^{(j-1)}$ , on a :

$$\|f^{(j)}\|_{\infty}^2 \leq 2 \|f^{(j-1)}\|_{\infty} \|f^{(j+1)}\|_{\infty}$$

Par hypothèse de récurrence pour  $j$  et  $k = j - 1$ , on a :

$$\|f^{(j-1)}\|_{\infty} \leq \sqrt{2^{j-1}} \|f\|_{\infty}^{\frac{1}{j}} \|f^{(j)}\|_{\infty}^{1-\frac{1}{j}}$$

Utilisons les hypothèses de récurrence pour faire apparaître  $\|f\|_{\infty}$  et  $\|f^{(n+1)}\|_{\infty}$  dans le majorant.

Par hypothèse de récurrence pour  $n + 1 - j$  et  $k = 1$ , sur  $f^{(j)}$ , on a :

$$\|f^{(j+1)}\|_{\infty} \leq \sqrt{2^{n-j}} \|f^{(j)}\|_{\infty}^{\frac{n-j}{n+1-j}} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{\frac{1}{n+1-j}}$$

Du coup :

$$\|f^{(j)}\|_{\infty}^2 \leq \sqrt{2^{n+1}} \|f\|_{\infty}^{\frac{1}{j}} \|f^{(j)}\|_{\infty}^{\frac{j-1}{j} + \frac{n-j}{n+1-j}} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{\frac{1}{n+1-j}}$$

Or  $\frac{j-1}{j} + \frac{n-j}{n+1-j} = 2 - \frac{n+1}{j(n+1-j)}$ , donc :

$$\|f^{(j)}\|_{\infty}^{\frac{j(n+1-j)}{j(n+1-j)}} \leq \sqrt{2^{n+1}} \|f\|_{\infty}^{\frac{1}{j}} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{\frac{1}{n+1-j}}$$

Et en élevant à la puissance  $\frac{j(n+1-j)}{n+1}$ , on aboutit à

$$\|f^{(j)}\|_{\infty} \leq \sqrt{2^{j(n+1-j)}} \|f\|_{\infty}^{1-\frac{j}{n+1}} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{\frac{j}{n+1}}$$

... Cqfd.

# Chapitre 15

## Développements de sommes et de restes

### Exercice 41

Constante  $\gamma$  d'EULER

On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Quelle est la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} v_n$  ?
2. En déduire l'existence  $\gamma \in \mathbb{R}$  telle que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$ .
3. *Un encadrement de  $\gamma$* 
  - a) Établir, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$ .
  - b) En déduire la variation de  $(u_n)$ .
  - c) En déduire aussi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n > 1 - \ln(2)$ .
  - d) Montrer finalement que :  $1 - \ln(2) \leq \gamma < 1$ .

**Solution** (Ex.41 – Constante  $\gamma$  d'EULER)

1.  $v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-1}{n(n+1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge, par domination  $\sum_{n \geq 1} v_n$  converge.

2. Comme  $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$  converge, la suite  $(u_n)$  converge.

En notant  $\gamma$  sa limite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma \right) = 0 = o(1)$ , donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

3. a) • *Méthode accroissements finis* -

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $\ln : [n; n+1] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, et dérivable sur  $]n; n+1[$ .

Par le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in ]n; n+1[$  tel que

$$\ln(n+1) - \ln(n) = f'(c) = \frac{1}{c}.$$

Or  $c \in ]n; n+1[$ , donc  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$ , d'où

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

• *Méthode croissance de l'intégrale* -

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :  $\forall t \in \left] \frac{1}{n+1}; \frac{1}{n} \right[$ ,  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{t} < \frac{1}{n}$ .

Par croissance de l'intégrale,  $\frac{1}{n+1} < [n+1]_t^n \ln(t) < \frac{1}{n}$ , i.e.

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$


---

☞ L'inégalité des accroissements finis ne donne malheureusement pas l'inégalité stricte.

- b) Comme :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) < 0$ ,  $u$  est strictement décroissante.

- c) Pour tout  $n \geq 2$ ,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) > 1 + \sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) - \ln(n) = 1 + \ln(n+1) - \ln(2) - \ln(n) > 1 - \ln(2).$$

Comme  $u_1 = 1$ , l'inégalité est encore vraie pour  $n = 1$ .

- d) Par prolongement des inégalités larges,  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 1 - \ln(2)$ .

De même,  $\forall n \geq 2$ ,  $u_n \leq u_2 < u_1 = 1$ , donc  $\gamma \leq u_2 < 1$ .

---

**Exercice 42**

*Développements en séries de  $\ln(2)$ ,  $\ln(3)$  voire  $\ln(p)$*

On continue de noter, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ .

1. a) Justifier la convergence de la série de terme général  $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$ .

c) En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

2. Proposer une démonstration de l'identité

$$\ln(3) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k} \right)$$

3. Et, pour  $p$  entier supérieur ou égal à 2, de

$$\ln(p) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} - \frac{p-1}{p} + \frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{p-1}{2p} + \dots ?$$

**Solution** (Ex.42 – *Développements en séries de  $\ln(2)$ ,  $\ln(3)$  voire  $\ln(p)$* )

1. a) La suite  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$  est décroissante de limite nulle, donc d'après le théorème

de Leibniz, la série alternée de t.g.  $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$  converge.

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} = \left( \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} \right) - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} =$$

$$\sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}, \text{ d'où}$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = u_{2n} + \ln(2n) - (u_n + \ln(n)) = u_{2n} - u_n + \ln(2).$$

c) Comme la série alternée converge et la suite  $u$  converge vers  $\gamma$ , l'égalité précédente entraîne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \gamma - \gamma + \ln(2) = \ln(2)$$

2. 
$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k} \right) = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = u_{3n} + \ln(3n) - u_n - \ln(n) = u_{3n} - u_n + \ln(3),$$
 et  

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k} \right) = \gamma - \gamma + \ln(3) = \ln(3)$$
3. Remplaçons les « 3 » ci-dessus par «  $p$  » et les « 2 » des dénominateurs par des «  $p-1$  ».

**Exercice 43**

*Intégrales de WALLIS & formule de STIRLING*

On souhaite établir l'équivalent de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n$$

1. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln \left( \frac{n!}{\sqrt{n} (n/e)^n} \right)$ .

En étudiant la série de terme général  $v_{n+1} - v_n$ , montrer qu'il existe une constante  $K$  telle que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K\sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n$$

2. On définit, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , l'intégrale de Wallis  $W_n$  par

$$W_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$$

- a) Justifier que la suite  $(W_n)$  est décroissante.  
 b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n \quad (\heartsuit)$$

- c) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_{n+1} W_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

- d) En déduire que

$$W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$$

- e) À l'aide de  $(\heartsuit)$ , montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

f) Déterminer finalement la valeur de la constante K.

**Solution (Ex.43 – Intégrales de WALLIS & formule de STIRLING)**

1.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = 1 - (n + \frac{1}{2}) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$

Or  $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ , donc

$$v_{n+1} - v_n = 1 - 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge, par domination  $\sum_{n \geq 1} v_{n+1} - v_n$  converge, donc la suite  $(v_n)$  converge.

Soit  $\ell$  sa limite. Alors  $e^{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell$ . En posant  $K = e^\ell$ ,

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

2. a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ .  $\forall t \in [0; \pi/2]$ ,  $\cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$  induit  $W_{n+1} \leq W_n$ .

b) En intégrant par parties  $W_{n+2}$  avec  $u : t \mapsto \sin(t)$  et  $v : t \mapsto \cos^{n+1}(t)$ , on prouve  $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$  donc  $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ .

c) On démontre soit en montrant que la suite  $((n+1)W_{n+1}W_n)$  est constante, égale à  $W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$ , soit par récurrence, que  $W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$ .

d) Par décroissance :  $(0 <) W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$  donc  $\frac{n+1}{n+1} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ , et par encadrement  $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$ .

e) Par récurrence, ou en itérant (1) pour faire apparaître des produits d'entiers pairs et des produits d'entiers impairs, on montre que

$$W_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Remarque : l'une peut se déduire de l'autre par c).

f) De c) et d),  $W_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$  avec  $W_n > 0$  donc  $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ .

g) De e),  $W_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{K \sqrt{2n}}$  et par f),  $W_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ , donc  $K = \sqrt{2\pi}$ .

### Exercice 44

*Un développement asymptotique du reste des séries de Riemann*

Soit  $\alpha$  un réel de  $]1; +\infty[$ . On définit  $g$  sur  $]1; +\infty[$  par

$$\forall x \geq 1, \quad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

On pose, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,

$$S_n(\alpha) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}, \quad S(\alpha) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{et} \quad R_n(\alpha) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Contrairement à l'usage courant, la somme  $R_n(\alpha)$  commence à  $n$  et non  $n+1$ .

1. a) Montrer que, pour tout entier  $k \geq 2$ ,

$$\int_k^{k+1} g(x)dx \leq g(k) \leq \int_{k-1}^k g(x)dx.$$

- b) En déduire, pour  $n \geq 1$ , l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1} \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right) \leq S_n(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1} \left( 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) + 1.$$

- c) En déduire un encadrement de  $S(\alpha)$ .

2. a) Montrer pour  $n \geq 1$ , l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}.$$

- b) En déduire :  $R_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$ .

3. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $\forall x \geq 1, \quad f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ .

- a) Par la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$f(k+1) = f(k) + \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} + I_k, \quad \text{avec } 0 \leq I_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2 \times k^{\alpha+2}}.$$

- b) En isolant  $\frac{1}{k^\alpha}$  dans l'expression précédente, montrer finalement que

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

**Solution** (Ex.44 – Un développement asymptotique du reste des séries de Riemann)

1. a) Soit  $k \geq 2$ . Par décroissance de  $g$  sur  $[k-1; k]$  et sur  $[k; k+1]$ ,

- $\forall x \in [k-1; k], \quad g(x) \geq g(k)$  entraîne  $g(k) \leq \int_{k-1}^k g(x)dt$ .

- $\forall x \in [k; k+1], \quad g(x) \leq g(k)$  entraîne  $\int_k^{k+1} g(x)dx \leq g(k)$ .

- b) Par la relation de Chasles appliquée aux encadrements précédents pour  $k$  allant de 1 à  $n$  sur la première inégalité, et pour  $k$  allant de 2 à  $n$  sur la seconde, on a :

$$\int_1^{n+1} g(t)dt \leq S(\alpha) \leq \int_1^n g(t)dt + g(1).$$

En calculant les deux intégrales de cet encadrement, on obtient, pour  $n \geq 1$ , l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha - 1} \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right) \leq S_n(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha - 1} \left( 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) + 1.$$

c) En passant à la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\frac{1}{\alpha - 1} \leq S(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha - 1} + 1.$$

2. a) En sommant à l'aide de la relation de Chasles, pour  $n \geq 1$ ,

$$\int_n^{+\infty} g(t)dt \leq R_n(\alpha) \leq \int_{n-1}^{+\infty} g(t)dt.$$

Et en calculant ces deux intégrales, on obtient l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}.$$

$$\text{b) } 0 \leq R_n(\alpha) - \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \left( \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right).$$

$$\text{Or } \frac{\frac{1}{\alpha - 1} \left( \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)}{\frac{1}{n^{\alpha-1}}} = \frac{1}{\alpha - 1} \left( 1 - \left( \frac{n-1}{n} \right)^{\alpha-1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc}$$

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right).$$

3. a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .  $f$  étant de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $[k; k+1]$ , la formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire :

$$f(k+1) = f(k) + f'(k)(k+1-k) + \frac{f''(k)}{2}(k+1-k)^2 + \int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2}{2} f^{(3)}(t)dt.$$

$$\text{Or } f'(k) = \frac{1}{k^\alpha}, \quad f''(k) = \frac{-\alpha}{k^{\alpha+1}},$$

$$\int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2}{2} f^{(3)}(t)dt = \int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2}{2} \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}} dt,$$

et  $\forall t \in [k; k+1]$ ,  $0 \leq \frac{(t-k)^2}{2} \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}} \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$ , ce qui donne par croissance de l'intégrale,

$$f(k+1) = f(k) + \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} + I_k, \text{ avec } 0 \leq I_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2 \times k^{\alpha+2}}.$$

b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $N \geq n$ .

$$\sum_{k=n}^N \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n}^N \left( f(k+1) - f(k) + \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} - I_k \right)$$

$$= f(N+1) - f(n) + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^{\alpha+1}} - \sum_{k=n}^N I_k \quad (1).$$

Que peut-on dire de chaque terme lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  ?

- $\lim_{N \rightarrow +\infty} f(N+1) = 0$ , sans souci.
- $\lim_{N \rightarrow +\infty} -f(n) = -f(n) = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ , no problem.
- $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) = \frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$  par 4.b).
- De  $0 \leq I_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2 \times k^{\alpha+2}}$ , on tire, par comparaison avec la série de Riemann convergente  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\alpha+2}}$  la convergence de  $\sum_{k \geq 1} I_k$ , et on a, en sommant pour  $k \geq n$  l'encadrement,

$$0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} I_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} R_n(\alpha+2) \leq \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha+1}},$$

la dernière majoration résultant de 4.a).

Alors  $0 \leq n^\alpha \sum_{k=n}^{+\infty} I_k \leq \frac{\alpha}{2} \times \frac{n^\alpha}{(n-1)^{\alpha+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  montre que par encadrement,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} I_k = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

*Conclusion* : en passant à la limite lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ , il vient

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

### Exercice 45

*Équivalence des termes généraux, application à  $\zeta(2)$  et  $\gamma$*

**1. Question préliminaire**

Soit  $(a_n)_{n \geq n_0}$  et  $(b_n)_{n \geq n_0}$  deux suites réelles ne s'annulant pas.

On rappelle qu'alors,

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n \iff \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Montrer l'équivalence

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \geq n_0, \forall n \geq N_0, |a_n - b_n| \leq \varepsilon |b_n|.$$

2. Soit  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} b_n$  deux séries convergentes à termes strictement positifs.

On note  $R_n \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$  et  $R'_n \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$  leur reste respectif.

On suppose que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n.$$

Montrer que

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} R'_n.$$

3. Application à  $\zeta(2)$ .

On note, pour tout  $n \geq 1$ ,  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .

a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n}$ .

b) En d\u00e9duire un \u00e9quivalent de  $R_n$ .

c) D\u00e9terminer le reste d'ordre  $n$  de la s\u00e9rie  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$ .

d) En d\u00e9duire que le reste d'ordre  $n$  de la s\u00e9rie  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k^2}$  est \u00e9qui-

valent \u00e0  $\frac{1}{2n^2}$ .

e) En d\u00e9duire que

$$R_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

f) En s'inspirant de ce qui pr\u00e9c\u00e8de, d\u00e9terminer une constante  $\alpha$  telle que

$$R_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{\alpha}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

4. Application \u00e0 la constante  $\gamma$  d'Euler

Soit  $w_1 = 1$  et pour tout  $n \geq 2$ ,  $w_n = \frac{1}{n} - (\ln(n) - \ln(n-1))$ .

a) D\u00e9terminer un \u00e9quivalent simple de  $w_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

b) En d\u00e9duire que la suite  $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n \geq 1}$  converge.

On note  $\gamma$  sa limite, appel\u00e9e *constante  $\gamma$  d'EULER*.

c) Montrer que, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Solution** (Ex.45 – Équivalence des termes généraux, application à  $\zeta(2)$  et  $\gamma$ )

1. • Si  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ , alors  $\frac{a_n}{b_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition de la limite

$$\exists N_0 \geq n_0, \forall n \geq N_0, \left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| \leq \varepsilon, \text{ i.e. } |a_n - b_n| \leq \varepsilon |b_n|.$$

• Si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \geq n_0, \forall n \geq N_0, |a_n - b_n| \leq \varepsilon |b_n|$ ,

alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \geq n_0, \forall n \geq N_0, \left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$ ,

donc  $\frac{a_n}{b_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$ , i.e.  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ .

2. Utilisons la caractérisation précédente.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $N_0 \geq n_0$  tel que  $\forall n \geq N_0, |a_n - b_n| \leq \varepsilon b_n$ .

$$\text{Alors : } \forall n \geq N_0, |R_n - R'_n| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k - b_k| \leq \varepsilon R'_n$$

Ce qui entraîne, toujours par la caractérisation que  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} R'_n$ .

3. Application à  $\zeta(2)$ .

$$\text{a) } \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \underset{N \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n}.$$

$$\text{b) En notant } R'_n = \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n}, \text{ comme } \frac{1}{(k-1)k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2},$$

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} R'_n, \text{ i.e. } R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

c) En décomposant en éléments simples :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k-1)k(k+1)} &= \sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1/2}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1/2}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{N+1} - \frac{1}{n+1} \right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

---

Et  $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ .

d)  $\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2(k-1)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$  donc par la question précédente le reste d'ordre  $n$  de la série  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k^2}$  est équivalent à  $\frac{1}{2n^2}$ .

e)  $R_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k-1)k} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$  que l'on peut écrire

$$R_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

f) J'exploite les restes que je sais calculer explicitement :

$$R_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k-1)k} + \frac{1}{(k-1)k(k+1)} \right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{(k-1)k^2(k+1)} \text{ et } \frac{-1}{(k-1)k^2(k+1)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{k^4}.$$

J'introduis une série de t.g. équivalent dont je sais calculer le reste, par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^4} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} u_k &= \frac{1}{(k-1)k(k+1)(k+2)} = \frac{1/6}{k-1} - \frac{1/2}{k} + \frac{1/2}{k+1} - \frac{1/6}{k+2} \\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{6n} - \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2) - 2n(n+2) + n(n+1)}{6n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2}{6n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

d'où  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3}$ .

Ceci permet d'écrire :

$$R_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{3n^3}, \text{ d'où}$$

$$R_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Il reste à transformer le terme  $\frac{1}{2n(n+1)}$  :

$$\frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2n^2} = \frac{-1}{2n^2(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^3}, \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \text{ et finalement}$$

$$R_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

4. a) Application à la constante  $\gamma$  d'Euler

$$w_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

b) Par équivalence de t.g. de signe constant et par la série de référence de Riemann de paramètre 2 (alias  $\zeta(2)$ ), la série de t.g.  $w_n$  converge.

$$\text{Or } S_n = \sum_{k=1}^n w_k \stackrel{\text{télésc.}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \dots \text{ c'est notre suite!}$$

c) Notons  $T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$  le reste de cette série, et toujours  $R_n$  le reste de la série de Riemann de paramètre 2.

$$\text{De } w_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2} \text{ on tire } T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}, \text{ donc } T_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On peut écrire :  $S_n + T_n = \gamma$ , donc  $S_n = \gamma - T_n$ , et donc, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Exercice 46**

*Convexité et encadrement du reste d'une série de Riemann*

Pour tout  $\alpha \in ]0; +\infty[$ , on note  $f_\alpha$  la fonction

$$f_\alpha : [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}.$$

On note aussi, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $I_k = [k; k+1]$ .

- a) Représenter l'allure de la courbe  $\mathcal{C}_\alpha$  représentative de  $f_\alpha$  sur  $I_k$ .
- b) Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_\alpha$  en  $k+1$  ainsi que l'équation de la corde à  $\mathcal{C}_\alpha$  passant par  $(k, f_\alpha(k))$  et  $(k+1, f_\alpha(k+1))$ , et les tracer sur le dessin précédent.
- c) Montrer que, pour tout  $x \in I_k$ ,

$$f'_\alpha(k+1)(x-(k+1)) + f_\alpha(k+1) \leq f_\alpha(x) \leq (f_\alpha(k+1) - f_\alpha(k))(x-k) + f_\alpha(k)$$

d) En déduire finalement

$$\frac{\alpha}{2(k+1)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{2k^\alpha} + \frac{1}{2(k+1)^\alpha}$$

2. a) Établir, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) + R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{2n^\alpha} + R_n(\alpha)$$

b) En déduire finalement

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\alpha}{4n^{\alpha+1}}$$

3. a) Ce dernier encadrement est-il un résultat plus précis que ceux obtenus dans les deux exercices précédents ?

b) Sachant que  $S_n(4) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ , justifier que

$$\frac{\pi^4}{90} \simeq 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2.4^4} + \frac{1}{3.4^3} \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

**Solution** (Ex.46 – Convexité et encadrement du reste d'une série de Riemann)

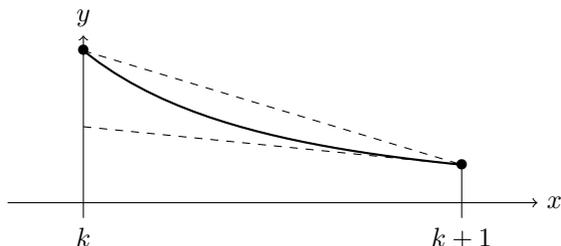
Pour tout  $\alpha \in ]0; +\infty[$ , on note  $f_\alpha$  la fonction

$$f_\alpha : [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}.$$

On note aussi, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $I_k = [k; k + 1]$ .



L'équation de la tangente correspond au membre de gauche, tandis que l'équation de la corde correspond au membre de droite, de l'encadrement  $f'_\alpha(k+1)(x - (k+1)) + f_\alpha(k+1) \leq f_\alpha(x) \leq (f_\alpha(k+1) - f_\alpha(k))(x - k) + f_\alpha(k)$

- Soit  $g$  la fonction obtenue en formant la différence du membre de droite et du membre central.

Sur  $I_k$ ,  $g'' = -f'' < 0$ , donc  $g'$  est strictement croissante, et comme  $g(k) = g(k+1) = 0$ ,  $g'$  s'annule au moins une fois (Rolle), donc  $g'$  s'annule exactement une fois entre  $k$  et  $k+1$ . Donc  $g'$  est strictement positive puis strictement négative, donc  $g$  est strictement croissante puis strictement décroissante, donc est positive. Ce qui fournit la majoration.

- Soit  $h$  la fonction obtenue en formant la différence du membre central et du membre de gauche.

Sur  $I_k$ ,  $h'' = f'' > 0$  donc  $h'$  est strictement croissante. Mais  $h' = f' - f'(k+1)$  donc  $h'(k+1) = 0$ , donc  $h'$  est négative. Donc  $h$  est décroissante, mais  $h(k+1) = 0$ , donc  $h$  est positive. Ce qui fournit la minoration.

- Par croissance de l'intégrale sur  $I_k$ , en remplaçant  $f_\alpha$  et  $f'_\alpha$  par leur expression, puisque  $\int_k^{k+1} x - k dx = \frac{1}{2}$  et  $\int_k^{k+1} x - (k+1) dx = -\frac{1}{2}$ ,

$$\frac{\alpha}{2(k+1)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{2k^\alpha} + \frac{1}{2(k+1)^\alpha}$$

2. a) En sommant les encadrements précédents pour  $k$  allant de  $n$  à  $+\infty$ ,

comme  $\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$  on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

- pour l'inégalité de gauche :

$$\frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) + R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

- pour l'inégalité de droite, provoquons un télescopage :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \left( \frac{1}{2k^\alpha} + \frac{1}{2(k+1)^\alpha} \right) = \sum_{k=n}^{+\infty} \left( \frac{1}{2k^\alpha} - \frac{1}{2(k+1)^\alpha} \right) + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha}$$

$$= \frac{1}{2n^\alpha} + R_n(\alpha)$$

*Si on n'a pas vu cette astuce, une récurrence sur  $n$  fonctionne, c'est moins élégant.*

Bilan :

$$\frac{\alpha}{2} R_n(\alpha + 1) + R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{2n^\alpha} + R_n(\alpha)$$

**b)** On isole  $R_n(\alpha)$  :

$$\frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha}{2} R_n(\alpha + 1)$$

Mais comme ceci est vrai pour tout  $\alpha > 1$ , on a :

$$R_n(\alpha + 1) \geq \frac{1}{\alpha n^\alpha} - \frac{1}{2n^{\alpha+1}}, \text{ donc } -\frac{\alpha}{2} R_n(\alpha + 1) \leq -\frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\alpha}{4n^{\alpha+1}}$$

D'où finalement

$$\frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\alpha}{4n^{\alpha+1}}$$

**3. a)** Ce résultat est plus précis si l'on veut encadrer l'erreur commise. Il permet aussi d'écrire en particulier

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

Comme développement asymptotique, il est moins précis que tout développement en  $o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$  (ou plus).

**b)**  $\frac{\pi}{90} = S_4(4) + R_4(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + R_4(4)$

Or  $R_4(4) \simeq \frac{1}{3 \cdot 4^3} - \frac{1}{2 \cdot 4^4}$  à  $\frac{4}{4 \cdot 4^5} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \leq 10^{-3}$  près. D'où :

$$\frac{\pi^4}{90} \simeq 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2 \cdot 4^4} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$



# Chapitre 16

## Sommation par parties et transformation d'Abel

### Exercice 47

#### *Transformation d'Abel*

1. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites de nombres de  $\mathbb{C}$ . Établir la formule de sommation par parties

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1}(u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=0}^{n-1} u_k(v_{k+1} - v_k) = u_n v_n - u_0 v_0 \quad (16.1)$$

2. Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  deux suites de nombres de  $\mathbb{C}$ .

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ , ainsi que  $B_0 = 0$  (comme toute somme vide).

Établir, à l'aide de la relation (1), la formule appelée *transformation d'Abel*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad (16.2)$$

---

*Un mot de cette intégration par parties discrète*

En considérant que la sommation est le pendant discret de l'intégration et la différenciation discrète d'une suite - définie pour une suite  $u$  par  $u_{k+1} - u_k$  -

est le pendant de la dérivation, l'analogie entre la formule (1) et l'intégration par parties est frappante :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)v_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} u_k(v_{k+1} - v_k) = u_n v_n - u_0 v_0$$

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

La même remarque vaut pour la transformation d'Abel :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad (16.3)$$

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = [f(t)G(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)G(t)dt$$


---

**Exercice 48**

*Application aux calculs de sommes finies classiques*

1. **a)** En prenant :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_k = k$  et  $b_k = 1$  dans la formule (2), retrouver la valeur de la somme  $\sum_{k=1}^n k$ .
- b)** En prenant :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_k = k^2 - k$  et  $b_k = 1$  dans la formule (2), retrouver la valeur de la somme  $\sum_{k=1}^n k^2$ .
2. On définit la *suite de Fibonacci*  $(F_n)_{n \geq 0}$  par
 
$$F_0 = F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$
  - a)** En prenant :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_k = F_k$ , ainsi que :  $b_1 = 1$  et  $\forall k \geq 2$ ,  $b_k = 0$  dans la formule (2), montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1$ .
3. En prenant :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_k = F_k$ , ainsi que :  $b_1 = 0$  et  $\forall k \geq 2$ ,  $b_k = F_{k-2}$  dans la formule (2), montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$ .

---

**Exercice 49**

*Formule sommatoire d'Abel et constante d'Euler*

1. Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle. Pour tout  $x$  réel strictement positif, on pose

$$A(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} a_n = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} a_n$$

où  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière du réel  $x$ .

En particulier, si  $x < 1$ , cette définition entraîne que  $A(x) = 0$ , comme toute somme vide.

Soit  $\varphi$  une fonction réelle de classe  $C^1$  sur  $]0; +\infty[$ .

Montrer, à l'aide de la transformation d'Abel (2), que

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad \sum_{1 \leq n \leq x} a_n \varphi(n) = A(x) \varphi(x) - \int_1^x A(u) \varphi'(u) du \quad (16.4)$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule sommatoire d'Abel*.

2. Démontrer à l'aide d'une série que la suite  $u$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

est convergente.

On note  $\gamma$  sa limite, appelée *constante d'Euler*.

3. a) Montrer que :  $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ .

b) Déterminer la nature des intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor u \rfloor}{u^2} du$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^2} du$ .

c) Montrer à l'aide de (3) que, pour tout  $x \geq 1$ ,

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n} = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor u \rfloor}{u^2} du.$$

d) En déduire

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^2} du.$$

**Solution (Ex.49 – Formule sommatoire d'Abel et constante d'Euler)**

1. Soit  $x \in ]0; +\infty[$  et  $N = \lfloor x \rfloor$ . Par la transformation d'Abel (2) où je substitue  $a_n$  à  $b_n$  de sorte que  $B_n = A(n)$ , et on substitue  $\varphi(n)$  à  $a_n$ , j'obtiens

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n \varphi(n) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi(n) \stackrel{(2)}{=} A(N) \varphi(N) - \sum_{n=1}^{N-1} (\varphi(n+1) - \varphi(n)) A(n)$$

Constatons alors que, puisque sur les intervalles  $[n; n+1[$   $A$  est constante égale à  $A(n)$ , on a :

$$(\varphi(n+1) - \varphi(n)) \times A(n) = A(n) \int_n^{n+1} \varphi'(u) du = \int_n^{n+1} A(u) \varphi'(u) du, \text{ ce qui conduit à}$$

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n \varphi(n) = A(N) \varphi(N) - \int_1^N A(u) \varphi'(u) du$$

De même :  $\varphi(N) = \varphi(x) - (\varphi(x) - \varphi(N)) = \varphi(x) - \int_N^x \varphi'(u) du$ , et comme sur  $[N; x]$ ,  $A(N) = A(u)$ , on a :  $A(N) \varphi(N) = A(x) \varphi(x) - \int_N^x A(u) \varphi'(u) du$ .

On obtient alors la formule voulue :

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n \varphi(n) = A(x) \varphi(x) - \int_1^x A(u) \varphi'(u) du$$

2.  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n(n+1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Or la série de Riemann de t.g.  $\frac{1}{n^2}$  est absolument convergent donc la série de t.g.  $u_{n+1} - u_n$  converge. Donc la suite  $u$  converge.

3. a)  $\forall x > 0, x - 1 \leq [x] \leq x$  donc  $1 - \frac{1}{x} \leq \frac{[x]}{x} \leq 1$ . Ce qui prouve par encadrement que  $\frac{[x]}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ , donc  $[x] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ .

b) •  $f : u \mapsto \frac{[u]}{u^2}$  est c.p.m. et positive sur  $]0; +\infty[$ . De plus,  $f(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u}$  est divergente. Par équivalence de fonctions positives,  $\int_1^{+\infty} \frac{[u]}{u^2} du$  diverge.

•  $\forall u \in ]1; +\infty[, 0 \leq u - [u] \leq 1$  donc  $\frac{u - [u]}{u^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right)$ . Comme  $u \mapsto 1/u^2$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ ,  $\int_1^{+\infty} \frac{[u]}{u^2} du$  converge par domination.

c) Prenons  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = 1$  de sorte que  $A(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} 1 = \lfloor x \rfloor$ , et  $\varphi : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ .

Alors (3) conduit exactement à  $\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n} = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor u \rfloor}{u^2} du$ .

d) La formule précédente prise en  $x = n \in \mathbb{N}^*$  quelconque donne  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \int_1^n \frac{\lfloor u \rfloor}{u} du$ .

Retranchons  $\ln(n) = \int_1^n \frac{du}{u}$  aux deux membres :  $u_n = 1 - \int_1^n \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^2} du$

Comme  $(u_n)$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^2} du$  convergent, on obtient en passant à la limite

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^2} du.$$

### Exercice 50

#### *Critère de Dirichlet et application*

1. On reprend les notations de la formule (2) et on suppose d'une part que la suite  $(a_n)$  est une suite de réels décroissante et convergente de limite nulle, et d'autre part que la suite  $(B_n)$  est bornée.

Démontrer que la série de terme général  $a_n b_n$  converge.

Cette propriété est connue sous le nom de *critère de Dirichlet*.

2. Soit  $x \in ]0; 2\pi[$  et  $p \in ]0; +\infty[$ . On s'intéresse à la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n^p}$ .

a) On suppose dans cette question que  $x = 0$ . Étudier la convergence de la série précédente.

*Dans toute la suite de cette question, on suppose  $x \in ]0; 2\pi[$ .*

b) Montrer que :  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left| \sum_{n=1}^m e^{inx} \right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$ .

c) En déduire la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n^p}$ .

d) À quelle condition nécessaire et suffisante cette série est-elle absolument convergente ?

e) Quelle est la nature des séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^p}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^p}$  ?

**Solution (Ex.50 – Critère de Dirichlet et application)**

1. Puisque  $(a_n)$  converge, la série de t.g.  $a_n - a_{n+1}$  converge. Comme elle est à termes positifs puisque  $(a_n)$  décroît, cette convergence est absolue.

Puisque  $(B_n)$  est bornée,  $(a_{n+1} - a_n)B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(a_n - a_{n+1})$ .

Par le critère de domination, la série de t.g.  $(a_{n+1} - a_n)B_n$  converge.

Enfin comme  $(a_n)$  converge vers 0 et  $(B_n)$  est bornée,  $(a_n B_n)$  converge vers 0.

Ainsi, le membre de droite de (2) admet une limite finie donc le membre de gauche aussi. Autrement dit la série de t.g.  $a_n b_n$  converge.

2. a) Lorsque  $x = 0$ , il s'agit de la série de Riemann de paramètre  $p$ , qui converge si, et seulement si,  $p > 1$ . Dans toute la suite de cette question, on suppose  $x \in ]0; 2\pi[$ .

b) Comme  $x \in ]0; 2\pi[$ ,  $e^{ix} \neq 0$  et

$$\left| \sum_{n=1}^m e^{inx} \right| = \left| e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right| = \left| \frac{e^{inx/2}}{e^{ix/2}} \times \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \text{ car } \sin(x/2) > 0.$$

c) Comme la suite  $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n \geq 1}$  est décroissante de limite nulle et la suite

$(B_n)_{n \geq 1}$  définie par  $B_n = \sum_{k=1}^n e^{ikx}$  est bornée, le critère de Dirichlet entraîne que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n^p}$  converge.

d) Cette série converge absolument si, et seulement si, la série de Riemann de paramètre  $p$  converge, donc si, et seulement si,  $p > 1$ .

e) Les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^p}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^p}$  étant les parties réelles et imaginaires d'une série convergente, elles convergent.

☞ Si on a un doute, en notant  $(S_n)$  la suite des sommes partielles de la série complexe précédente, puisque  $(S_n)$  converge,  $(\overline{S_n})$  converge, et par linéarité les suites  $\left(\frac{S_n + \overline{S_n}}{2}\right)$  et  $\left(\frac{S_n - \overline{S_n}}{2}\right)$  convergent, i.e. les séries

---

partie réelle et partie imaginaire convergent.

---

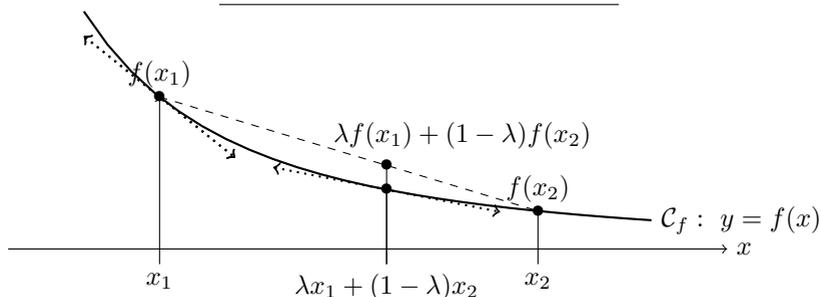


# Chapitre 17

## Convexité et applications très classiques

### Exercice 51

*Convexité, cordes & tangentes*



Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *convexe* si toute corde joignant deux points de sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de  $\mathcal{C}_f$ .

Autrement dit,  $f$  est convexe si, et seulement si,

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

$f$  est dite *concave* si  $-f$  est convexe, autrement dit, si

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

1. a) On suppose que  $f$  est dérivable et que  $f'$  est croissante sur  $I$ .  
 Montrer que  $f$  est convexe. On pourra fixer  $x_1 \leq x_2$  dans  $I$  et raisonner sur  $g : \lambda \mapsto \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ .
- b) Que peut-on dire si  $f$  est deux fois dérivable et  $f'' \geq 0$ ? Et si  $f'' \leq 0$ ?
2. On suppose  $f$  dérivable et  $f'$  croissante sur  $I$ . Soit  $x_1 \in I$ .  
 Montrer que la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $x_1$  est située sous  $\mathcal{C}_f$ , i.e.

$$\forall x \in I, \quad f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \leq f(x)$$

**Solution (Ex.51 – Convexité, cordes et tangentes)**

1. a) On fixe  $x_1 \leq x_2$  dans  $I$  et on pose  
 $g : \lambda \mapsto \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ .
- $g(0) = g(1) = 0$  et  $g$  est dérivable, donc par le théorème de Rolle,  $g'$  s'annule au moins une fois.
  - $g' : \lambda \mapsto \underbrace{f(x_1) - f(x_2)}_{=cte} + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} f'(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ , or  $f'$  est croissante et  $\lambda \mapsto \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  est décroissante, donc  $g'$  est décroissante.
  - Donc  $g'$  est positive, puis s'annule, puis est négative sur  $[0; 1]$ .
  - Donc  $g$  est croissante, puis éventuellement constante, puis décroissante sur  $[0; 1]$  avec  $g(0) = g(1) = 0$ .
  - Donc  $g$  est positive. *Cqfd.*
- b) Si  $f'' \geq 0$ , alors  $f'$  est croissante donc  $f$  est convexe. Et si  $f'' \leq 0$ ,  $-f'' \geq 0$  donc  $-f$  est convexe et  $f$  est concave.
2. Soit  $h : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - (f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1))$ .
- $h(x_1) = 0$  (logique : point de contact entre la courbe et sa tangente)
  - $h' = f' - f'(x_1)$  donc comme  $f'$  est croissante,  $h'(x) \leq 0$  si  $x \leq x_1$  et  $h'(x) \geq 0$  si  $x \geq x_1$ .
  - Donc  $h$  est décroissante puis croissante, en atteignant son minimum valant 0 en  $x_1$ , donc  $h$  est positive. *Cqfd.*

**Exercice 52**

*Quelques inégalités très classiques*

Justifier rapidement, à l'aide de l'exercice précédent et sans étude de fonctions auxiliaires, les inégalités suivantes :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1$ .
2.  $\forall x \in ]-1; +\infty[, \quad \ln(x + 1) \leq x$ .

3.  $\forall x \in [0; \pi/2], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$
4.  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \geq -1, \quad (1+x)^n \geq nx+1.$

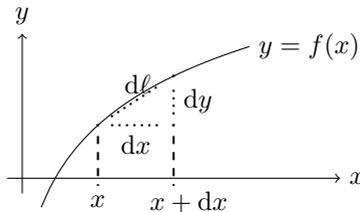
**Solution (Ex.52 – Quelques inégalités très classiques)**

1.  $\exp'' = \exp > 0$  donc  $\exp$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ . Or  $y = x + 1$  est l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_{\exp}$  en 0.
2.  $\frac{d^2}{dx^2} \ln(x+1) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$  donc  $f : x \mapsto \ln(x+1)$  est concave sur  $] -1; +\infty[$ . Or  $y = x$  est l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en 0.
3.  $\sin'' = -\sin$  donc  $\sin$  est concave sur  $[0; \pi/2]$ . Or  $y = x$  est l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_{\sin}$  tandis que  $y = \frac{2}{\pi}x$  est l'équation de la corde sur  $[0; \pi/2]$ .
4. Pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , l'inégalité est triviale (c'est une égalité).  
 Pour  $n \geq 2$ ,  $\frac{d^2}{dx^2}(1+x)^n = n(n-1)(x+1)^{n-2}$  donc  $f : x \mapsto (x+1)^n$  est convexe sur  $] -1; +\infty[$ . Or  $y = nx + 1$  est l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en 0.

**Exercice 53**

*Le plus court chemin...*

**Longueur d'une courbe**



On admet que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a; b]$ , alors la longueur de la courbe de  $f$  est donnée par

$$\ell_{f,[a; b]} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Intuitivement, par Pythagore,  $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 = (1 + (\frac{dy}{dx})^2) dx^2$

ce qui donne  $d\ell = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .

On se donne  $A = (a, \alpha)$  et  $B = (b, \beta)$  deux points du plan.

On note  $F$  l'ensemble des fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a; b]$  telles que  $\begin{cases} f(a) = \alpha \\ f(b) = \beta \end{cases}$ ,

autrement dit  $F$  est l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  joignant  $A$  à  $B$ .

L'objectif de l'exercice est de montrer que

$$\min_{f \in F} \left\{ \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \right\}$$

est atteint par l'unique fonction affine de  $F$ , autrement dit que *le plus court chemin  $\mathcal{C}^1$  de  $A$  à  $B$  est la ligne droite.*

1. Étudier la convexité de  $\varphi : u \mapsto \sqrt{1 + u^2}$  sur  $\mathbb{R}$  et montrer que

$$\forall (u, m) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{1 + u^2} - \sqrt{1 + m^2} \geq \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}(u - m)$$

2. Soit  $f \in F$  et soit  $g$  l'unique fonction affine de  $F$ . Montrer que

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \geq \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$$

**Solution (Ex.53 – Le plus court chemin...)**

1. •  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  par composition, puisque  $\forall u \in \mathbb{R}, 1 + u^2 \geq 1$ .

•  $\forall u \in \mathbb{R}, \varphi'(u) = \frac{2u}{2\sqrt{1 + u^2}} = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}$

•  $\forall u \in \mathbb{R}, \varphi''(u) = \frac{1}{(1 + u^2)^{3/2}} \geq 0$

Donc  $\varphi$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

- Soit  $m \in \mathbb{R}$ . L'équation de la tangente à  $\varphi$  en  $m$  est, en appelant  $u$  la 'variable des abscisses',

$$y = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}(u - m) + \sqrt{1 + m^2}$$

Cette tangente étant située sous la courbe de  $\varphi$ , on a bien

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{1 + u^2} - \sqrt{1 + m^2} \geq \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}(u - m)$$

2.  $g$  est la fonction affine joignant  $A$  à  $B$  :

$$g : x \mapsto \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) + \alpha$$

Posons  $m = g' = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$ .

Soit  $f$  une fonction quelconque de  $F$ .

$$\begin{aligned} \ell_{f,[a;b]} - \ell_{g,[a;b]} &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} - \sqrt{1 + m^2} dx, \text{ et par 1.,} \\ &\geq \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} \int_a^b f'(x) - m dx \end{aligned}$$

$$\text{Or } \int_a^b f'(x) - m dx = f(b) - f(a) - m(b - a) = \beta - \alpha - (\beta - \alpha) = 0.$$

Donc  $\ell_{f,[a;b]} - \ell_{g,[a;b]}$  : le plus court chemin  $\mathcal{C}^1$  est le segment...

### Exercice 54

NEWTON & la superattraction, algorithme de HÉRON

Soit  $[c; d]$  un segment de  $\mathbb{R}$ ,  $f : [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que :

- (i)  $f(c) < 0 < f(d)$ ;
- (ii)  $\forall x \in [c; d], f'(x) > 0$ ;
- (iii)  $\forall x \in [c; d], f''(x) \geq 0$ .

On pose pour tout  $x \in [c; d]$ ,  $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

1. Justifier que  $f$  possède un unique zéro dans  $[c; d]$ .

2. Méthode de NEWTON - On pose  $C = \frac{\max_{[c;d]} f''}{2 \min_{[c;d]} f'}$ .

a) Que valent  $F(a)$  et  $F'(a)$  ?

Montrer que, pour tout  $x$  de  $[a; d]$ ,

$$F(x) - a = \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)}.$$

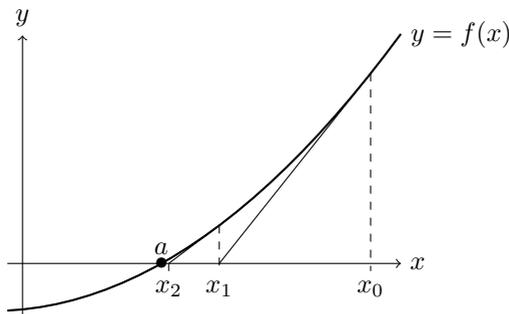
b) En déduire grâce à la formule de Taylor avec reste intégral que, pour tout  $x \in [a; d]$ ,

$$0 \leq F(x) - a \leq C(x - a)^2.$$

c) Montrer que  $[a; d]$  est stable par  $F$ .

d) Soit  $x_0 \in [a; d]$ . On construit par récurrence la suite  $(x_n)$  de la façon suivante :

«  $x_{n+1}$  est l'abscisse de l'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe de  $f$  passant par  $(x_n, f(x_n))$ . »



Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

e) Donner une majoration de l'erreur  $x_n - a$  en fonction de  $n$ , de  $x_0$  et de  $a$ .

3. *Méthode de HÉRON* – La méthode de HÉRON d’Alexandrie (Premier siècle ap. J.C.) consiste à calculer une valeur approchée de  $a = \sqrt{y}$  où  $y \in ]0; +\infty[$  par la suite définie par :

$$x_0 = y \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{y}{x_n} \right).$$

a) Montrer qu’il s’agit d’un cas particulier de la méthode de NEWTON appliquée à la fonction  $f : x \mapsto x^2 - y$ .

b) Vérifier que  $F(x) - a = \frac{(x - a)^2}{2x}$  et  $F(x) + a = \frac{(x + a)^2}{2x}$ , puis que

$$\frac{x_n - a}{x_n + a} = \left( \frac{x_0 - a}{x_0 + a} \right)^{2^n}.$$

c) Proposer une majoration de l’erreur dépendant de  $x_0$  et  $a$ .

d) Écrire un algorithme en Python calculant  $\sqrt{y}$  par l’algorithme de Héron.

**Solution (Ex.54 – NEWTON & la superattraction, algorithme de HÉRON)**

Soit  $[c; d]$  un segment de  $\mathbb{R}$ ,  $f : [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  telle que :

- (i)  $f(c) < 0 < f(d)$ ;
- (ii)  $\forall x \in [c; d], \quad f'(x) > 0$ ;
- (iii)  $\forall x \in [c; d], \quad f''(x) \geq 0$ .

On pose pour tout  $x \in [c; d]$ ,  $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

1.  $f$  est continue, strictement croissante, donc réalise une bijection de  $[c; d]$  sur  $[f(c); f(d)]$ . Or  $0 \in [f(c); f(d)]$ , donc 0 admet un unique antécédent dans  $[c; d]$ .

2. Méthode de NEWTON - On pose  $C = \frac{\max_{[c; d]} f''}{2 \min_{[c; d]} f'}$ .

a)  $F(a) = a, F' = 1 - \frac{f'^2 - f f''}{f'^2} = \frac{f f''}{f'^2}$  donc  $F'(a) = 0$ .

$$F(x) - a = F(x) - F(a) = x - a - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ puisque } f(a) = 0.$$

$$= \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)}$$

b) Écrivons la formule de Taylor en  $x$  à l'ordre 1 pour calculer  $f(a)$  :

$$F(x) - a = \frac{f(x) + f'(x)(a - x) + \int_x^a (a - t)f''(t)dt - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)}$$

$$F(x) - a = \frac{1}{f'(x)} \int_x^a (a - t)f''(t)dt$$

Or :  $\forall t \in [a; x]$ , on a  $a - t \leq 0$ , d'où

$$0 \leq f''(t) \leq \max_{[c; d]} f'', \text{ donc } 0 \geq (a - t)f''(t) \geq (a - t) \max_{[c; d]} f'', \text{ donc puisque}$$

$$x \geq a, 0 \leq \int_x^a (a - t)f''(t)dt \leq \max_{[c; d]} f'' \int_x^a a - t dt \leq \max_{[c; d]} f'' \frac{(x - a)^2}{2}$$

$$\text{D'où } 0 \leq F(x) - a \leq C(x - a)^2.$$

c) Pour tout  $x \in [a; d]$ ,  $F(x) \geq a$ .

$$\text{Pour tout } x \in [a; d], F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x \text{ car } f(x) \geq 0 \text{ et } f'(x) > 0.$$

$$\text{Enfin } F' = 1 - \frac{f'^2 - f f''}{f'^2} = \frac{f f''}{f'^2} \geq 0 \text{ sur } [a; d], \text{ donc } F \text{ est croissante.}$$

Donc  $[a; d]$  est stable par  $F$ .

d) Tangente en  $x_n : y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$ .

$$y = 0 \implies x - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \implies x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = F(x_n)$$

e) On a :

$$0 \leq x_1 - a \leq C(x_0 - a)^2$$

$$0 \leq x_2 - a \leq C(x_1 - a)^2 \leq C^3(x_0 - a)^4$$

$$0 \leq x_3 - a \leq C(x_2 - a)^2 \leq C^7(x_0 - a)^8$$

⋮

$$0 \leq x_n - a \leq C^{2^n - 1}(x_0 - a)^{2^n}$$

3. Méthode de HÉRON - La méthode de HÉRON d'Alexandrie (Premier siècle ap. J.C.) consiste à calculer une valeur approchée de  $a = \sqrt{y}$  où  $y \in ]0; +\infty[$  par la suite définie par :

$$x_0 = y \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{y}{x_n} \right).$$

a) Soit  $f : x \mapsto x^2 - y$ .

$$\text{Alors } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - y}{2x} = \frac{x^2 + y}{2x} = \frac{1}{2} \left( x + \frac{y}{x} \right), \text{ Cqfd.}$$

b)  $F(x) - a = \frac{x^2 + y - 2ax}{2x} = \frac{(x - a)^2}{2x}$  puisque  $y = a^2$ ,

et de même  $F(x) + a = \frac{x^2 + y + 2ax}{2x} = \frac{(x + a)^2}{2x}$ .

Il s'ensuit  $\frac{x_{n+1} - a}{x_{n+1} + a} = \left( \frac{(x_n - a)^2}{(x_n + a)^2} \right)^2$ , puis par récurrence sur  $n$

$$\frac{x_n - a}{x_n + a} = \left( \frac{x_0 - a}{x_0 + a} \right)^{2^n}.$$

c) On a déjà vu que  $(x_n)$  est décroissante de limite  $a$ . Donc

$$0 \leq x_n - a \leq (x_0 + a) \left( \frac{x_0 - a}{x_0 + a} \right)^{2^n}.$$

Comme  $\left| \frac{x_0 - a}{x_0 + a} \right| < 1$ , la convergence est très rapide. On parle de conver-

gence *quadratique*, car si on note  $\varepsilon_n = \left( \frac{x_0 - a}{x_0 + a} \right)^{2^n}$ , alors  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n^2$ ,

par exemple si  $x_n$  est une approximation avec une précision de l'ordre de  $10^{-p}$ , alors  $x_{n+1}$  sera une approximation avec une précision de l'ordre de  $10^{-2p}$  : on double le nombre de décimales à chaque itération.

d) Vu la rapidité de la convergence, on peut prendre comme test d'arrêt  $x_{n+1} - x_n \leq \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est la précision recherchée.

```
import numpy as np
```

```
def Heron(y,e):
    x = y
    xx = (y+1)/2
    while np.abs(xx-x) > e:
        x, xx = xx, (xx+y/xx)/2
    return xx
```

# e : précision  
# x0=y  
# x1=(x0+y/x0)/2=(y+1)/2  
# précision non atteinte ?  
# termes suivants

### Exercice 55

#### Inégalité de JENSEN

1. Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe.

Démontrer l'inégalité de JENSEN discrète :

$$\forall n \geq 1, \begin{cases} \forall (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{I}^n, \\ \forall (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in [0; 1]^n \\ \text{avec } \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1, \end{cases} \quad f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

2. a) Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ ,  $I$  un intervalle tel que  $X(\Omega) \subset I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et continue.

On suppose que  $X$  et  $f(X)$  possèdent une espérance. Montrer que

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$$

b) Quelle propriété retrouve-t-on en prenant  $f : x \mapsto x^2$ .

3. Soit  $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et soit  $f : g([a; b]) \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et continue. Démontrer l'inégalité de JENSEN continue (qui raconte la même histoire – image de la moyenne inférieure à moyenne de l'image) :

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(g(x)) dx$$

On pourra penser aux sommes de Riemann et commencer par le cas  $[a; b] = [0; 1]$ .

**Solution (Ex.55 – Inégalité de JENSEN)**

1. Par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 1$ ,  $\lambda_1 = 1$  et l'inégalité est vérifiée.

Pour  $n = 2$ ,  $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$  et l'inégalité est vérifiée par définition de la convexité.

Soit  $n \geq 2$ . Supposons la propriété vraie. On se donne  $n + 1$  points et  $n + 1$  coefficients.

Idée : couper en 2 – Soit  $\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 - \lambda_{n+1}$  et  $y = \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\Lambda}$ .

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(\Lambda y + (1 - \Lambda)x_{n+1}) \leq \Lambda f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Or en posant  $\mu_k = \frac{\lambda_k}{\Lambda}$ ,  $y = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k$  avec  $\sum_{k=1}^n \mu_k = 1$ . Donc par convexité :

$$f(y) \leq \sum_{k=1}^n \mu_k f(x_k), \text{ et } \Lambda f(y) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

On a bien prouvé  $f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$ .

Par récurrence, on a gagné.

**2. a)** Notons  $X(\Omega) = \{x_n/n \in \mathbb{N}\}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n = \mathbb{P}([X = x_n])$ .

Comme l'inégalité de Jensen est valable pour un nombre fini de valeurs, on va raisonner sur les sommes partielles.

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Afin d'avoir une somme de coefficients égale à 1, soit  $p_N = \sum_{n=0}^N \lambda_n$ .

Par convexité :  $p_N f\left(\sum_{n=0}^N \frac{\lambda_n}{p_N} x_n\right) \leq p_N \sum_{n=0}^N \frac{\lambda_n}{p_N} f(x_n)$

Par les hypothèses :

$$p_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{\lambda_n}{p_N} x_n = \frac{1}{p_N} \sum_{n=0}^N \lambda_n x_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X) \text{ et par continuité}$$

$$p_N f\left(\sum_{n=0}^N \frac{\lambda_n}{p_N} x_n\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(\mathbb{E}(X))$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{\lambda_n}{p_N} f(x_n) = \frac{1}{p_N} \sum_{n=0}^N \lambda_n f(x_n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(X)) \text{ par transfert}$$

Par prolongement des inégalités larges :  $f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$

**b)**  $(\mathbb{E}(X))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$  donc par König-Huygens  $\mathbb{V}(X) \geq 0$  : positivité de la variance...

**3.** Écrivons les sommes de Riemann pour les fonctions  $\frac{1}{b-a}g$  et  $\frac{1}{b-a}f \circ g$ .

$$\text{Soit } S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{b-a} g\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} g\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

$$\text{et } T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f \circ g\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right).$$

Par convexité, puisque  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$ ,  $f(S_n) \leq T_n$ .

Comme  $\frac{1}{b-a}g$  est continue que  $[a; b]$ , la somme de Riemann  $S_n$  tend vers

$\int_a^b \frac{1}{b-a} g(x) dx$  et par continuité de  $f$ ,  $f(S_n)$  tend vers  $f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx\right)$ .

Comme  $\frac{1}{b-a} f \circ g$  est continue que  $[a; b]$ , la somme de Riemann  $T_n$  tend vers  $\int_a^b f(g(x)) dx$ .

Par prolongement des inégalités larges,

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(g(x)) dx.$$

### Exercice 56

*Moyennes arithmétique, géométrique & harmonique*

Cet exercice utilise l'inégalité de JENSEN.

1. a) Justifier que la fonction  $\ln$  est concave.

b) En déduire que, pour tout  $(a, b) \in ]0; +\infty[$ ,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

c) Déduire de l'inégalité précédente

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

2. Soit  $n \geq 1$  et soit  $x_1, \dots, x_n$   $n$  nombres réels strictement positifs.

Montrer que

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

**Solution** (Ex.56 – Moyennes arithmétique, géométrique & harmonique)

1. a)  $\forall x > 0, \ln''(x) = -1/x^2 < 0$ .

b) Par l'inégalité de concavité avec  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $\ln(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2} \ln(a) + \frac{1}{2} \ln(b) \leq$

$\ln\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)$ , que l'on compose par  $\exp$ , croissante.

c) En prenant  $a' = \frac{1}{a}$  et  $b' = \frac{1}{b}$  dans  $\sqrt{a'b'} \leq \frac{a'+b'}{2}$ , on a  $\frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$

qui donne par inversion  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$ .

2. En appliquant l'inégalité de Jensen à  $\ln$  (concave) avec  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k = \frac{1}{n}$  aux points  $(x_k)$ , on a

$$\ln \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(x_k)$$

qui donne en composant par exp qui est croissante

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq \left( \prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n}.$$

Et pour obtenir l'autre comparaison, il suffit d'appliquer cette inégalité aux points  $\frac{1}{x_k}$  qui sont bien dans  $]0; +\infty[$ , comme en 1.c).

**Exercice 57**

*Inégalités de HÖLDER et de MINKOWSKI, normes  $\|\cdot\|_p$*

Dans cet exercice,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit  $(p, q) \in ]0; +\infty[^2$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . On dit que  $p$  et  $q$  sont deux exposants *conjugués*.

a) Montrer, en exploitant la concavité de  $\ln$ , que

$$\forall (u, v) \in ]0; +\infty[^2, \quad uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Qu'en est-il si  $u = 0$  ou  $v = 0$ ?

b) Soit  $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$  et  $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$   $2n$  réels.

On suppose que  $\sum_{k=1}^n |u_k|^p = \sum_{k=1}^n |v_k|^q = 1$ . Montrer que

$$\sum_{k=1}^n |u_k v_k| \leq 1.$$

c) Soit  $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$  et  $(y_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$ .

Démontrer l'*inégalité de HÖLDER*

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}$$

d) Quelle inégalité obtient-on lorsque  $p = 2$ ?

2. a) On prend encore  $p \in ]0; +\infty[$  et  $q$  l'exposant conjugué de  $p$ .

Soit  $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$  et  $(y_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$ .

En écrivant

$\forall k \in [[1; n]]$ ,  $|x_k + y_k|^p \leq |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + |y_k| |x_k + y_k|^{q-1}$ ,  
 déduire, de l'inégalité de HÖLDER, l'inégalité de MINKOWSKI

$$\left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}$$

b) Sur  $\mathbb{R}^n$ , on définit  $\|\cdot\|_p$  par

$$\|\cdot\|_p : (x_k)_{1 \leq k \leq n} \mapsto \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

Vérifier que  $\|\cdot\|_p$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

3.  $\|\cdot\|_1$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$\|\cdot\|_1 : (x_k)_{1 \leq k \leq n} \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|$$

est-elle une norme sur  $\mathbb{R}^n$  ?

4. Soit  $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$ . Montrer que

$$\|(x_k)_{1 \leq k \leq n}\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|(x_k)_{1 \leq k \leq n}\|_\infty \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

$\|\cdot\|_\infty$  est-elle une norme sur  $\mathbb{R}^n$  ?

5. Soit  $E = \mathbb{R}^2$  et  $p \in ]0; 1[$ . Soit

$$N : E \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}.$$

Soit  $A = (1, 0)$  et  $B = (0, 1)$ . Calculer  $N(A)$ ,  $N(B)$  et  $N(A + B)$ .  $N$  est-elle une norme ?

**Solution** (Ex.57 – Inégalités de HÖLDER et de MINKOWSKI, normes  $\|\cdot\|_p$ )

Soit  $(p, q) \in ]0; +\infty[^2$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . On dit que  $p$  et  $q$  sont deux exposants conjugués.

1. a)  $\forall x > 0$ ,  $\ln''(x) = \frac{1}{x^2} < 0$  donc  $\ln$  est concave. L'inégalité de concavité appliquée à  $u^p$  et  $v^q$  donne

$$\ln\left(\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(u^p) + \frac{1}{q}\ln(v^q) \quad (= \ln u + \ln v)$$

En composant par exp (croissante) :

$$\forall (u, v) \in ]0; +\infty[^2, \quad uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Avec la convention usuelle  $0^\alpha = 0$  pour tout  $\alpha > 0$ , l'inégalité demeure lorsque  $u = 0$  ou  $v = 0$ .

b)  $\sum_{k=1}^n |u_k v_k| \leq \sum_{k=1}^n \left( \frac{|u_k|^p}{p} + \frac{|v_k|^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n |u_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n |v_k|^q = 1$

c) On pose pour tout  $k \in [[1; n]]$ ,  $u_k = \frac{x_k}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}}$  et  $v_k = \frac{y_k}{\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}}$ .

de sorte qu'on puisse appliquer l'inégalité précédente. Alors

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}} \frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}} \right) \leq 1$$

qui conduit (les dénominateurs sont indépendants de  $k$ ) à l'inégalité de Hölder

d) Lorsque  $p = 2$ , on reconnaît l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

2. a) •  $\sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$

•  $\sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$

• On a :  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq}$  d'où  $pq = p+q$  et  $(p-1)q = p$ .

En sommant les inégalités précédentes :

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \left[ \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p} \right] \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{1-1/p}$$

En faisant passer le second facteur du membre de droite à gauche, on obtient l'inégalité de Minkowski.

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p}$$

---

b) •  $\|\cdot\|_p$  vérifie l'axiome de positivité, l'axiome de séparation et l'axiome d'homogénéité (aucun problème).

• L'inégalité de Minkowski n'est autre que l'inégalité triangulaire pour

$\|\cdot\|_p$ .

• Donc  $\|\cdot\|_p$  est une bien norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

3. D'après le cours,  $\|\cdot\|_1$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

4. Soit  $M = \sup_{1 \leq k \leq n} \{|x_k|\}$  et  $m$  le nombre de  $x_k$  tels que  $|x_k| = M$ .

$$\text{On a : } (M^p)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \leq (n \cdot M^p)^{1/p},$$

c'est-à-dire :  $M \leq \|(x_k)_{1 \leq k \leq n}\|_p \leq n^{1/p} M$ .

Or :  $n^{1/p} = \exp \ln(n)/p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$ , donc par encadrement :

$$\|(x_k)_{1 \leq k \leq n}\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|(x_k)_{1 \leq k \leq n}\|_\infty.$$

$\|\cdot\|_\infty$  est, d'après le cours, sur  $\mathbb{R}^n$ .

5.  $N(A) = 1$ ,  $N(B) = 1$ ,  $N(A + B) = 2^{1/p} > 2$  car  $\frac{1}{p} > 1$ , d'où

$$N(A + B) > N(A) + N(B)$$

et  $N$  n'est pas une norme car elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire.



# Chapitre 18

## Variation des constantes et wronskien

Dans ce paragraphe, on étudie les équations différentielles linéaires scalaires. Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle ouvert éventuellement non borné  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Par convention, la variable de ces fonctions sera notée  $t$ , et on l'omettra fréquemment lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Ainsi «  $t^2y' - 2ty = f$  » signifiera «  $t^2y'(t) - 2ty(t) = f(t)$  ».

De même, l'intervalle de définition des fonctions ne sera pas systématiquement rappelé. Ainsi, si  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $y$  sont définies sur un intervalle  $I$ ,

$$\ll y'' + ay' + by = c \gg$$

doit s'interpréter

$$\ll \forall t \in I, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \gg.$$

Enfin, pour désigner une primitive quelconque de la fonction continue  $f : t \mapsto f(t)$ , on écrira éventuellement

$$F : t \mapsto \int^t f(s)ds$$

en vertu du théorème fondamental de l'analyse, puisque la borne inférieure de l'intervalle ne sert qu'à fixer une constante.

### Exercice 58

*Wronskien : définition et propriétés essentielles*

Soit  $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$  continues. On considère l'équation différentielle homogène

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\mathcal{H})$$

d'inconnue  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  deux fois dérivable.

On note  $H$  l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{H})$ .

Soit  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de  $(\mathcal{H})$ . On appelle *wronskien* de  $y_1$  et  $y_2$  la fonction définie sur  $I$  par

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

autrement dit

$$w : I \rightarrow \mathbb{K}, \quad t \mapsto y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t).$$

**1. Annulation du wronskien – I**

a) Justifier que si  $y_1$  et  $y_2$  sont liées, alors  $w$  est nul sur  $I$ .

b) Soit  $t_0 \in I$ . Soit  $\varphi : H \rightarrow \mathbb{K}^2, y \mapsto (y(t_0); y'(t_0))$ .

Justifier que  $\varphi$  est un isomorphisme.

En déduire que si  $(y_1, y_2)$  est libre, alors  $w(t_0) \neq 0$ .

c) Justifier que  $(y_1, y_2)$  est système fondamental de solutions de  $(\mathcal{H})$  si, et seulement si, il existe  $t_0 \in I$  tel que  $w(t_0) \neq 0$ , et que dans ce cas, on a :  
 $\forall t \in I, \quad w(t) \neq 0$ .

**2. Annulation du wronskien – II**

On se propose de retrouver la propriété précédente par une explicitation du wronskien.

a) Former une équation différentielle du premier ordre dont  $w$  est une solution.

b) En déduire que pour tout  $t_0$  fixé dans  $I$ , on a

$$\forall t \in I, \quad w(t) = w(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

c) Retrouver alors qu'on a l'alternative :

- soit  $\forall t \in I, w(t) = 0$  ;
- soit  $\forall t \in I, w(t) \neq 0$ .

**Solution (Ex.58 – Wronskien : définition et propriétés essentielles)**

**1. Annulation du wronskien – I**

a) Supposons pour fixer les idées qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $y_2 = \lambda y_1$ . Alors

$$\text{pour tout } t \in I, \quad \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} \text{ donc } w(t) = 0.$$

---

b) On sait que  $\dim(\mathcal{H}) = 2 = \dim \mathbb{K}^2$ .

D'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire,  $(\mathcal{H})$  admet une unique solution  $y$  vérifiant  $y(t_0) = 0$  et  $y'(t_0) = 0$ , i.e.  $\varphi(y) = 0$ . Comme la fonction nulle vérifie cette propriété,  $\text{Ker}(\varphi)$  est réduit à  $\{0\}$  et  $\varphi$  est injectif. Avec l'égalité des dimensions, cela prouve que  $\varphi$  est un isomorphisme.

Si  $(y_1, y_2)$  est libre, c'est une base de  $\mathcal{H}$  et son image  $(\varphi(y_1), \varphi(y_2))$  par l'isomorphisme  $\varphi$  est une base de  $\mathbb{K}^2$ .

Donc  $\det(\varphi(y_1), \varphi(y_2)) \neq 0$ . Or  $\det(\varphi(y_1), \varphi(y_2)) = w(t_0)$  par définition de  $\varphi$  et  $w$ . Donc  $w(t_0) \neq 0$ .

c)  $(y_1, y_2)$  est système fondamental de solutions de  $(\mathcal{H})$  si, et seulement si,  $(y_1, y_2)$  est une base de  $(\mathcal{H})$  – et comme  $\dim(\mathcal{H}) = 2$  – si, et seulement si,  $(y_1, y_2)$  est une famille libre de  $(\mathcal{H})$ .

a) et b) donnent alors la propriété voulue.

## 2. Annulation du wronskien – II

On se propose de retrouver la propriété précédente par une explicitation du wronskien.

a) Former une équation différentielle du premier ordre dont  $w$  est une solution.

On observe que :  $\forall t \in I, w'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1''(t)$

$$\begin{aligned} w'(t) &= y_1(t)(-a(t)y_2'(t) - b(t)y_2(t)) - y_2(t)(-a(t)y_1'(t) - b(t)y_1(t)) \\ &= -a(t)w(t) \end{aligned}$$

Donc  $w$  est solution différentielle linéaire homogène d'ordre 1

$$w' + aw = 0.$$

b) On sait que les solutions de cette équation sont toutes les fonctions

$$t \mapsto k \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$$

où  $k$  est une constante de  $\mathbb{K}$ .

Donc

$$\forall t \in I, w(t) = w(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right).$$

c) Soit  $t_0 \in I$ .

- Si  $w(t_0) = 0$ , alors  $w = 0$  sur  $I$ .
- Si  $w(t_0) \neq 0$ , alors  $w \neq 0$  sur  $I$  puisqu'une exponentielle ne s'annule jamais.

*Cqfd.*

**Exercice 59**

*Recherche d'une seconde solution à  $(\mathcal{H})$*

1. *Un exemple* –

a) Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . À quelle condition

$$y'' + ay' + by = 0$$

admet-elle  $t \mapsto \exp(\alpha t)$  comme solution ?

b) On considère sur  $I = ]0; +\infty[$  l'équation

$$y'' - \left(1 + \frac{1}{t}\right)y' + \frac{1}{t}y = 0 \quad (\mathcal{H})$$

Donner une solution  $y_1$  (quasi-)évidente de  $(\mathcal{H})$ .

c) Soit  $y_2$  une solution de  $(\mathcal{H})$  et  $w$  le wronskien de  $y_1$  et  $y_2$ . Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{K}$  tel que

$$w : t \mapsto kte^{-t}.$$

d) En déduire une solution  $y_2$  de  $(\mathcal{H})$ , indépendante de  $y_1$ .

e) Donner les solutions de  $(\mathcal{H})$ .

2. On suppose que  $y_1$  est une solution ne s'annulant pas sur  $I$  de l'équation

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\mathcal{H})$$

Soit  $t_0 \in I$  et  $w : t \mapsto \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$ .

a) Montrer que

$$y_2 : t \mapsto y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{w(u)}{y_1^2(u)} du$$

est une solution de  $(\mathcal{H})$  linéairement indépendante de  $y_1$ .

b) *Explication* –

Expliquer l'origine de cette formule, en analysant l'exemple initial.

3. *Application* –

On considère sur  $I = ]1; +\infty[$  l'équation

$$2t(t+1)y'' - (t-1)y' + y = 0 \quad (\mathcal{H})$$

où  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois dérivable.

a) Déterminer les solutions polynomiales de  $(\mathcal{H})$ .

b) Déterminer deux constantes  $a$  et  $b$  telles que

$$\forall u \in I, \quad \frac{u^2 + 1}{(u^2 - 1)^2} = \frac{a}{(u - 1)^2} + \frac{b}{(u + 1)^2}.$$

c) Déterminer un système fondamental de solutions de  $(\mathcal{H})$

- i – en suivant la démarche de la première question ;
- ii – en appliquant la formule de la deuxième question.

**Solution (Ex.59 – Recherche d'une seconde solution à  $(\mathcal{H})$ )**

1. *Un exemple –*

a)  $y : t \mapsto \exp(\alpha t)$  est solution de l'équation  $y'' + ay' + by = 0$  si, et seulement si,  $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ , puisque  $y$  n'est jamais nulle.

b) On observe que  $1 + a + b = 0$  donc  $\exp$  est solution de  $(\mathcal{H})$ .

c) On sait que  $w$  est solution de  $w' + aw = 0$ , donc qu'il existe  $k \in \mathbb{K}$  tel que

$$w : t \mapsto k \exp(-A(t))$$

où  $A$  désigne une primitive de  $a : t \mapsto -1 - \frac{1}{t}$ .

Donc  $w(t) = k \exp(t + \ln(t)) = kte^t$ .

d) Or  $w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$  donne

$$e^t y_2' - e^t y_2 = kte^t.$$

Comme toute fonction proportionnelle à  $y_2$  est encore solution de l'équation HOMOGENÈNE  $(\mathcal{H})$ , on peut faire l'hypothèse que  $k = 1$ . D'où :

$$y_2' - y_2 = t \quad (\mathcal{E}).$$

Si on ne voit pas de solution évidente, utilisons la méthode de la variation de la constante et posons  $y_2 = \lambda(t)e^t$  avec  $\lambda$  fonction dérivable sur  $I$ . On a :

$$y_2' = (\lambda' + \lambda)e^t.$$

$y_2$  vérifie  $(\mathcal{E})$  si, et seulement si,  $\lambda'e^t = t$  si, et seulement si,  $\lambda' = te^{-t}$ .

En intégrant par parties,  $\lambda = -(t + 1)e^{-t}$  convient donc  $y_2 = -(t + 1)$  convient.  $\mathcal{H}$  étant un espace vectoriel, on peut proposer  $y_2 : t \mapsto t + 1$ .

Comme on a raisonné par implication, on vérifie réciproquement que  $y_2 : t \mapsto t + 1$  est bien solution, clairement indépendante de  $y_1 = \exp$ .

e)  $\mathcal{H} = \text{Vect}(\exp, t \mapsto t + 1)$ .

2. a) Soit  $v : t \mapsto \int_{t_0}^t \frac{w(u)}{y_1^2(u)} du$ .

Pour plus de lisibilité, j'omets la variable  $t \in I$ . On a :

$$y_2 = y_1 v$$

$$y_2' = y_1' v + y_1 \frac{w}{y_1^2} = y_1' v + \frac{w}{y_1}$$

$$y_2'' = y_1'' v + y_1' \frac{w}{y_1^2} + \frac{w'}{y_1} - \frac{w y_1'}{y_1^2} = y_1'' v - \frac{aw}{y_1}$$

D'où :  $y_2'' + ay_2' + by_2 = v(y_1'' + ay_1' + by_1) - \frac{aw}{y_1} + \frac{aw}{y_1} = v \times 0 = 0$ .

$y_2$  est bien solution de  $(\mathcal{H})$ .

De plus :  $y_2 = y_1 v$  avec  $v' = \frac{w}{y_1^2} \neq 0$  par définition de  $w$ . Comme  $v$  n'est pas constante,  $y_2$  est linéairement indépendante de  $y_1$ .

- b) Par l'exercice 1,  $w$  est le wronskien de  $y_1$  et  $y_2$  donc  $y_2$  est solution de l'équation

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = w \quad (\mathcal{E}).$$

$y_1$  est une solution évidente non nulle de l'équation homogène associée à  $(\mathcal{E})$ . Cherchons une solution de  $(\mathcal{E})$  par variation de la constante. Soit  $f$  dérivable et  $y = f y_1$ .

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = w \iff f' y_1^2 = w \iff f' = \frac{w}{y_1^2}$$

Donc  $f : t \mapsto \int^t \frac{w(s)}{y_1(s)^2} ds$  (i.e. une primitive de  $\frac{w}{y_1^2}$ ) convient.

D'où la formule annoncée.

### 3. Application –

- a) Soit  $y$  une solution polynomiale non nulle (s'il en existe!) de  $(\mathcal{H})$ . Je note  $d$  son degré et  $a_d$  son coefficient dominant.

Le coefficient de degré  $d$  de  $2t(t+1)y'' - (t-1)y' + y$  est

$$2d(d-1)a_d - da_d + a_d.$$

Il vaut 0 puisque  $y$  vérifie  $(\mathcal{H})$  et comme  $a_d \neq 0$ , on a :

$$2d^2 - 3d + 1 = 0.$$

La seule solution entière est  $d = 1$ , donc s'il existe une telle solution, elle est de degré 1.

Posons  $y(t) = at + b$ .

$$y \in \mathcal{H} \iff -(t-1)a + at + b = 0 \iff (a = 1, b = -1).$$

L'unique solution polynomiale de  $(\mathcal{H})$  est  $y : t \mapsto t - 1$ .

- b)  $\forall u \in \mathbb{I}, \frac{u^2 + 1}{(u^2 - 1)^2} = \frac{1/2}{(u - 1)^2} + \frac{1/2}{(u + 1)^2}$ .

- c) Déterminer un système fondamental de solutions de  $(\mathcal{H})$ .

Soit  $y_1 : t \mapsto t - 1$ .

$(\mathcal{H})$  s'écrit sous forme « normalisée »

$$y'' + \frac{1-t}{2t(t+1)}y' + \frac{1}{2t(t+1)}y = 0$$

Une primitive de  $a : t \mapsto \frac{1-t}{2t(t+1)}$  est  $A : t \mapsto \frac{\ln(t)}{2} - \ln(t+1)$ , obtenue

par la décomposition classique  $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$ .

Soit  $y_2$  une autre solution indépendante de  $y_1$ . Comme  $y_2$  est définie à une constante multiplicative près, je peux choisir pour wronskien

$$w : t \mapsto \exp(-A(t)) = \frac{t+1}{\sqrt{t}}.$$

$$\text{i - } \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = w \iff (t+1)y_2' - y_2 = w \iff y_2' - \frac{1}{t-1}y_2 = \frac{t+1}{(t-1)\sqrt{t}}$$

L'équation homogène  $y_2' - \frac{1}{t-1}y_2 = 0$  admet  $t \mapsto t-1$  comme solution.

Par la méthode de variation de la constante, en posant  $y(t) = k(t)(t-1)$  où  $k$  est dérivable,  $y$  est solution particulière si et seulement si  $(t-1)k'(t)(t-1) = 0$ , i.e.  $k'(t) = \frac{t+1}{(t-1)^2\sqrt{t}}$ .

Primitivons cette dernière fonction.

$$\begin{aligned} \int^t \frac{s+1}{\sqrt{s}(s-1)^2} ds &\stackrel{s=u^2}{=} 2 \int^{\sqrt{t}} \frac{u^2+1}{(u^2-1)^2} du \\ &= \int^{\sqrt{t}} \left( \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2} \right) du \\ &= -\frac{1}{\sqrt{t}-1} - \frac{1}{\sqrt{t}+1} \\ &= -\frac{2\sqrt{t}}{t-1} \end{aligned}$$

Donc  $y(t) = -2\sqrt{t}$  est une solution. Donc  $y_2 : t \mapsto \sqrt{t}$  est une solution de  $(\mathcal{H})$ , indépendante de  $y_1$ .

$(t \mapsto t-1, t \mapsto \sqrt{t})$  est un système fondamental de solutions de  $(\mathcal{H})$ .

ii - Soit j'utilise la formule de la question précédente

$$\int^t \frac{w(s)}{y_1(s)^2} ds = \int^t \frac{s+1}{\sqrt{s}(s-1)^2} ds = -\frac{2\sqrt{t}}{t-1} \text{ par le calcul précédent.}$$

Donc  $y_2(t) = y_1(t) \int^t \frac{w(s)}{y_1(s)^2} ds = -2\sqrt{t}$  convient, et on peut simplifier par linéarité en prenant  $y_2 : t \mapsto \sqrt{t}$ .

$(t \mapsto t-1, t \mapsto \sqrt{t})$  est un système fondamental de solutions de  $(\mathcal{H})$ .

*Remarque : on constate - sans surprise - que les « deux » méthodes conduisent exactement aux mêmes calculs.*

### Exercice 60

*Variation des constantes alias méthode de Lagrange*

1. *Un exemple* –

On considère sur  $\mathbb{R}$  l'équation

$$y'' + y = \cos(t) \quad (\mathcal{E})$$

où  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois dérivable.

a) Donner l'ensemble  $H$  des solutions de l'équation homogène ( $\mathcal{H}$ ) associée à ( $\mathcal{E}$ ).

b) Soit  $\lambda, \mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles quel

$$\lambda' \sin + \mu' \cos = 0.$$

On pose

$$y = \lambda \sin + \mu \cos.$$

Montrer que  $y$  est une solution de ( $\mathcal{E}$ ) si, et seulement si,

$$\begin{cases} \lambda' \sin + \mu' \cos = 0 \\ \lambda' \cos - \mu' \sin = \cos \end{cases}$$

c) Résoudre ( $\mathcal{E}$ ).

2. *Méthode de Lagrange, ou variation des constantes* –

Soit  $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{K}$  continues. On considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c \quad (\mathcal{E})$$

d'inconnue  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  deux fois dérivable.

On note ( $\mathcal{H}$ ) l'équation homogène associée.

Soit  $y_1$  et  $y_2$  formant un système fondamental de solutions de ( $\mathcal{H}$ ). On note  $w$  le wronskien de  $y_1$  et  $y_2$ , défini sur  $I$  par

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} : t \mapsto y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t).$$

On suppose connus les résultats du premier exercice.

Soit  $\lambda, \mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles quel

$$\lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0.$$

On pose

$$y = \lambda y_1 + \mu y_2.$$

a) Montrer que  $y$  est une solution de ( $\mathcal{E}$ ) si, et seulement si,

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c \end{cases}$$

b) Justifier que ce dernier système possède un unique solution.

c) Exprimer  $\lambda'$  et  $\mu'$  à l'aide de  $c, y_1, y_2$  et  $w$ .

d) Montrer que si  $y$  est solution, alors on peut l'écrire

$$y : t \mapsto \int^t \frac{y_1(s)y_2(t) - y_2(s)y_1(t)}{w(s)} c(s) ds.$$

e) Réciproquement, soit  $t_0 \in I$  et

$$y : t \mapsto \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)y_2(t) - y_2(s)y_1(t)}{w(s)} c(s) ds.$$

Vérifier que  $y$  est une solution de  $(\mathcal{E})$ ... *prudence dans la dérivation...*

f) Soit  $t_0 \in I$ . Justifier que le problème

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(t_0) = y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

possède une unique solution et indiquer cette solution.

### 3. Application -

*On ne retient en général pas la formule intégrale précédente et on préfère raisonner en faisant varier les constantes.*

Soit sur  $I = ]0; +\infty[$  l'équation

$$t^2 y'' + 4ty' + 2y = \ln(t) \quad (\mathcal{E})$$

d'inconnue  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable.

a) Déterminer les solutions du type  $t \mapsto t^\alpha$  (où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) de l'équation homogène  $(\mathcal{H})$  associée à  $(\mathcal{E})$ .

b) Résoudre  $(\mathcal{E})$ .

**Solution (Ex.60 - Variation des constantes alias méthode de Lagrange)**

#### 1. Un exemple -

a)  $H = \text{Vect}(\cos, \sin) = \{t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) / (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$ .

b)  $y = \lambda \sin + \mu \cos$ ,

$$y' = \lambda' \sin + \lambda \cos + \mu' \cos - \mu \sin = \lambda \cos - \mu \sin \text{ car } \lambda' \sin + \mu' \cos = 0,$$

$$y'' = \lambda' \cos - \lambda \sin - \mu' \sin - \mu \cos, \text{ d'où}$$

$$y'' + y = \lambda' \cos - \mu' \sin$$

On a bien

$$y \text{ solution de } (\mathcal{E}) \text{ ssi } (\mathcal{S}) \begin{cases} \lambda' \sin + \mu' \cos = 0 \\ \lambda' \cos - \mu' \sin = \cos \end{cases}.$$

c) • Déterminons une solution particulière de  $(\mathcal{E})$ .

Dans  $(\mathcal{S})$ ,  $\sin L_1 + \cos L_2 \rightarrow L_1$  et  $\cos L_1 - \sin L_2 \rightarrow L_2$  donne

$$\begin{cases} \lambda' = \cos^2 \\ \mu' = -\sin \cos \end{cases}$$

Primitivons en prenant

$$\begin{cases} \lambda(t) = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \\ \mu(t) = \frac{\cos(2t)}{4} \end{cases}$$

$$\text{Posons alors } f : t \mapsto \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right) \sin(t) + \frac{\cos(2t)}{4} \cos(t).$$

$$f(t) = \frac{t \sin(t)}{2} + \frac{\cos(t)}{4}, \text{ et comme } \frac{\cos}{4} \in \mathcal{H}, \text{ on peut proposer}$$

$$g : t \mapsto \frac{t \sin(t)}{2}.$$

Ayant raisonné par implication et fixé quelques constantes au passage, je vérifie la réponse obtenue.

$$g : t \mapsto \frac{t \sin(t)}{2},$$

$$g' : t \mapsto \frac{\sin(t) + t \cos(t)}{2}$$

$$g'' : t \mapsto \frac{\cos(t) + \cos(t) - t \sin(t)}{2} = \cos(t) - y(t)$$

donc  $g$  est bien solution de  $y'' + y = \cos$ .

• Par le principe de superposition, l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$  est

$$E = \left\{ t \mapsto \lambda \sin(t) + \mu \cos(t) + \frac{t \sin(t)}{2}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. a)  $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ ,

$$y' = \lambda' y_1 + \lambda y_1' + \mu' y_2 + \mu y_2' = \lambda y_1' + \mu y_2' \text{ car } \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0,$$

$$y'' = \lambda' y_1' + \lambda y_1'' + \mu' y_2' + \mu y_2'', \text{ d'où}$$

$$y'' + ay + by = \lambda(y_1'' + ay_1' + by_1) + \mu(y_2'' + ay_2' + by_2) + \lambda' y_1' + \mu' y_2'$$

$$= \lambda' y_1' + \mu' y_2' \text{ car } (y_1, y_2) \in \mathcal{H}^2.$$

On a bien :

$$y \text{ est une solution de } (\mathcal{E}) \text{ ssi } \begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c \end{cases}$$

b) Soit  $t \in I$ . Le déterminant du système  $\begin{cases} \lambda'(t)y_1(t) + \mu'(t)y_2(t) = 0 \\ \lambda'(t)y_1'(t) + \mu'(t)y_2'(t) = c(t) \end{cases}$

$$\text{est } \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = w(t) \neq 0 \text{ par l'exercice premier.}$$

Donc ce système possède une unique solution.

c) La résolution du système conduit à

$$\begin{cases} \lambda'(t) = \frac{-c(t)y_2(t)}{w(t)} \\ \mu'(t) = \frac{c(t)y_1(t)}{w(t)} \end{cases}$$

d) En primitivant,

$$y(t) = y_1(t) \left( \int^t \frac{-c(s)y_2(s)}{w(s)} ds + k_1 \right) + y_2(t) \left( \int^t \frac{c(s)y_1(s)}{w(s)} ds + k_2 \right),$$

et comme  $k_1 y_1 + k_2 y_2$  est solution de  $(\mathcal{H})$ , on peut simplement écrire

$$y(t) = \int^t \frac{y_1(s)y_2(t) - y_2(s)y_1(t)}{w(s)} c(s) ds.$$

- e) Soit  $v_1 : t \mapsto - \int_{t_0}^t \frac{y_2(s)}{w(s)} c(s) ds$  et  $v_2 : t \mapsto \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)}{w(s)} c(s) ds$  de sorte que
- $$y = v_1 y_1 + v_2 y_2.$$

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2,$$

$$y' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2' = -\frac{y_2}{w} c y_1 + v_1 y_1' + \frac{y_1}{w} c y_2 + v_2 y_2' = v_1 y_1' + v_2 y_2'$$

$$y'' = v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2'' = \frac{-y_2 c y_1' + y_1 c y_2'}{w} + v_1 y_1'' + v_2 y_2''$$

$$= \frac{c w}{w} + v_1 y_1'' + v_2 y_2'' = c + v_1 y_1'' + v_2 y_2''$$

Il vient alors :

$$y'' + ay' + by = v_1 (y_1'' + ay_1' + by_1) + v_2 (y_2'' + ay_2' + by_2) + c = c$$

Donc  $y$  est solution de  $(\mathcal{E})$ .

- f) D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, ce système possède une unique solution.

En reprenant les calculs précédents,  $v_1(t_0) = 0 = v_2(t_0)$  donc  $y$  et  $y'$  s'annulent en  $t_0$ , donc la fonction précédente est la solution cherchée.

### 3. Application –

*On ne retient en général pas la formule intégrale précédente et on préfère raisonner en faisant varier les constantes.*

4. a)  $t \mapsto \frac{1}{t}$  et  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  sont solutions de  $(\mathcal{H})$ . Étant non colinéaires, elles forment un système fondamental.

- b) *Attention à normaliser l'équation !!!*

$$\text{Ici : } c(t) = \frac{\ln(t)}{t^2}.$$

Avec les mêmes notations qu'en 1.

$$\lambda'(t) = \ln(t), \mu'(t) = -t \ln(t),$$

$$\lambda(t) = t \ln(t) - t, \mu(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t^2 \ln(t)}{2} \quad (\text{I.P.P...})$$

Et  $y(t) = \ln(t) - 1 + \frac{1}{4} - \frac{\ln(t)}{2} = \frac{\ln(t)}{2} - \frac{3}{4}$  est une solution particulière.

L'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$  est donc

$$\left\{ t \mapsto \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{3}{4}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

### Exercice 61

*Sur une autre application du wronskien*

On suppose à nouveau connus les résultats de l'exercice premier.

Soit  $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$  dérivables. On considère l'équation différentielle homogène

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\mathcal{H})$$

d'inconnue  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  deux fois dérivable.

1. Dans cette question *uniquement*, on suppose que  $a$  et  $b$  sont constantes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $(\mathcal{H})$  admette un système fondamental de solutions  $(y_1, y_2)$  tel que  $y_2 : t \mapsto ty_1(t)$ .
2. On suppose dans cette question *uniquement* que  $(\mathcal{H})$  admet un système fondamental de solutions  $(y_1, y_2)$  tel que, pour tout  $t$  de  $I$ ,  $y_2(t) = ty_1(t)$ .
  - a) Expliciter le wronskien de  $w$  et en déduire une équation différentielle d'ordre 1 faisant intervenir  $a$  dont  $y_1$  est solution.
  - b) En déduire que les fonctions  $a$  et  $b$  satisfont l'équation

$$2a' + a^2 - 4b = 0.$$

3. On suppose dans cette question *uniquement* que  $2a' + a^2 - 4b = 0$ . Soit  $y_1$  une solution non nulle de  $y_1' + \frac{a}{2}y_1 = 0$ . Soit  $y_2 : I \rightarrow \mathbb{K}, t \mapsto ty_1(t)$ . Montrer que  $(y_1, y_2)$  est un système fondamental de solutions de  $(\mathcal{H})$ .
4. Résoudre l'équation d'inconnue  $y : I \rightarrow \mathbb{C}$  deux fois dérivable

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0 \quad (\mathcal{H}).$$

5. Résoudre l'équation de la question précédente en cherchant les solutions développables en série entière.

**Solution (Ex.61 – Sur une autre application du wronskien)**

1. D'après le cours, si l'équation caractéristique  $(\mathcal{E}) : x^2 + ax + b = 0$  possède deux solutions distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors l'ensemble des solutions est

$$\text{Vect}(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$$

et aucune solution n'est du type  $t \mapsto ty_1(t)$  avec  $y_1$  elle-même solution non nulle.

En effet, si  $y_2(t) = t(\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t})$  alors  $y_2(0) = 0$  entraîne  $\mu = -\lambda$ , puis  $y_2'(t) = \lambda(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) + t\lambda(r_1 e^{r_1 t} - r_2 e^{r_2 t})$  donne  $y_2'(0) = 0$ , donc  $y_2$  est la fonction nulle par unicité de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Ainsi si  $y_1 : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$  et  $y_2 : t \mapsto t y_1(t)$  sont solutions, alors  $y_1 = y_2 = 0$ .

Mais si  $(\mathcal{E})$  admet une solution double  $r$ , alors  $(t \mapsto e^{rt}, t \mapsto t e^{rt})$  est un système fondamental satisfaisant la condition cherchée.

Donc une condition nécessaire et suffisante est  $\Delta = 0$ , i.e.

$$a^2 - 4b = 0.$$

2. On suppose que  $(\mathcal{H})$  admet un système fondamental de solutions  $(y_1, y_2)$  tel que, pour tout  $t$  de  $I$ ,  $y_2(t) = t y_1(t)$ .

$$\text{a) } w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & t y_1(t) \\ y_1'(t) & y_1(t) + t y_1'(t) \end{vmatrix} = y_1^2(t).$$

Par l'exercice 1, puisque  $w$  ne s'annule pas,  $\frac{w'}{w} = -a$  donne  $\frac{2y_1 y_1'}{y_1^2} = -a$

$$\text{donc } y_1' + \frac{a}{2} y_1 = 0.$$

- b) En dérivant à nouveau cette équation

$$y_1'' + \frac{a}{2} y_1' + \frac{a'}{2} y_1 = 0.$$

Or  $y_1'' = -a y_1' - b y_1$ , donc

$$-\frac{a}{2} y_1' + \left(\frac{a'}{2} - b\right) y_1 = 0.$$

Or  $y_1' = -\frac{a}{2} y_1$ , donc

$$\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a'}{2} - b\right) y_1 = 0.$$

Si  $y_1$  s'annulait en un point,  $w$  s'annulerait aussi, ce qui est exclu.

Donc les fonctions  $a$  et  $b$  satisfont l'équation

$$2a' + a^2 - 4b = 0.$$

3. • Comme  $y_1' = -\frac{a}{2} y_1$ ,  $y_1$  est deux fois dérivable.

$$y_1'' = -\frac{a'}{2} y_1 - \frac{a}{2} y_1' = \left(-\frac{a'}{2} + \frac{a^2}{4}\right) y_1 \text{ donc}$$

$$y_1'' + a y_1' + b y_1 = \left(-\frac{a'}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b\right) y_1 = \left(\frac{-2a' - a^2 + 4b}{4}\right) y_1 = 0.$$

$y_1$  est bien solution de  $(\mathcal{H})$ .

•  $y_2 : t \mapsto t y_1(t)$ ,  $y_2' : t \mapsto y_1(t) + t y_1'(t)$  et  $y_2'' : t \mapsto 2y_1'(t) + t y_1''(t)$ , donc

$$y_2''(t) + a(t) y_2'(t) + b(t) y_2(t) = t \underbrace{(y_1''(t) + a(t) y_1'(t) + b(t) y_1(t))}_{=0} + \underbrace{2y_1'(t) + a y_1(t)}_{=0}$$

et  $y_2$  est bien solution de  $(\mathcal{H})$ , linéairement indépendante de  $y_1$  puisque  $w = y_1^2$  n'est pas la fonction nulle.

4.  $(\mathcal{H})$  satisfait la relation  $2a' + a^2 - 4b = 0$ .

Soit  $y_1$  est solution non nulle de  $y' + \frac{a}{2}y = 0$  i.e.  $y' - 2xy = 0$ , par exemple  $y_1 : t \mapsto e^{t^2}$ . Et soit  $y_2 : t \mapsto te^{t^2}$ .

Alors par la question précédente  $(y_1, y_2)$  est un système fondamental de solutions de  $(\mathcal{H})$ .

5. En écrivant  $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  que l'on suppose de rayon non nul, on obtient

$$y \text{ vérifie } (\mathcal{H}) \iff (\mathcal{S}) \begin{cases} 2a_2 - 2a_0 = 0 \\ 6a_3 - 6a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2, \\ (n+1)(n+2)a_{n+2} - (4n+2)a_n + 4a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Le calcul des premiers termes de la suite  $(a_n)$  donne

$$a_2 = a_0, a_4 = \frac{1}{2}a_0, a_6 = \frac{1}{6}a_0, a_8 = \frac{1}{24}a_0 \dots$$

$$a_3 = a_1, a_5 = \frac{1}{2}a_1, a_7 = \frac{1}{6}a_1, a_9 = \frac{1}{24}a_1 \dots$$

ce qui peut laisser conjecturer  $a_{2n} = \frac{1}{n!}a_0$  et  $a_{2n+1} = \frac{1}{n!}a_1$ , conjecture que l'on peut prouver par récurrence.

On obtient alors

$$y(z) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{n!} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!} = a_0 e^{z^2} + a_1 z e^{z^2}.$$

On vérifie sans peine que  $z \mapsto e^{z^2}$  et  $z \mapsto z e^{z^2}$  sont solutions (de rayon infini), et comme l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2, ces deux fonctions (indépendantes) engendrent toutes les solutions de  $(\mathcal{H})$ .

**Exercice 62**

*Jouons au colleur*

M. M souhaite proposer des exercices de résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre aux solutions pas trop compliquées.

Il se donne deux fonctions  $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$  deux fois dérivables et linéairement indépendantes et note  $(\mathcal{H})$  une équation différentielle homogène dont  $(y_1, y_2)$  est un système fondamental de solutions. Par ailleurs, il note  $w$  le wronskien de ce système.

1. a) Soit  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  deux fois dérivable. Justifier que  $y$  est solution de  $(\mathcal{H})$  si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} cccy_1 & y_2 & y \\ y'_1 & y'_2 & y' \\ y''_1 & y''_2 & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

- b) En déduire une équation  $(\mathcal{H})$  normalisée, i.e. dans laquelle le coefficient de  $y''$  vaut 1 dont  $(y_1, y_2)$  est un système fondamental de solutions. On

exprimera les coefficients à l'aide de  $w, w'$  et  $\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y''_1 & y''_2 \end{vmatrix}$ .

- c) Justifier que cette écriture normalisée est unique, i.e. que si  $y_1$  et  $y_2$  sont aussi solutions d'une équation

$$y'' + ay' + by = 0,$$

alors les fonctions  $a$  et  $b$  sont exactement celles trouvées dans b).

2. a) Donner une équation différentielle linéaire normalisée d'ordre 2 sur  $I = ]0; +\infty[$  dont  $t \mapsto \sqrt{t}$  et  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  soit solutions.

- b) Donner une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre sur  $I = ]0; +\infty[$  dont l'ensemble des solutions est

$$E = \left\{ t \mapsto C_1\sqrt{t} + \frac{C_2}{\sqrt{t}} + t, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

**Solution (Ex.62 – Jouons au colleur)**

1. a) • Par structure de l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{H})$ ,  $y$  est solution de  $(\mathcal{H})$  si, et seulement si,  $y \in \text{Vect}(y_1, y_2)$ .

•  $(\mathcal{H}')$  :  $\begin{vmatrix} cccy_1 & y_2 & y \\ y'_1 & y'_2 & y' \\ y''_1 & y''_2 & y'' \end{vmatrix} = 0$  définit clairement une équation différentielle

linéaire homogène du second ordre car le coefficient de  $y''$  est  $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} =$

$w \neq 0$ .

- $y_1$  et  $y_2$  sont clairement solutions de  $(\mathcal{H}')$ , et étant linéairement indépendantes,  $y$  est solution de  $(\mathcal{H}')$  si, et seulement si,  $y \in \text{Vect}(y_1, y_2)$ .

*Cqfd.*

b) En développant le déterminant, avec  $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = w \neq 0$  et  $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y''_1 & y''_2 \end{vmatrix} = w'$ ,

$$\begin{vmatrix} cccy_1 & y_2 & y \\ y'_1 & y'_2 & y' \\ y''_1 & y''_2 & y'' \end{vmatrix} = 0 \iff wy'' - w'y' + \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y''_1 & y''_2 \end{vmatrix} y = 0$$

Donc

$$(\mathcal{H}) : \quad y'' - \frac{w'}{w}y' + \frac{1}{w} \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y''_1 & y''_2 \end{vmatrix} y = 0$$

c) Justifier que cette écriture normalisée est unique, *i.e.* que  
Supposons  $y_1$  et  $y_2$  solutions de

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Par différence,  $y_1$  et  $y_2$  sont solutions de l'équation différentielle homogène d'ordre 1

$$(\mathcal{H}_1) : \quad \left( a + \frac{w'}{w} \right) y' + \left( b - \frac{1}{w} \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y''_1 & y''_2 \end{vmatrix} \right) y = 0.$$

Si  $(\mathcal{H}_1)$  est une *vraie* équation différentielle homogène d'ordre 1, l'ensemble de ses solutions est un sous-espace vectoriel de dimension 1, or il contient au moins  $y_1$  et  $y_2$  qui sont indépendantes, donc est au moins de dimension 2. Cette contradiction induit que :  $\forall t \in I, a(t) + \frac{w'(t)}{w(t)} = 0$ .

Donc  $(\mathcal{H}_1)$  devient  $\left( b - \frac{1}{w} \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y''_1 & y''_2 \end{vmatrix} \right) y = 0$ . Et comme  $y_1$  et  $y_2$  ne peuvent s'annuler simultanément (car  $w \neq 0$ ), cela induit que sur  $I$ ,

$$b - \frac{1}{w} \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y''_1 & y''_2 \end{vmatrix} = 0.$$

D'où  $a = -\frac{w'}{w}$  et  $b = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y''_1 & y''_2 \end{vmatrix}$ . *Cqfd.*

2. a)  $w(t) = -\frac{1}{t}, w'(t) = \frac{1}{t^2}$  et  $\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y''_1 & y''_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4t^3}$ , d'où

$$(\mathcal{H}) : \quad y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{4t^2}y = 0$$

b) La partie homogène est  $(\mathcal{H})$ .

---

En prenant  $y = t$ , on a  $y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{4t^2}y = \frac{3}{4t}$ , donc l'équation suivante

$$(\mathcal{E}) : \quad y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{4t^2}y = \frac{3}{4t}$$

admet

$$E = \left\{ t \mapsto C_1\sqrt{t} + \frac{C_2}{\sqrt{t}} + t, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

pour ensemble de solutions.



# Chapitre 19

## Irrationalité de constantes célèbres

*Le programme de la filière PC n'est pas orienté vers les questions d'arithmétique, mais donne des outils suffisants pour aborder la question de l'irrationalité de certaines constantes.*

**Définition** –

• Rappelons qu'un nombre réel  $x$  est dit rationnel, s'il existe un unique couple  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tel que  $x = \frac{p}{q}$  et la fraction  $\frac{p}{q}$  soit irréductible.

Autrement dit tel que  $p$  et  $q$  n'aient pas de diviseurs entiers communs en dehors de 1 et  $-1$ .

• Un nombre réel  $x$  est dit irrationnel lorsqu'il n'existe pas de couple  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tel que  $x = \frac{p}{q}$ .

<b>Exercice 63</b>
--------------------

<i>Irrationalité de <math>\sqrt{2}</math></i>
---

On suppose que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  où la fraction  $\frac{p}{q}$  est irréductible.

1. Justifier que  $p^2$ , puis  $p$ , est pair.
2. En déduire que  $q^2$ , puis  $q$ , est pair.
3. Qu'en déduire ?

**Solution** (Ex.63 – *Irrationalité de  $\sqrt{2}$* )

1. On a  $\frac{p^2}{q^2} = 2$  donc  $p^2 = 2q^2$  donc  $p^2$  est pair. Or le carré d'un nombre impair est impair :  $(2k+1)^2 = 4(k^2+k) + 1$ . Donc  $p$  est nécessairement pair.
2. En posant  $p = 2p'$ , on a  $4p'^2 = 2q^2$  donc  $q^2 = 2p'^2$  donc  $q^2$  est pair, donc  $q$  est pair.
3.  $p$  et  $q$  sont pairs, donc  $\frac{p}{q}$  n'est pas irréductible, ce qui est absurde. Donc il n'existe pas de fraction irréductible  $\frac{p}{q}$  telle que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ .

**Exercice 64**

*Irrationalité de  $\log_{10}(2)$*

On rappelle que  $\log_{10}(2)$  est le nombre tel que  $10^{\log_{10}(2)} = 2$ .

Son lien avec le logarithme népérien est  $\log_{10}(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(10)}$ .

Montrer que  $\log_{10}(2)$  est irrationnel.

**Solution (Ex.64 – Irrationalité de  $\log_{10}(2)$ )**

Supposons  $\log_{10}(2) = \frac{p}{q}$  où  $\frac{p}{q}$  est une fraction irréductible. Comme  $\log_{10}(2) \in ]0; 1[$ ,  $0 < p < q$ .

Alors  $10^{p/q} = 2$ , donc  $10^p = 2^q$ , donc  $5^p = 2^{q-p}$ . Or si  $p \geq 1$  alors  $5^p$  est impair tandis que  $2^{q-p}$  est pair. C'est exclu. Donc  $p < 1$  ce qui est absurde. Donc  $\log_{10}(2)$  est irrationnel.

**Exercice 65**

*Irrationalité de  $e$*

On suppose que  $e = \frac{p}{q}$  où  $\frac{p}{q}$  est une fraction irréductible.

On pose  $s = q! \left( e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right)$ .

1. Justifier que  $s$  est un entier strictement positif.
2. Justifier que  $s = \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!}$  et montrer que  $s < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ .
3. Conclure.

**Solution (Ex.65 – Irrationalité de e)**

1.  $q!e = q! \frac{p}{q} = (q-1)!p$  est un entier.

$$q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} \text{ or pour tout } k \in [[0; q]], \frac{q!}{k!} \text{ est un entier.}$$

Donc  $s$  est un entier comme différence d'entiers.

$$\text{Comme } e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} = \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} > 0 \text{ et } q! > 0, s \text{ est strictement positif.}$$

2.  $e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} = \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$  donc  $s = \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!}$ .

Or  $\forall k \geq q+1$ ,

$$\frac{q!}{k!} = \frac{q!}{q!(q+1)(q+2)\dots(q+(k-q))} = \frac{1}{(q+1)(q+2)\dots(q+(k-q))}$$

$$\leq \frac{1}{2^{k-q}} \text{ car nous avons } k-q \text{ facteurs supérieurs à } 2.$$

De plus, l'inégalité est stricte dès que  $k \geq q+2$ .

$$\text{Donc } s = \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!} < \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-q}}.$$

3.  $\sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-q}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-1/2} = 1$ , donc  $s < 1$ . Or d'après 1.,  $s \geq 1$ . Ceci est absurde et  $e$  est irrationnel.

**Exercice 66**

*Irrationalité de  $\pi$*

La première démonstration de l'irrationalité de  $\pi$  est due à Jean Henri LAMBERT en 1766. Nous étudions ici une démonstration plus accessible attribuée à Ivan NIVEN en 1946<sup>1</sup>.

Pour tout entier  $n > 0$ , on considère la fonction

$$f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

1. Montrer qu'il existe  $n+1$  entier  $c_m$  où  $m \in [[n; 2n]]$  tels que

$$\forall x \in [0; 1], f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{m=n}^{2n} c_m x^m.$$

---

1. Les idées utilisées par Niven ne sont pas nouvelles en 1946 mais il fournit une synthèse très condensée des démonstrations précédentes.

2. Montrer que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f_n^{(m)}(0)$  est un nombre entier.
3. En observant que  $f_n(1-x) = f_n(x)$ , justifier que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f_n^{(m)}(1)$  est un nombre entier.
4. On suppose que  $\pi^2 = \frac{p}{q}$  où  $\frac{p}{q}$  est une fraction irréductible.  
On considère, pour tout  $n > 0$ , la fonction  $g_n$  sur  $[0; 1]$  :  
 $g_n : x \mapsto q^n \left[ \pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) + \dots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right]$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - a) Calculer la dérivée de  $h_n : x \mapsto g_n'(x) \sin(\pi x) - \pi g_n(x) \cos(\pi x)$  et en déduire que
 
$$I_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \pi \int_0^1 p^n \sin(\pi x) f_n(x) dx$$
 est un entier.
  - b) Montrer par ailleurs que  $0 < I_n \leq \frac{\pi p^n}{n!}$ .
  - c) En déduire une contradiction.
5. Justifier finalement que  $\pi$  est irrationnel.

**Solution (Ex.66 – Irrationalité de  $\pi$ )**

1. La formule du binôme donne  $(1-x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^k$ ,  
d'où  $f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{k+n} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n}^{2n} c_m x^m$  où  
$$c_m = (-1)^{m-n} \binom{n}{m-n} \in \mathbb{Z}.$$
  2. • 0 est racine de multiplicité  $n$  de  $x^n(1-x)^n$  donc  $f_n^{(m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$  pour tout  $m \in [0; n-1]$ .  
•  $x^n(1-x)^n$  étant de degré  $2n$ ,  $f_n^{(m)}$  est nulle pour tout  $m > 2n$  donc  $f_n^{(m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$  pour tout  $m > 2n$ .  
• Pour  $m \in [n; 2n]$ ,  $f_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!} c_m m! = \frac{m!}{n!} c_m$  (terme constant de la dérivée  $m$ -ième de  $f_n$ ). Donc  $f_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$ .
  3. En dérivant  $m$  fois la relation  $f_n(1-x) = f_n(x)$ , on a obtenu  
$$(-1)^m f_n^{(m)}(1-x) = f_n^{(m)}(x),$$
 donc  $f_n^{(m)}(1) = (-1)^m f_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$ .
  4. a) •  $\forall x \in [0; 1]$ ,  
$$h_n'(x) = g_n''(x) \sin(\pi x) + \pi g_n'(x) \cos(\pi x) - \pi g_n'(x) \cos(\pi x) + \pi^2 g_n(x) \sin(\pi x)$$

$$= (g_n''(x) + \pi^2 g_n(x)) \sin(\pi x)$$

Or  $g_n(x) = q^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2(n-k)} f_n^{(2k)}(x)$ , donc

$$g_n''(x) = q^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2(n-k)} f_n^{(2k+2)}(x) = q^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \pi^{2(n-k+1)} f_n^{(2k)}(x)$$

(la sommation s'arrête à  $n$  car  $f_n^{(2n+2)} = 0$  puisque  $\deg(f_n) = 2n$ .)

$$g_n''(x) = -\pi^2 g_n(x) + q^n \pi^{2n} f_n(x)$$

et par conséquent  $h_n'(x) = q^n \pi^{2n+2} f_n(x) \sin(\pi x) = \pi^2 p^n f_n(x) \sin(\pi x)$ .

• Alors

$$I_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \pi \int_0^1 p^n \sin(\pi x) f_n(x) dx = \frac{1}{\pi} [h_n(x)]_0^1$$

$$= \frac{1}{\pi} [g_n'(x) \sin(\pi x) - \pi g_n(x) \cos(\pi x)]_0^1$$

$$= g_n(1) + g_n(0)$$

$$g_n(x) = q^n \sum_{k=0}^n (-1)^k p^{2(n-k)} q^{2(k-n)} f_n^{(2k)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k p^{2(n-k)} q^{2k-n} f_n^{(2k)}(x)$$

et comme pour  $2k < n$ ,  $f_n^{(2k)}(0) = f_n^{(2k)}(1) = 0$ , dans cette somme, pour  $x = 0$  ou  $x = 1$ , les termes tels que  $2k < n$  sont nuls, et ceux pour lesquels  $2k \geq n$  sont tous entiers. Finalement,  $g(0)$  et  $g(1)$  sont entiers, et  $I_n$  est bien un entier.

b)  $I_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \pi \int_0^1 p^n \sin(\pi x) f_n(x) dx$  et

$\forall x \in [0; 1], 0 \leq \pi p^n \sin(\pi x) f_n(x) \leq \frac{\pi p^n}{n!}$ , donc par croissance de

l'intégrale  $0 \leq I_n \leq \frac{\pi p^n}{n!}$ .

Comme  $x \mapsto \pi p^n \sin(\pi x) f_n(x)$  est continue positive mais n'est pas la fonction nulle ( $\forall x \in ]0; 1[, \pi p^n \sin(\pi x) f_n(x) > 0$ ),  $I_n > 0$ .

c) Par les croissances comparées,  $\frac{\pi p^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel

que  $\frac{\pi p^N}{N!} < 1$ .

On a alors :

•  $I_N$  est un entier ;

•  $0 < I_N < 1$ .

Ceci est absurde.

5. Ce qui précède montre par l'absurde que  $\pi^2$  est irrationnel.

Si  $\pi$  était rationnel, disons  $\pi = \frac{a}{b}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , on aurait  $\pi^2 = \frac{a^2}{b^2}$  rationnel. Ceci est absurde, donc  $\pi$  est irrationnel.

# Chapitre 20

## La quête de $\pi$ par l'Arc-tangente

### Exercice 67

*Étude au bord du domaine de convergence, développement en série de  $\pi$*

On pose, sous réserve de,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

1. Justifier que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1; 1[$ .
2. a) Justifier que  $f$  est définie en  $-1$  et en  $1$ .  
b) Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0; 1]$ ,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Justifier que  $R_n$  est bornée sur  $[0; 1]$  et que

$$\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{2n+3}.$$

- c) En déduire que  $f$  est continue sur  $[-1; 1]$ .
3. Justifier que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

*Cette formule a été établie indépendamment vers 1670 par James Gregory et Gottfried Wilhelm Leibniz<sup>1</sup>, mais on la trouve déjà dans des écrits du milieu du XVème siècle provenant du sud de l'Inde.*

**Solution (Ex.67 – Étude au bord du domaine de convergence, développement en série)**

1. D'après le cours,  $f$  est la somme du développement en série entière de la fonction Arctan de rayon de convergence 1, donc  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1; 1[$ .

2. a)  $\left(\frac{1}{2n+1}\right)$  est une suite décroissante de limite nulle donc par le théorème des séries alternées, la série définissant  $f(1)$  converge.

De plus,  $f$  est impaire donc  $f(-1)$  existe et vaut  $-f(1)$ .

b)  $\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$  est une suite décroissante de limite nulle (car  $x \in [0; 1]$ ),

donc par le théorème des séries alternées,  $|R_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$ , ceci pour tout  $x \in [0; 1]$ .

Donc  $R_n$  est bornée sur  $[0; 1]$  et  $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{2n+3}$ .

c) Par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, [0; 1]} = 0$ , donc la série converge uniformément sur  $[0; 1]$ . Comme chaque monôme  $x \mapsto x^n$  est continu,  $f$  est continue sur  $[0; 1]$ .

$f$  étant impaire, elle est continue sur  $[-1; 1]$ .

3. On a, par continuité de  $f$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ .

De plus,  $\forall x \in [0; 1[$ ,  $f(x) = \text{Arctan}(x)$ , et par continuité de Arctan,  $\text{Arctan}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ . Donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{\pi}{4}$ . Par unicité de la limite,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 68**

*Application au calcul numérique de  $\pi$*

---

1. Au fait, le théorème des séries alternées s'appelle aussi théorème de Leibniz, non ?

---

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [-1; 1]$ ,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

1. Écrire une fonction `SATAN_1(x,n)` calculant la somme partielle  $S_n(x)$ .
2. a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n(1)$  est une valeur approchée de  $\frac{\pi}{4}$  avec une erreur inférieure à  $\frac{1}{2n+3}$ .  
b) En déduire une fonction `PI(e)` écrite en Python retournant une valeur approchée de  $\pi$  avec une erreur inférieure à  $e$ .  
c) À l'aide de cette fonction, donner les 8 premières décimales de  $\pi$  en précisant le nombre de termes sommés pour obtenir ce résultat. *Cela peut prendre du temps, avec mon ordinateur personnel environ 3 minutes.*
3. *Optimisons le temps de calcul*  
Vous avez vraisemblablement eu besoin à deux reprises de l'opérateur puissance « `**` ». a) Compléter la fonction suivante afin de calculer  $S_n(x)$  à l'aide uniquement des opérations « `+` » et « `*` ».

```
1 def SATAN_2(x,N):
2     somme = 0
3     signe = 1
4     puissance = x
5     facteur = x*x
6     diviseur = 1
7     for n in range(N+1):
8         somme += signe*puissance/diviseur
9         signe = .....
10        puissance *= .....
11        diviseur += .....
12    return somme
```

- b) À l'aide de la fonction `time()` du module `time`, indiquer le temps pris par l'exécution de `PI(1e-6)` en utilisant `SATAN_1` puis `SATAN_2`.
4. *Une amélioration notable par une stratégie due à John Machin(1680-1752).*  
a) Justifier que, pour tout  $x \in [-1; 1]$ ,  $S_n(x)$  est une valeur approchée de  $\text{Arctan}(x)$  avec une erreur inférieure à  $\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ .  
b) Justifier que

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan} \left( \frac{1}{2} \right) + \text{Arctan} \left( \frac{1}{3} \right).$$

- c) En déduire une expression de  $\pi$  comme somme de deux séries alternées.  
 d) Justifier que l'erreur commise en calculant les  $n$  premiers termes de la première (respectivement les  $n$  de la seconde) est inférieure à  $2 \times \frac{1}{2n+1} \left( \frac{1}{4} \right)^n$  (resp.  $\frac{4}{3} \times \frac{1}{2n+1} \left( \frac{1}{9} \right)^n$ ).

*L'erreur commise est ainsi au moins divisée par 4 à chaque nouveau terme calculé.*

- e) Justifier qu'il faut calculer environ  $\frac{n}{0,6}$  termes pour avoir  $n$  décimales exactes.  
 f) Écrire un script calculant les 8 premières décimales de  $\pi$  en exploitant cette décomposition.  
 S'assurer de l'exactitude du résultat et chronométrer ce script.
5. a) Montrer que pour deux réels  $p$  et  $q$  strictement positifs, on a

$$\text{Arctan} \left( \frac{1}{p} \right) = \text{Arctan} \left( \frac{1}{p+q} \right) + \text{Arctan} \left( \frac{q}{p^2 + pq + 1} \right) \quad (\heartsuit).$$

- b) Retrouver la formule donnée en 3.b), puis toujours à l'aide de  $(\heartsuit)$  prouver que

$$\frac{\pi}{4} = 2\text{Arctan} \left( \frac{1}{3} \right) + \text{Arctan} \left( \frac{1}{7} \right).$$

- c) Justifier qu'alors il suffit d'environ  $\frac{n}{0,95}$  termes pour calculer  $n$  décimales exactes.
6. a) Justifier successivement que

$$\tan \left( 2\text{Arctan} \left( \frac{1}{5} \right) \right) = \frac{5}{12}, \text{ puis que } \tan \left( 4\text{Arctan} \left( \frac{1}{5} \right) \right) = \frac{120}{119}.$$

- b) En déduire la formule de John Machin (1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan} \left( \frac{1}{5} \right) - \text{Arctan} \left( \frac{1}{239} \right).$$

- c) On note

$$T_{m,n} = 16 \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2k+1} \left( \frac{1}{5} \right)^{2k+1} - 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \left( \frac{1}{239} \right)^{2k+1}.$$

Justifier que  $T_{5,1}$  fournit une valeur approchée de  $\pi$  avec 8 décimales exactes.

Combien de termes faut-il sommer pour obtenir cette valeur ?

d) Vérifier cela par un script en Python.

*John Machin calcula en 1706 les 100 premières décimales de  $\pi$  à l'aide de cette technique... évidemment à la main, ce qui est une jolie prouesse!!! On peut penser que Machin fut guidé d'une part par le fait qu'avoir des puissances de  $\frac{1}{5}$  est pratique pour obtenir une écriture en base 10, et d'autre part par  $\pi \simeq 3,2 = \frac{16}{5}$  et  $\text{Arctan}(x) \simeq x$  près de 0, donc*

$$4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \simeq \frac{4}{5} \simeq \frac{\pi}{4}. \text{ Reste à préciser le petit écart entre } \frac{\pi}{4} \text{ et } 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right).$$

*Il vaut  $\text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \simeq 0,00418$ .*

7. En 1844, le calculateur prodige John Dahse calcula de tête 205 décimales de  $\pi$  avec la formule

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right).$$

Montrer cette formule à l'aide de la relation ( $\heartsuit$ ).

**Solution (Ex.68 – Application au calcul numérique de  $\pi$ )**

1. Par exemple,

```
1 def SATAN_1(x,N):
2     s = 0
3     for n in range(N+1):
4         s += (-1)**n/(2*n+1)*x**(2*n+1)
5     return s
```

2. a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\left|S_n(1) - \frac{\pi}{4}\right| = |R_n(1)| \leq \frac{1}{2n+3}$  par l'exercice précédent.

b) En déduire une fonction `PI(e)` écrite en Python retournant une valeur approchée de  $\pi$  avec une erreur inférieure à  $e$ .

$|4S_n(1) - \pi| \leq \frac{1}{2n+3}$  donc pour  $n$  tel que  $\frac{1}{2n+3} \leq e$ ,  $4S_n(1)$  est une approximation de  $\pi$  avec une erreur inférieure à  $e$ .

En prenant  $n = \left\lceil \left(\frac{4}{e} - 3\right) / 2 \right\rceil + 1$ , on est assuré de la précision voulue.

```
1 def PI(e):
2     n = int((4/e-3)/2)+1
3     return 4*SATAN_1(1,n)
```

c)  $\text{PI}(1\text{e-}8)$  fournit 3.141 592 658 589 407 alors que  $\text{math.pi}$  donne 3.141 592 653 589 793, soit une erreur de l'ordre de  $5.10^{-9}$ .

3. Optimisons le temps de calcul

```

a)
1 def SATAN_2(x,N):
2     somme = 0
3     signe = 1
4     puissance = x
5     facteur = x*x
6     diviseur = 1
7     for n in range(N+1):
8         somme += signe*puissance/diviseur
9         signe = -signe
10        puissance *= facteur
11        diviseur += 2
12    return somme
    
```

b) Avec mon ordinateur, l'exécution de  $\text{PI}(1\text{e-}6)$  en utilisant  $\text{ATAN}_1$  prend 1,72 seconde contre 0,34 seconde avec  $\text{ATAN}_2$ .

4. Une amélioration notable par une stratégie due à John Machin(1680-1752).

a) En conséquence du théorème des séries alternées utilisé dans l'exercice 1, pour tout  $x \in [-1; 1]$ ,  $S_n(x)$  est une valeur approchée de  $\text{Arctan}(x)$

avec une erreur inférieure à  $\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$  car  $|\text{R}_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ .

$$\text{b) } \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1/2 + 1/3}{1 - (1/2)(1/3)} = \frac{5/6}{5/6} = 1.$$

Comme  $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) \in [0; \pi/2]$ , j'en déduis que  $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) +$

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{c) } \pi = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} + 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}.$$

d) Toujours en majorant fidèlement au théorème des séries alternées, en notant que sommer  $n$  premiers termes revient à prendre les sommes partielles d'ordre  $n - 1$ , les erreurs commises en calculant les  $n$  premiers

termes des sommes sont respectivement inférieures à  $2 \times \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^n$  et

$$\frac{4}{3} \times \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

e) Pour gagner une décimale, il faut diviser l'erreur par 10, or  $s$  termes supplémentaires divisent l'erreur par  $\left(\frac{1}{4}\right)^s$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^s \simeq \frac{1}{10} \iff s \simeq \frac{\ln(4)}{\ln(10)} \simeq 0,60 \text{ d'où l'estimation donnée.}$$

f)

```

1 n = int(8/0.6)+1
2 print(n)
3 deb = time()
4 a = 4*(SATAN_2(1/2,n)+SATAN_2(1/3,n))
5 print(a)
6 print(a-pi)
7 print(time()-deb)

```

fournit

```

1 14
2 3.141592653381539
3 -2.0825430269155731e-10
4 8.320808410644531e-05

```

donc en fait 9 décimales exactes en calculant exactement 30 termes ( $2 \times (14 + 1)$ ) en moins d'un dix-millième de seconde.

5. a) On raisonne comme en 4.b)

$$\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{p}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{p+q}\right)\right) = \frac{1/p - 1/(p+q)}{1 + (1/p)(1/(p+q))} = \frac{q}{p(p+q) + 1} \dots$$

b) • En prenant  $p = q = 1$ , on retrouve la formule donnée en 3.b).

• En prenant  $p = 2$ ,  $q = 1$ , on trouve  $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right)$ , qui injectée dans 3.b) donne

$$\frac{\pi}{4} = 2\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right).$$

c) L'erreur est alors divisée au moins par 9 à chaque nouveau terme, or  $\ln(9)/\ln(10) \simeq 0,95$ , donc en raisonnant comme dans la question précédente, il suffit d'environ  $\frac{n}{0,95}$  termes pour calculer  $n$  décimales exactes.

$$6. a) \tan\left(2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2/5}{1 - 1/5^2} = \frac{5}{12}, \text{ puis } \tan\left(4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{10/12}{1 - 5^2/12^2} = \frac{120}{119}.$$

b)  $\tan\left(4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{120/119 - 1}{1 + 120/119 \times 1} = \frac{1}{239}$  d'où la formule de John Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

c) Avec  $m = 5$ , l'erreur commise sur la première somme est inférieure à  $\frac{16}{13 \times 5^{13}} \simeq 10^{-9}$  et avec  $n = 1$ , l'erreur commise sur la seconde somme est inférieure à  $\frac{4}{5 \times 239^5} \simeq 10^{-12}$ .

Les erreurs cumulées sont nettement inférieures à  $10^{-8}$  et on obtient 8 décimales exactes avec seulement 8 termes  $((5 + 1) + (1 + 1))$ .

d) Vérifions cela par un script en Python :

```
1 a = 16*SATAN_2(1/5,5) - 4*SATAN_2(1/239,1)
2 print(a, a-pi)
```

produit

```
1 3.1415926526163345 -9.734586470244722e-10
```

où on constate une erreur de l'ordre de  $10^{-9}$ , donc 8 décimales exactes.

7. La relation ( $\heartsuit$ ) avec  $p = 3$  et  $q = 2$  donne

$\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{2}{16}\right)$  qui injectée dans 3.b) donne bien

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right).$$

### Exercice 69

*Euler à l'assaut de  $\pi$*

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

a) À l'aide du changement de variable  $t = x\sqrt{1-s}$  dans l'identité  $\text{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ , établir que

$$\text{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2} \int_0^1 \frac{ds}{2\sqrt{1-s} \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}s\right)}.$$

b) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \int_0^1 \frac{s^n}{2\sqrt{1-s}} ds$ .

On admet que, l'intégrale de Wallis  $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(\theta) d\theta$  vaut, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ .

Déterminer la valeur de  $a_n$ .

c) En déduire la formule d'Euler (1755)

$$\text{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^n.$$

d) En déduire

$$\pi = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

e) Programmer une fonction `EATAN(x,N)` calculant la somme partielle d'ordre  $N$  du développement de  $\text{Arctan}(x)$  par la formule d'Euler et vérifier que la somme partielle de d'ordre 26 de la série ci-dessus fournit les 8 premières décimales de  $\pi$ .

2. a) À l'aide des formules établies dans l'exercice précédent, montrer successivement

$$\begin{aligned} \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) &= \text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right), \\ \text{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right) &= \text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right). \end{aligned}$$

b) Montrer finalement la formule toujours due à Euler

$$\frac{\pi}{4} = 5\text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\text{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right).$$

c) Justifier alors le développement

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \frac{7}{10} \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2^2}{100^2} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{7584}{10^5} \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{144}{10^5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{144^2}{10^{10}} + \dots \right) \end{aligned}$$

d) À l'aide de ce développement, Euler a calculé en une heure à la main 20 décimales de  $\pi$ .

En quoi les choix faits par Euler sont-ils pratiques pour déterminer les décimales de  $\pi$  ?

- e) Vérifier qu'en prenant les 5 premiers termes de la première série et les 3 premiers de la seconde, on obtient déjà les 8 premières décimales de  $\pi$ .

**Solution (Ex.69 – Euler à l'assaut de  $\pi$ )**

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Le changement est de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $s = 1$  pour  $t = 0$ , et  $s = 0$  pour

$$t = x, \text{ et } \frac{d(x\sqrt{1-s})}{ds} = \frac{-x}{2\sqrt{1-s}},$$

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+x^2(1-s)} \text{ or } \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}s\right)} = \frac{1+x^2}{1+x^2(1-s)},$$

Donc on a bien

$$\text{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2} \int_0^1 \frac{ds}{2\sqrt{1-s} \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}s\right)}.$$

- b) Posons  $s = \sin^2(\theta)$ , changement de variable de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement croissant donc bijectif sur  $]0; \pi/2[$ .

$$ds = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \text{ et } \sqrt{1-s} = \cos(\theta).$$

$$\text{Alors } a_n = \int_0^{\pi/2} 2 \frac{\sin^{2n}(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta)}{2 \cos(\theta)} d\theta = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

- c) Comme  $\left| \frac{x^2}{1+x^2}s \right| < 1$ ,  $\frac{1}{1 - \frac{x^2}{1+x^2}s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^n s^n$

$$\text{Donc } \text{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2} \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{2\sqrt{1-s}} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^n ds.$$

La question est de savoir si on peut permuter  $\sum$  et  $\int$ .

Soit pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$I_n \stackrel{\text{df.}}{=} \int_0^1 \left| \frac{s^n}{2\sqrt{1-s}} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^n \right| ds = a_n \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^n.$$

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right) < 1$$

Par le critère de D'Alembert, la série de terme général  $I_n$  converge.

La permutation est donc licite et

$$\text{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{s^n}{2\sqrt{1-s}} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^n ds,$$

ce qui s'écrit aussi par linéarité de l'intégrale

$$\operatorname{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^n.$$

D'où la formule d'Euler

$$\operatorname{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^n.$$

d) En  $x = 1$ , la formule d'Euler donne

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Il n'y a plus qu'à multiplier par 4...

e)

```

1 def EATAN(x,N):
2     somme = 1
3     terme = 1
4     raison = x**2/(1+x**2)
5     for n in range(1,N+1):
6         terme *= 4*n**2*raison/(2*n+1)/2/n
7         somme += terme
8     return somme*x/(1+x**2)

```

produit

In[1] : abs(4\*EATAN(1,26)-pi)

Out[1]: 4.929842312151322e-09

2. a) • On a prouvé dans l'exercice précédent (♥) :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{p}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{p+q}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{q}{p^2+pq+1}\right)$$

Avec  $p = 3$  et  $q = 4$ , on a  $p^2 + pq + 1 = 22$ , donc

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right),$$

• Calculons la tangente du second membre :

$$\frac{1/7 + 3/79}{1 - (1/7)(3/79)} = \frac{100/553}{550/553} = \frac{100}{550} = \frac{2}{11}. \text{ Donc}$$

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right),$$

b) D'après l'exercice précédent, et grâce aux formules ci-dessus

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) = 3\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 5\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right).$$

c) • En prenant  $x = \frac{1}{7}$ ,  $\frac{x}{1+x^2} = \frac{7}{50}$ , et  $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{50} = \frac{2}{100}$ , donc par le développement de Arctan par la formule d'Euler

$$5\text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{7}{10}\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2^2}{100^2} + \dots\right)$$

• En prenant  $x = \frac{3}{79}$ ,  $\frac{x}{1+x^2} = \frac{237}{6250} = \frac{3792}{10^5}$ , et  $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{9}{6250} = \frac{144}{10^5}$ , donc par le développement de Arctan par la formule d'Euler

$$2\text{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right) = \frac{7584}{10^5}\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{144}{10^5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{144^2}{10^{10}} + \dots\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \frac{7}{10}\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2^2}{100^2} + \dots\right) \\ &\quad + \frac{7584}{10^5}\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{144}{10^5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{144^2}{10^{10}} + \dots\right) \end{aligned}$$

d) Ce choix fait apparaître des puissances de 10 plutôt pratiques pour déterminer les décimales.

e) Avec

```
1 def EULER(m, n) :
2     return 4*(5*EATAN(1/7, m)+2*EATAN(3/79, n))
```

j'obtiens

In [3]: abs(EULER(4,2)-pi)

Out [3]: 3.78679088086642e-09

les 5 premiers termes nécessitant le calcul des la somme partielle d'ordre 4 (et idem pour la seconde somme).

# Chapitre 21

## $\pi$ et les produits infinis de VIÈTE et WALLIS

### Exercice 70

#### Formule de VIÈTE

On doit à François VIÈTE (1540–1603) le développement en produit infini suivant

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \times \dots$$

1. Soit  $\theta$  un réel non nul.

a) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} = \frac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

b) En déduire que

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} = \prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

où  $\prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$  désigne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$ .

2. Soit  $\theta$  un réel de  $]0; \pi[$ .

On pose, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ .

Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $v_{n+1} = \sqrt{\frac{1+v_n}{2}}$ .

3. Justifier la formule de VIÈTE en appliquant ce qui précède à  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

**Solution (Ex.70 – Formule de VIÈTE)**

1. a) On raisonne par récurrence sur  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

- Comme  $\sin(\theta) = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ , la formule est vraie pour  $n = 1$ .
- Comme  $\sin(\theta/2^n) = 2 \sin(\theta/2^{n+1}) \cos(\theta/2^{n+1})$ , la formule est héréditaire.

- b) Comme  $\theta/2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,  $\frac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  puisque  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ . D'où

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} = \prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

2. Cette fois-ci, on utilise la formule de duplication du cosinus.

$\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \cos\left(2\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)^2 - 1$  d'où  $v_{n+1} = \sqrt{\frac{1+v_n}{2}}$ , les cosinus étant positifs puisque  $\theta \in ]0; \pi[$  entraîne  $\frac{\theta}{2^n} \in ]0; \pi/2[$  pour tout  $n \geq 1$ .

3. Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\sin[\theta]}{\theta} = \frac{2}{\pi}$ . Et par la formule de récurrence de la suite  $(v_n)$ , on a

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \dots$$

Il n'y a plus qu'à isoler  $\pi$  en passant aux inverses...

**Exercice 71**

*Formule de WALLIS*

On doit à John WALLIS (1616–1703) le développement en produit infini suivant

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n}{2n+1} \times \dots$$

On définit, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , l'intégrale de Wallis  $W_n$  par

$$W_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$$

---

1. a) Justifier que la suite  $(W_n)$  est décroissante.

b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n \quad (\heartsuit)$$

c) En déduire que

$$W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$$

2. À l'aide de  $(\heartsuit)$ , montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$$

3. En déduire la formule de Wallis.

**Solution (Ex.71 – Formule de WALLIS)**

1. a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ .  $\forall t \in [0; \pi/2]$ ,  $\cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$  induit  $W_{n+1} \leq W_n$ .

b) En intégrant par parties  $W_{n+2}$  avec  $u : t \mapsto \sin(t)$  et  $v : t \mapsto \cos^{n+1}(t)$ , on prouve  $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$  donc  $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ .

c) Par décroissance :  $(0 <) W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$  donc  $\frac{n+1}{n+1} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ , et par encadrement  $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$ .

2. Par récurrence, ou en itérant (1) pour faire apparaître des produits d'entiers pairs et des produits d'entiers impairs, on montre que

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$$

3. Il suffit d'écrire que, par équivalence,  $\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  pour obtenir la formule de WALLIS.

### Exercice 72

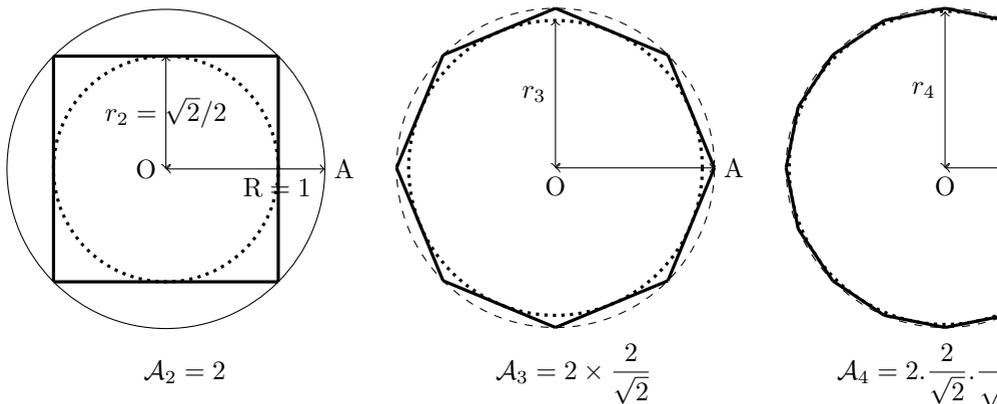
*Formule de VIÈTE, démonstration historique et vitesse de convergence*

Viète reprend une idée exploitée par Archimède, qui vers 250 avant J.-C., avait obtenu

$$\frac{223}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7}$$

en considérant un polygone à 96 côtés inscrit dans un cercle. Cet encadrement est déjà remarquable car  $\frac{22}{7} - \frac{223}{71} \simeq 0,002$  et  $\frac{1}{2} \left( \frac{223}{71} + \frac{22}{7} \right) \simeq 3,14184\dots$

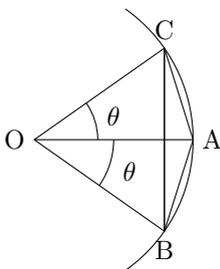
tandis que  $\pi \simeq 3,14159\dots$



On inscrit, dans un cercle de rayon  $R = OA = 1$ , des polygones réguliers à  $2^n$  côtés. On commence avec le carré ( $n = 2$ ), puis l'octogone ( $n = 3$ ), etc. ...

On note  $\mathcal{A}_n$  l'aire du polygone à  $2^n$  côtés, et on s'attend à ce que  $\mathcal{A}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi$ , aire du disque de rayon 1. Le dessin laisse penser que la convergence est rapide. On note par ailleurs  $r_n$  le rayon du cercle inscrit dans le polygone, de sorte que  $\pi r_n^2 \leq \mathcal{A}_n \leq \pi$ .

1. Soit A, B et C sur le cercle de centre O et de rayon 1 tel que les angles en O des triangles isocèles BOA et AOC soit égaux à  $\theta$ , où  $\theta \in ]0; \pi/4]$ .



- a) Exprimer l'aire de OBAC en fonction de l'aire de OBC.
- b) Soit, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\theta_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ . Établir une relation entre  $\mathcal{A}_{n+1}$  et  $\mathcal{A}_n$  à l'aide de  $\cos(\theta_n)$ .
- c) En déduire que, pour  $n \geq 3$ ,

$$\mathcal{A}_n = 2 \prod_{k=2}^{n-1} \frac{2}{u_k}$$

où  $u_n$  est la suite définie par  $u_2 = \sqrt{2}$  et, pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ .

2. a) Justifier que  $r_n = \cos(\theta_n)$ .
  - b) En déduire que  $\mathcal{A}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi$ .
  - c) Conclusion ?
3. Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$0 \leq \pi - \mathcal{A}_n \leq \frac{\pi^3}{4^n}.$$

Ainsi, la vitesse de convergence est géométrique alias exponentielle.

**Solution (Ex.72 – Formule de VIÈTE, démonstration historique et vitesse de convergence)**

1. a) En notant I le milieu de [BC], un petit puzzle montre que  $\mathcal{A}_{\text{OBC}}$  est l'aire du rectangle de hauteur IC et de base OI =  $\cos(\theta)$ , alors que  $\mathcal{A}_{\text{OBAC}}$  est l'aire du rectangle de hauteur IC et de base OA = 1.

Donc  $\mathcal{A}_{\text{OBC}} = \mathcal{A}_{\text{OBAC}} \cos(\theta)$ .

- b) Le  $n$ -ème polygone (celui à  $2^n$  côtés) a une aire égale à  $2^n \mathcal{A}_{\text{OBC}}$  en prenant  $\theta_n = \frac{\pi}{2^n}$  ( $\frac{\pi}{4}$  pour le carré par exemple), et le  $(n+1)$ -ème une aire égale à  $2^n \mathcal{A}_{\text{OBAC}}$ .

D'où  $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+1} \cos(\theta_n)$ , ou encore  $\mathcal{A}_{n+1} = \frac{1}{\cos(\theta_n)} \mathcal{A}_n$ .

- c) •  $\cos(\theta_n) = \cos(2\theta_{n+1}) = 2 \cos^2(\theta_{n+1}) - 1$  donc  $\cos(\theta_{n+1}) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta_n)}{2}}$ .

• Il vient alors  $\cos(\theta_n) = \frac{u_n}{2}$ .

En effet,  $\cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{u_2}{2}$ , puis, en supposant  $\cos(\theta_n) = \frac{u_n}{2}$  pour un rang  $n$  fixé, on aura

$$\cos(\theta_{n+1}) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta_n)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + u_n/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + u_n}{4}} = \frac{u_{n+1}}{2}.$$

• Par la relation précédente, pour  $n \geq 2$ ,

$$\mathcal{A}_n = \frac{1}{\cos(\theta_{n-1})} \times \frac{1}{\cos(\theta_{n-2})} \times \cdots \times \frac{1}{\cos(\theta_2)} \mathcal{A}_2, \text{ i.e.}$$

$$\mathcal{A}_n = \prod_{k=2}^{n-1} \frac{2}{u_k} \times 2$$

2. a) Dans la figure précédente, si [BC] est un des côtés du  $n$ -ème polygone, alors  $\theta = \theta_n$  et la distance de O à [BC] est  $\cos(\theta_n)$ , et cette distance est le rayon du cercle inscrit dans ce polygone, d'où  $r_n = \cos(\theta_n)$ .

b) En déduire que  $\mathcal{A}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi$ . Le polygone est entre le cercle inscrit d'aire

$\pi r_n^2$  et le cercle de rayon 1, d'aire  $\pi$ .

Donc  $\pi r_n^2 \leq \mathcal{A}_n \leq \pi$ .

Or  $\theta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , et par encadrement

$$\mathcal{A} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi.$$

c) Ceci démontre la formule de Viète.

3. L'encadrement précédent fournit  $0 \leq \pi - \mathcal{A}_n \leq \pi(1 - r_n^2)$ .

Or  $1 - r_n^2 = \sin^2(\theta_n) \leq \theta_n^2$  car  $\forall u \in ]0; \pi], 0 \leq \sin(u) \leq u$ .

D'où pour tout  $n \geq 2$ ,

$$0 \leq \pi - \mathcal{A}_n \leq \frac{\pi^3}{4^n}.$$

# Chapitre 22

## Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$

La fonction  $\zeta$  de RIEMANN est définie sur  $]1; +\infty[$  par

$$\zeta(s) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Dans cette partie, nous allons calculer  $\zeta(2)$  en n'utilisant que des connaissances de première année. On retrouvera un calcul de ces valeurs dans la partie consacrée aux séries de Fourier. La démonstration suivante est due à Ioannis PAPADIMITRIOU, 1973.

<b>Exercice 73</b>
--------------------

<i>Calcul de <math>\zeta(2)</math></i>
--

On rappelle que la fonction *cotangente* notée  $\cot$  est définie sur  $]0; \pi/2[$  par

$$\forall \theta \in ]0; \pi/2[, \quad \cot(\theta) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

1. a) Établir

$$\forall \theta \in ]0; \pi/2[, \quad \cot^2(\theta) < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2(\theta).$$

b) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^n \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < n + \sum_{k=1}^n \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

2. Dans cette question, on se propose de démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n \cot^2 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right) = \frac{n(2n-1)}{3} \quad (\heartsuit)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- a) À l'aide de la formule de DE MOIVRE, montrer qu'il existe un polynôme  $P_n$  de degré  $n$  tel que

$$\forall \theta \in ]0; \pi/2[, \quad \sin((2n+1)\theta) = \sin^{2n+1}(\theta) P_n(\cot^2(\theta)).$$

- b) Quelles sont les racines de  $P_n$  ?

- c) Justifier que si  $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  est un polynôme de degré  $n$  admettant exactement  $n$  racines distinctes, alors la somme de ses racines vaut  $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ .

- d) Justifier la relation  $(\heartsuit)$ .

3. Montrer finalement que  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Solution (Ex.73 – Calcul de  $\zeta(2)$ )**

1. a) • Ici,  $\cot(\theta) > 0$  et  $\theta > 0$ , donc  $\cot^2(\theta) < \frac{1}{\theta^2} \iff \tan(\theta) > \theta$ .

Cette dernière inégalité se démontre en étudiant  $\theta \mapsto \tan(\theta) - \theta$ .

- De même

$$\frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2(\theta) \iff \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2(\theta)} \iff \theta > \sin(\theta)$$

qui se démontre par l'étude de  $\theta \mapsto \theta - \sin(\theta)$ .

- b) En sommant les  $n$  encadrements précédents aux  $n$  points  $\theta_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{k\pi}{2n+1} \in ]0; \pi/2[$  où  $k$  parcourt  $[[1; n]]$ , on a

$$\sum_{k=1}^n \cot^2 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right) < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < n + \sum_{k=1}^n \cot^2 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right).$$

2. Dans cette question, on se propose de démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n \cot^2 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right) = \frac{n(2n-1)}{3} \quad (\heartsuit)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- a)  $\cos((2n+1)\theta) + i \sin((2n+1)\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{2n+1}$   
 $= (\sin(\theta)(\cot(\theta) + i))^{2n+1}$   
 $= \sin(\theta)^{2n+1} (\cot(\theta) + i)^{2n+1}$

$$= \sin(\theta)^{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \cot^{2n+1-k}(\theta)$$

En prenant la partie imaginaire de chaque membre

$$\sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta)^{2n+1} \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \cot^{2n-2p}(\theta)$$

car si  $k = 2p+1$ , alors  $i^k = (-1)^p i$ .

Alors  $P = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{n-p}$  convient.

b) Pour  $\theta \in ]0; \pi/2[$ ,  $\sin^{2n+1}(\theta) \neq 0$  donc

$$P_n(\cot^2(\theta)) = 0 \iff \sin((2n+1)\theta) = 0$$

$$\iff \exists k \in [[1; n]], \quad (2n+1)\theta = k\pi$$

$$\iff \exists k \in [[1; n]], \quad \theta = \frac{k\pi}{2n+1}$$

car si  $k > n$  ou  $k \leq 0$ , alors  $\frac{k\pi}{2n+1} \notin ]0; \pi/2[$ .

Comme  $\cot$  est strictement décroissante et positive sur  $]0; \pi/2[$  (c'est l'inverse de  $\tan$ !), les  $n$  nombres

$$x_k \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \cot^2(\theta_k) = \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right), \quad k \in [[1; n]]$$

sont deux \u00e0 deux distincts et sont  $n$  racines de  $P_n$ .

$P_n$  \u00e9tant de degr\u00e9  $n$ , il admet au plus  $n$  racines distinctes, donc les nombres  $x_k$  pour  $k \in [[1; n]]$  sont exactement les racines de  $P_n$ .

c) En notant  $\alpha_k$  pour  $k \in [[1; n]]$  les  $n$  racines de  $Q$  :

$$Q = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \dots$$

$$= a_n (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$$

$$= a_n (X^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) X^{n-1} + \dots)$$

Par unicit\u00e9 du coefficient de  $X^{n-1}$ ,  $-a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = a_{n-1}$ , i.e.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

d) Justifier la relation ( $\heartsuit$ ). En appliquant cette relation \u00e0  $P_n$  :

$$\sum_{k=1}^n \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^n x_k = -\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = -\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{(2n+1) \times 3!}$$

d'o\u00f9

$$\sum_{k=1}^n \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{(2n-1)n}{3}.$$

3. L'encadrement de 1/b) devient alors

$$\frac{(2n-1)n}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < n + \frac{(2n-1)n}{3}$$

donc

$$\frac{(2n-1)n}{3(2n+1)^2} \pi^2 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{n}{(2n+1)^2} \pi^2 + \frac{(2n-1)n}{3(2n+1)^2} \pi^2$$

Par encadrement, on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Exercice 74**

*Calcul de  $\zeta(4)$*

On continue en cherchant cette fois la valeur de  $\zeta(4)$ .

On utilise les mêmes notations que dans l'exercice précédent.

1. En élevant au carré l'encadrement initial, proposer un encadrement de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \text{ à l'aide des nombres } x_k.$$

2. a) Justifier que si  $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  est un polynôme de degré  $n$  admettant exactement  $n$  racines distinctes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , alors

$$\sum_{j \neq k} \alpha_j \alpha_k = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

- b) En déduire que  $\sum_{k=1}^n x_k^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{8}{45} n^4$ .

3. Montrer finalement que  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ .

**Solution (Ex.74 – Calcul de  $\zeta(4)$ )**

$$1. \sum_{k=1}^n \cot^4 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right) < \frac{(2n+1)^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} < n + 2 \sum_{k=1}^n \cot^2 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right) + \sum_{k=1}^n \cot^4 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

$$\text{donc } \frac{\pi^4}{(2n+1)^4} \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} < \frac{\pi^4}{(2n+1)^4} \left( n + 2 \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)$$

2. a) On reprend le développement de l'exercice précédent en précisant le coefficient de  $X^{n-2}$  :

$$\begin{aligned} Q &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \dots \\ &= a_n (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n) \\ &= a_n (X^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) X^{n-1} \\ &\quad + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n) X^{n-2} + \dots) \end{aligned}$$

Par unicité du coefficient de  $X^{n-2}$ ,

$$\sum_{j \neq k} \alpha_j \alpha_k = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{k=1}^n x_k^2 &= \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - 2 \sum_{j \neq k} x_j x_k = \left( \frac{n(2n-1)}{3} \right)^2 - 2 \frac{\binom{2n+1}{5}}{\binom{2n+1}{1}} \\ &= \frac{n^2(2n-1)^2}{9} - 2 \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!} \\ &= \left( \frac{4}{9} - \frac{2^5}{5!} \right) (n^4 + o(n^4)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{8}{45} n^4 \end{aligned}$$

3. Finalement, on a :  $u_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} < v_n$  avec

- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^4}{2^4 n^4} \times \frac{8}{45} n^4 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^4}{90}$

- dans la somme de termes de la parenthèse, les deux premiers termes sont négligeables devant le dernier, donc on a aussi  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^4}{90}$

Par encadrement,  $\zeta(4) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ .



# Chapitre 23

## Intégrale de GAUSS et fonction $\Gamma$ d'EULER

☞[E3A-M1 – 2016 – PC – Exo 1-D] ☞[CCP – 2015 – PC – Partie 1]  
☞[CCP – 2015 – PSI – Partie 3] ☞[CCP – 2019 – PSI – Pb 1-P1] ☞[CS-M1  
– 2016 – PC – Partie I]

### Exercice 75

Calcul de l'intégrale de GAUSS

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Une méthode couramment rencontrée s'appuie la démarche suivante, qui serait indiquée dans un sujet.

1. Soit  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = f(x^2).$$

Justifier que  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et calculer  $f'$ .

2. Déterminer  $f(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3. Montrer que  $x \mapsto g(x) + \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

4. En déduire la valeur de l'intégrale de GAUSS :

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

**Solution (Ex.75 – Calcul de l'intégrale de GAUSS)**

1. Soit  $h : \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ .

À  $t \in [0; 1]$  fixé,  $x \mapsto h(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Comme aucune intégrale n'est impropre car nous travaillons avec des fonctions continues (de  $t$ ) sur le segment  $[0; 1]$  donc bornées, le théorème de transfert de la classe s'applique.

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt = e^{-x} \int_0^1 e^{-xt^2} dt.$$

2. •  $f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$ .

• Soit  $x \geq 0$ .  $\forall t \in [0; 1], 0 \leq \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x}$ , donc par croissance de l'intégrale  $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$ . Par encadrement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

3. Soit  $j : x \mapsto g(x) + \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ .

Par composition,  $j$  est dérivable et :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$j'(x) = 2xf'(x^2) - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Posons  $u = xt$  dans la première intégrale :

$$j'(x) = 2xe^{-x^2} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-u^2} du - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$$

Donc  $j$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

4.  $j(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} g(0) = f(0) = \frac{\pi}{4}$ , donc  $j$  est constante égale à  $\frac{\pi}{4}$ .

Or  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) = \frac{\pi}{4}$ .

Donc  $\left( \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$ , et comme  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \geq 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Et par parité de l'intégrande :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

---

**Exercice 76**

*Fonction  $\Gamma$  d'EULER*

On appelle *fonction gamma* d'EULER la fonction définie par :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad \Gamma(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que  $\Gamma$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0; +\infty[$  et exprimer ses dérivées successives.

2. Montrer que

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

3. Montrer que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}} \sqrt{\pi}.$$

4. Justifier  $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ .

**Solution (Ex.76 – Fonction  $\Gamma$  d'EULER)**

1. *Existence* –

Soit  $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$  définie sur  $\mathbb{R} \times ]0; +\infty[$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux et positive sur  $]0; +\infty[$  et  $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ .

Or l'intégrale de Riemann  $\int_0^1 t^{x-1} dt$  converge si, et seulement si,  $x-1 > -1$ ,

i.e.  $x > 0$ . Donc  $\int_0^1 f(x, t) dt$  converge si, et seulement si,  $x > 0$ .

De plus :  $t^2 f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  car  $t^{x+1} = o(e^t)$ , donc  $f(x, t) = o(1/t^2)$  et

$\int_1^{+\infty} f(x, t) dt$  converge.

Donc  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  existe si, et seulement si,  $x > 0$ .

*Classe et dérivées successives* –

Pour  $t \in ]0; +\infty[$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}$  sur  $]0; +\infty[$  avec

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t}.$$

• Soit  $x \in ]0; +\infty[$ . La fonction  $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0; +\infty[$  car

(i) prenons  $\alpha \in ]1-x; 1[$ .  $t^\alpha (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t} = (\ln(t))^n t^{\alpha+x-1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ ,

donc  $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$  avec  $\alpha < 1$ , ce qui assure l'intégrabilité sur  $]0; 1]$ ,

(ii)  $t^2 \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , ce qui assure l'intégrabilité sur  $]0; +\infty[$ .

• Soit  $[a; b] \subset ]0; +\infty[$ .

$\forall x \in [a; b], \forall t \in ]0; +\infty[$ ,  $\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq (\ln(t))^n (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t} \stackrel{\text{déf.}}{=} \varphi_{[a; b]}(t)$

et  $\varphi_{[a; b]}$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0; +\infty[$  (par intégrabilité de  $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a, t)$  et  $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(b, t)$ )

Par domination,  $\Gamma$  est  $\mathcal{C}$  sur tout  $[a; b] \subset ]0; +\infty[$ , donc sur  $]0; +\infty[$ , et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0; +\infty[, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t} dt.$$

2. Soit  $x \in ]0; +\infty[$ .  $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$ . Effectuons une intégration par parties avec :  $t \mapsto t^x$  et  $t \mapsto -e^{-t}$   $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  et

$$-t^x e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ et } -t^x e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\Gamma(x+1) = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1, \text{ et par une récurrence immédiate}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$$

3. On passe par l'intégrale de GAUSS.

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \stackrel{u=t^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \Gamma(1/2) \text{ donc } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

En itérant la formule de 3.a),

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2} \left(n - \frac{5}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{5}{2}\right) = \dots$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2^n} \Gamma(1/2) = \frac{(2n)!}{n! 2^{2n}} \sqrt{\pi}$$

4.  $\forall x > 0, \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ , or  $\Gamma(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \Gamma(1) = 1$  par continuité de  $\Gamma$  en 1. Donc

$$\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

# Chapitre 24

## Intégrale de DIRICHLET et sinus cardinal

☞[CCP – 2020 – PSI – Pb no1]☞[CCP – 2020 – PC – Exo no1]

**Définition – Intégrale de DIRICHLET et sinus cardinal**

Sur  $\mathbb{R}$ , on définit la fonction *sinus cardinal* par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

L'intégrale de Dirichlet est définie par

$$D \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) dt.$$

<b>Exercice 77</b>
--------------------

<i>sinc</i> est de classe $C^\infty$
--------------------------------------

1. Justifier que *sinc* est continue en 0.
2. Justifier que *sinc* est développable en série entière de rayon infini. Quelle est sa classe de dérivabilité ?
3. Justifier que l'intégrale de Dirichlet n'est impropre qu'en  $\pm\infty$ .

**Solution** (Ex.77 – *sinc* est de classe  $C^\infty$ )

1. La continuité en 0 découle de  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

2.  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$  donc  $\operatorname{sinc}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$ .

Cette formule étant encore valable pour  $x = 0$  car  $\operatorname{sinc}(0) = 1$ ,  $\operatorname{sinc}$  est DSE sur  $\mathbb{R}$  tout entier donc  $\mathcal{C}^\infty$ .

3. D est faussement impropre en 0.

**Exercice 78**

*Un calcul de l'intégrale de Dirichlet*

Soit  $f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie sous réserve d'existence par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt.$$

Justifier les propriétés suivantes.

1.  $f$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

3.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0; +\infty[$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}.$$

4.  $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = x \ln x - \frac{x}{2} \ln(x^2 + 1) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}$ .

Donc  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ .

5. Finalement

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(t) dt = \pi.$$

**Solution (Ex.78 – Un calcul de l'intégrale de Dirichlet)**

1. Soit  $g : ]0; +\infty[ \times ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt}$  et  $h : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ .

- Pour  $x \in ]0; +\infty[, t \mapsto g(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .
- Pour  $t \in ]0; +\infty[, x \mapsto g(x, t)$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .
- $\forall (x, t) \in ]0; +\infty[ \times ]0; +\infty[, |g(x, t)| \leq h(t)$ ,  
où  $h$  est continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ , avec

(i)  $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \frac{1}{2}$  car  $1 - \cos t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ , donc  $\int_0^1 h(t) dt$  converge (faussement impropre),

(ii)  $\forall t \geq 1, 0 \leq h(t) \leq \frac{2}{t^2}$  donc  $\int_1^{+\infty} h(t) dt$  converge,

donc  $h$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0; +\infty[$ .

Ainsi,  $f$  est définie et continue sur  $[0; +\infty[$ .

2.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$ , il existe  $T$  tel que  $\forall t \geq T, h(t) \leq 1$ .

Comme  $h$  est continue sur  $]0; T]$  et est prolongeable en une fonction continue sur  $[0; T]$ ,  $h$  est majorée sur  $[0; T]$ .

Donc  $h$  est majorée sur  $]0; +\infty[$ .

Soit  $M \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall t \in ]0; +\infty[, 0 \leq h(t) \leq M$ .

$\forall x \in [0; +\infty[, \forall t \in ]0; +\infty[, 0 \leq g(x, t) \leq Me^{-xt}$ .

Par croissance de l'intégrale,  $\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x}$ .

Par encadrement,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

3. Pour  $t \in ]0; +\infty[, x \mapsto g(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0; +\infty[$ .

Regardons les dérivées par rapport à  $x$  de  $g$  :

•  $\forall x \in ]0; +\infty[, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{\cos t - 1}{t} e^{-xt} \right| = \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \stackrel{\text{déf.}}{=} h_1(t)$

$h_1$  est prolongeable par continuité en 0 (limite nulle) et négligeable devant  $1/t^2$  en  $+\infty$  donc continue et intégrable sur  $]0; +\infty[$ .

•  $\forall x \in ]0; +\infty[, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = (1 - \cos t) e^{-xt} \leq 2e^{-xt}$

Plaçons-nous sur  $[a; +\infty[ \subset ]0; +\infty[$  afin de majorer par une quantité indépendante de  $x$ .

$\forall x \in [a; +\infty[, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = (1 - \cos t) e^{-xt} \leq 2e^{-at}$

et  $h_2 : t \mapsto 2e^{-at}$  est intégrable d'après le cours car  $a > 0$ .

Par le théorème de dérivation,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur tout  $[a; +\infty[ \subset ]0; +\infty[$ . Donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0; +\infty[$  et  $f''$  se calcule par dérivation sous l'intégrale.

Soit  $x \in ]0; +\infty[$ .

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \mathcal{R}e \left( \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \mathcal{R}e \left( \frac{1}{x-i} \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

4. Pour  $x \in ]0; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + k = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + k \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} k.$$

Or on démontre comme en 2. que  $f'$  est tend vers 0 en  $+\infty$ . Donc  $k = 0$  et

$$f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$

En primitivant à nouveau grâce à des intégrations par parties,

$$f(x) = x \ln x - x - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) + x - \text{Arctan}(x) + \kappa$$

$$f(x) = x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) - \text{Arctan}(x) + \kappa$$

Déterminons  $\kappa$  grâce à la limite en  $+\infty$  :

$$\ln(x^2 + 1) = \ln(x^2) + \ln(1 + 1/x^2) = 2 \ln(x) + 1/x^2 + o(1/x^2)$$

$$\text{D'où : } f(x) = -\frac{1}{2x} + o(1/x) - \text{Arctan}(x) + \kappa \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} + \kappa$$

Or d'après 2.,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\kappa = \frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Finalement : } f(x) = x \ln x - \frac{x}{2} \ln(x^2 + 1) - \text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Comme  $f$  est continue en 0,  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$ .

$$5. \quad \frac{\pi}{2} = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ -\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \text{ donc}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Et par parité,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$$

**Exercice 79**

*La fonction sinc n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}$*

1. Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\text{sinc}(t)| dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$

2. En déduire que sinc n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

*Autrement dit, l'intégrale de DIRICHLET converge, mais pas absolument.*

*On parle alors d'intégrale semi-convergente.*

**Solution (Ex.79 –** *La fonction sinc n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}$ )*

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $\forall x \in [n\pi; (n+1)\pi]$ ,  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$ , donc par croissance de l'intégrale

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\operatorname{sinc}(t)| dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt.$$

Or  $|\sin|$  est  $\pi$ -périodique donc

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt = \int_0^\pi |\sin(t)| dt = \int_0^\pi \sin(t) dt = 2$$

2. En sommant les inégalités précédentes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{(n+1)\pi} |\operatorname{sinc}(t)| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}.$$

Or par divergence de la série harmonique,  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

(on sait même que  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \dots$ )

Donc  $\int_0^{(n+1)\pi} |\operatorname{sinc}(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $\operatorname{sinc}$  n'est pas intégrable.

### Exercice 80

*sinc* et la transformée de FOURIER

*sinc* est un exemple courant de transformée de Fourier non intégrable d'une fonction très simple (et intégrable).

Soit  $\Pi$  la fonction porte définie par

$$\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Pi$  est clairement intégrable.

Montrer que cependant sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(\Pi) : \xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x) e^{-2i\pi\xi x} dx = \operatorname{sinc}(\pi\xi) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

n'est pas intégrable.

**Solution** (Ex.80 – *sinc* et la transformée de FOURIER)

$$\mathcal{F}(\Pi)(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} 1e^{-2\pi i\xi x} dx = \begin{cases} \left[ \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{-2\pi i\xi} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Par le changement de variable affine  $x = \pi\xi \mathcal{C}^1$  strictement croissante, la non-intégrabilité de sinc entraîne la non-intégrabilité de  $\mathcal{F}(\Pi)$ .

## Chapitre 25

# Formule de STIRLING sans les intégrales de WALLIS

*La méthode la plus répandue pour établir la formule de Stirling*

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}$$

*s'appuie sur les séries pour établir la partie dépendant de  $n$  de cet équivalent et les intégrales de Wallis pour déterminer la constante. Voici une toute autre méthode reposant sur une méthode due à Laplace ainsi que sur l'intégrale de Gauss.*

### Exercice 81

*Formule de STIRLING, acte I*

*Dans cette première phase, on fait apparaître la partie dépendante de  $n$  de l'équivalent de Stirling*

1. Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . À l'aide de changements affines de variable, montrer successivement

a)  $n! = n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} (1+u)^n e^{-nu} du$ ;

b)  $n! = n^{n+1/2} e^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} dx$ .

**Solution (Ex.81 – Formule de STIRLING, acte I)**

1. Raisonnons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

- $\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ .

Une intégration par partie avec  $u : t \mapsto t^{n+1}$ ,  $v : t \mapsto e^{-t}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1; +\infty[$ , ainsi que  $u(0)v(0) = 0$  et  $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  par croissances comparées donne

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = 0 - 0 + (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = (n+1)!.$$

On a bien montré par récurrence que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En posant successivement  $t = n(1+u)$  (i.e.  $u = -1 + t/n$ ) puis  $u = x/\sqrt{n}$  (i.e.  $x = u\sqrt{n}$ ), changements affines de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement croissants, on a :

$$n! = n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} (1+u)^n e^{-nu} du = n^{n+1/2} e^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} dx.$$

**Exercice 82**

*Formule de STIRLING, acte II*

Dans cette seconde phase, on montre que l'intégrale précédente admet une limite finie lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose

$$\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} & \text{si } x \in [-\sqrt{n}; +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que  $\varphi_n \xrightarrow{\text{CVS}} \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ .

2. a) Établir la majoration

$$\forall u \in ]-1; 1[, \quad \ln(1+u) - u \leq \frac{-u^2}{4}$$

b) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée,

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} G$$

où  $G$  désigne  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ .

3. a) Justifier que  $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$  est décroissante sur  $]1; +\infty[$  et établir la majoration

$$\forall u \geq 1, \quad \ln(1+u) - u \leq (\ln(2) - 1)u$$

- b) En déduire

$$\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

4. Quel équivalent de  $n!$  obtient-on ?

**Solution (Ex.82 – Formule de STIRLING, acte II)**

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $n \geq x^2$ , de sorte que  $|x| \leq \sqrt{n}$  donc  $x \geq -\sqrt{n}$ .

$\varphi_n(x) = \exp\left(n\left(\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)$ , et, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$n\left(\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = n\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{x^2}{2} + o(1)$$

donc  $n\left(\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2}$  et  $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ .

2. a) Soit  $f : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \frac{-u^2}{4} - \ln(1+u) + u$ .  $f$  est dérivable avec

$$\forall u \in ]-1; 1[, \quad f'(u) = -\frac{u}{2} - \frac{1}{1+u} + 1 = -\frac{u}{2} + \frac{u}{1+u} = \frac{u(1-u)}{2(1+u)}$$

Donc  $f'$  est du signe de  $u$  et atteint son minimum en 0. Comme  $f(0) = 0$ ,  $f$  est positive sur  $] -1; 1[$ .

- b) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée,

Soit, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \varphi_n(x) & \text{si } |x| < \sqrt{n} \\ \text{sinon} & \end{cases}$ .

① Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue par morceaux.

②  $f_n \xrightarrow{\text{cvS}} \varphi$ .

③  $\varphi$  est continue.

④ Par la majoration précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \quad (\text{y compris lorsque } |x| \geq \sqrt{n}).$$

$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$  est continue, paire, négligeable devant

$\frac{1}{x^2}$  en  $+\infty$ , donc intégrable sur  $[0; +\infty[$ , puis intégrable sur  $\mathbb{R}$  par parité.

Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G$$

où  $G$  désigne  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ .

**3. a)** Soit  $g : [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ .

$$\forall u \geq 1, \quad g'(u) = \frac{1}{u(1+u)} - \frac{\ln(1+u)}{u^2} = \frac{u - (1+u)\ln(1+u)}{u^2(1+u)} = \frac{N(u)}{u^2(1+u)}.$$

$$\forall u \geq 1, \quad N'(u) = -\ln(1+u) < 0 \text{ donc } N(u) \leq N(1) = 1 - 2\ln(2) = 1 - \ln(4) < 0.$$

Donc  $g$  est décroissante sur  $[1; +\infty[$ . On a alors

$$\forall u \geq 1, \quad \frac{\ln(1+u)}{u} \leq \ln(2) \text{ donc } \ln(1+u) - u \leq (\ln(2) - 1)u.$$

**b)** On a alors

$$\forall x \geq \sqrt{n}, \quad 0 \leq \varphi_n(x) \leq \exp((\ln(2) - 1)u)$$

Comme  $\ln(2) - 1 < 0$ , tous les membres de cet encadrement sont intégrables sur  $[\sqrt{n}; +\infty[$ , donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} dx \leq \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{(\ln(2)-1)x} dx$$

$$\text{Or : } \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{(\ln(2)-1)x} dx = \frac{-1}{\ln(2) - 1} e^{(\ln(2)-1)\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ (car } \ln(2) - 1 < 0),$$

donc par encadrement

$$\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**4.** La conclusion de cette phase est

$$\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G$$

Donc

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} G n^{n+1/2} e^{-n}$$

**Exercice 83**

*Formule de STIRLING, acte III*

Dans ce dénouement, on calcule la valeur de l'intégrale de Gauss  $G$ .  
 On utilise une méthode hors des programmes de maths officiels mais ne nécessitant que quelques modestes connaissances sur les intégrales doubles.

Pour  $R \in ]0; +\infty]$ , on note  $C(R)$  le carré défini par

$$C(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\} = [0; R]^2$$

1. On admet que, pour toutes fonctions  $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continues,

$$\iint_{C(R)} f(x)g(y)dx dy = \left( \int_0^R f(x)dx \right) \left( \int_0^R g(y)dy \right).$$

Justifier que, pour  $R > 0$ ,

$$\left( \int_0^R e^{-x^2/2} dx \right)^2 = \iint_{C(R)} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy.$$

2. Soit  $R > 0$ . On pose

$$B(R) = \{(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \frac{R}{\cos(\theta)}\}$$

et

$$H(R) = \{(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \mid \frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \frac{R}{\sin(\theta)}\}.$$

Justifier que

$$C(R) = B(R) \cup H(R) \quad \text{et} \quad B(R) \cap H(R) = \emptyset.$$

3. Soit  $R > 0$ .

On admet que pour des fonctions continues sur  $C(R)$ , le changement de variable polaire est licite et transforme l'élément différentiel «  $dx dy$  » en «  $\rho d\rho d\theta$  ».

- a) Justifier que

$$\iint_{C(R)} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{R/\cos(\theta)} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{R/\sin(\theta)} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\theta$$

- b) Montrer que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{R/\sin(\theta)} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\theta = \int_0^{\pi/4} \int_0^{R/\cos(\theta)} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\theta$$

- c) Montrer que  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{C(R)} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \frac{\pi}{2}$ .

4. En déduire la valeur de  $G$ , puis la formule de Stirling.

**Solution (Ex.83 – Formule de STIRLING, acte III)**

Pour  $R \in ]0; +\infty]$ , on note  $C(R)$  le carré défini par

$$C(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\} = [0; R]^2$$

$$\left( \int_0^R e^{-x^2/2} dx \right)^2 = \iint_{C(R)} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy.$$

1. La formule admise appliquée à  $f = g : x \mapsto e^{-x^2/2}$  continue sur  $\mathbb{R}_+$  donne immédiatement

$$\left( \int_0^R e^{-x^2/2} dx \right)^2 = \iint_{C(R)} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy.$$

2.  $C(R)$  est le carré de côté  $[0; R]$ , précisément OABC où  $O = (0, 0)$ ,  $A = (R, 0)$ ,  $B = (R, R)$  et  $C = (0, R)$ ,  $B(R)$  est le triangle OAB et  $H(R)$  le triangle OBC (sans l'hypoténuse).

Un dessin est le bienvenu... donc

$$C(R) = B(R) \cup H(R) \quad \text{et} \quad B(R) \cap H(R) = \emptyset.$$

3. Soit  $R > 0$ .

On admet que pour des fonctions continues sur  $C(R)$ , le changement de variable polaire est licite et transforme l'élément différentiel «  $dx dy$  » en «  $\rho d\rho d\theta$  ».

- a) Il suffit d'observer que  $x^2 + y^2 = \rho^2$ . La partition du domaine  $C(R)$  en  $B(R) \cup H(R)$  permet d'écrire

$$\iint_{C(R)} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{R/\cos(\theta)} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{R/\sin(\theta)} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\theta$$

- b) En posant  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ , changement affine de classe  $\mathcal{C}^1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{R/\sin(\theta)} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\theta &= - \int_{\pi/4}^0 \int_0^{R/\sin(\pi/2-\alpha)} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\alpha \\ &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{R/\cos(\alpha)} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\alpha \end{aligned}$$

*Mutatis mutandis*

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{R/\sin(\theta)} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\theta = \int_0^{\pi/4} \int_0^{R/\cos(\theta)} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\theta$$

- c)  $\iint_{C(R)} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = 2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{R/\cos(\theta)} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\theta$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left( \int_0^{\pi/4} 1 - e^{-R^2/(2 \cos^2(\theta))} d\theta \right) \\
&= \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^{\pi/4} e^{-R^2/(2 \cos^2(\theta))} d\theta
\end{aligned}$$

Pour  $\theta \in [0; \pi/4]$ ,  $2 \cos^2(\theta) \leq 2$  donc  $\frac{1}{2 \cos^2(\theta)} \geq \frac{1}{2}$ , donc  $-\frac{R^2}{2 \cos^2(\theta)} \leq -\frac{R^2}{2}$ .

Ainsi  $0 \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2/(2 \cos^2(\theta))} d\theta \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2/2} d\theta \leq \frac{\pi}{4} e^{-R^2/2}$

Par encadrement,  $\int_0^{\pi/4} e^{-R^2/(2 \cos^2(\theta))} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi  $\iint_{C(\mathbb{R})} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ .

4. Donc par la question 1.,  $\left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{2}$ .

Par positivité,  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ .

Par parité,  $G = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\pi}$ .

D'où la formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}$$



## Chapitre 26

# Une jolie formule pour une belle synthèse

On se propose d'établir la formule suivante

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt = -\gamma$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler

$$\gamma \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right).$$

Ce problème constitue une belle synthèse des connaissances d'analyse de seconde année.

### Exercice 84

Une formule très eulérienne

1. En considérant la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  où  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ , montrer qu'il existe une constante réelle  $\gamma$  telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

2. Justifier l'existence de

$$I \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt.$$

3. Montrer que

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Dans la suite,  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $I_n$  l'intégrale

$$I_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

4. Montrer que

$$I_n = \int_0^1 \ln(nu)(1-u)^n du.$$

5. Montrer que

$$I_n = n \int_0^1 \ln(n)v^n + v^n \ln(1-v) dv.$$

6. Montrer que

$$I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k+1)}.$$

7. Montrer que

$$I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

8. Conclure.

**Solution (Ex.84 – Une formule très eulérienne)**

1.  $u_{n+1} - u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  converge donc la suite  $(u_n)$  converge.

2.  $\ln(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$  et en  $+\infty$   $\ln(t)e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  justifie l'existence de  $I$ .

3. Le théorème de convergence dominée pour les fonctions  $f_n : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$  si  $t < n$  et 0 sinon.

Pour la domination, se servir de  $\ln(1+u) \leq u$  pour tout  $u > -1$ ...

- 
4. Poser  $t = nu$ .
  5. Poser  $v = 1 - u$ .
  6. Développer en série entière  $\ln(1 - v)$  et montrer que l'on peut intégrer terme à terme.
  7. Montrer que

$$I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Décomposer  $\frac{1}{k(n+k+1)} = \frac{?}{k} - \frac{?}{n+k+1}$  puis télescoper.

8. Exploiter 1. pour passer à la limite...

**Exercice 85**

*Application à la fonction  $\Gamma$  d'EULER*

On rappelle que

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad \Gamma(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

On admet les propriétés (voir une étude complète de la fonction) :

- ①  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et se dérive en dérivant sous l'intégrale ;
- ②  $\forall x \in ]0; +\infty[, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

1. Montrer que  $\Gamma(1+t) = 1 - \gamma t + o(t)$  lorsque  $t$  tend vers 0.
2. En déduire deux constantes  $a$  et  $b$  telles que

$$\Gamma(2+t) = a + bt + o(t)$$

lorsque  $t$  tend vers 0.

3. Déterminer deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$\Gamma(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta + o(1)$$

lorsque  $t$  tend vers 0.

**Solution (Ex.85 – Application à la fonction  $\Gamma$  d'EULER)**

1.  $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{1-1}e^{-t}dt = -\gamma$  donc puisque  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\Gamma(1+t) = 1 - \gamma t + o(t)$ .
2.  $\Gamma(2+t) = (1+t)\Gamma(1+t) = (1+t)(1 - \gamma t + o(t)) = 1 + (1 - \gamma)t + o(t)$ .

3.  $t\Gamma(t) = \Gamma(1+t) = 1 - \gamma t + o(t)$  entraîne  $\Gamma(t) = \frac{1}{t} - \gamma + o(1)$ .

# Chapitre 27

## Linéarisations et sommes trigonométriques

☞ [MP-M2 – 2018 – PC – Partie I]

<b>Exercice 86</b>
--------------------

<i>Linéarisations</i>
-----------------------

Toute expression du type

$$\cos^n(t), \sin^n(t) \text{ et } \cos^m(t) \sin^n(t)$$

peut se linéariser comme somme de termes du type  $\cos(kt)$  et  $\sin(kt)$ .

Pour cela, on développe les formules d'EULER grâce à la formule du binôme de NEWTON, puis on regroupe les termes deux à deux conjugués pour utiliser à nouveau les formules d'EULER.

En particulier :

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1), \quad \cos^3(t) = \frac{1}{4}(3\cos(t) + \cos(3t)),$$

$$\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)), \quad \sin^3(t) = \frac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t)).$$

☞ *Indispensable pour primitiver notamment.*

1. Linéariser  $\sin(t) \cos^2(t)$ .

2. Établir :  $\cos^{2p}(t) = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^p \binom{2p}{k} \cos((2k - 2p)t)$

**Solution (Ex.86 – Linéarisations)**

1. Étudions un cas particulier, à titre d'exemple.

$$\sin(t) \cos^2(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 = \frac{1}{8i} ((e^{it} - e^{-it})(e^{2it} + 2 + e^{-2it}))$$

$$\sin(t) \cos^2(t) = \frac{1}{8i} (e^{3it} + e^{it} - e^{-it} - e^{-3it}) = \frac{1}{4} (\sin(3t) + \sin(t))$$

2. Étudions un cas général, à titre d'exemple.

$$\begin{aligned} \cos^n(t) &\stackrel{\text{EULER}}{=} \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^n \\ &\stackrel{\text{binome}}{=} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikt} e^{-i(n-k)t} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)t} \end{aligned}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \text{ et } e^{i(2(n-k)-n)t} = e^{i(n-2k)t} = \overline{e^{i(2k-n)t}}$$

Donc on peut grouper les termes 2 par 2.

- Si  $n$  est impair, disons  $n = 2p + 1$ , il y a  $2p + 2$  termes :

$$\begin{aligned} \cos^n(t) &\stackrel{j=n-k}{=} \frac{1}{2^n} \left[ \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} e^{i(2k-n)t} + \sum_{j=0}^p \binom{n}{n-j} e^{i(2(n-j)-n)t} \right] \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \left[ e^{i(2k-n)t} + \overline{e^{i(2k-n)t}} \right] \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} \cos((2k-2p-1)t) \end{aligned}$$

- Si  $n$  est pair, disons  $n = 2p$ , il y a  $2p + 1$  termes :

$$\begin{aligned} \cos^n(t) &\stackrel{j=n-k}{=} \frac{1}{2^n} \left[ \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)t} + \binom{n}{p} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{n}{n-j} e^{i(2(n-j)-n)t} \right] \\ \cos^n(t) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \left[ e^{i(2k-n)t} + \overline{e^{i(2k-n)t}} \right] + \frac{1}{2^n} \binom{n}{p} \\ \cos^{2p}(t) &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^p \binom{2p}{k} \cos((2k-2p)t) \end{aligned}$$

**Exercice 87**

*Sommes trigonométriques*

1. Pour  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $t \not\equiv 0[2\pi]$  ( $\Leftrightarrow e^{it} \neq 0 \Leftrightarrow \sin(t/2) \neq 0$ ), établir les

égalités :

$$C_n(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cos\left(\frac{nt}{2}\right)$$

$$S_n(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^n \sin(kt) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{nt}{2}\right).$$

2. En déduire  $\sum_{k=0}^n k \cos(kt)$  et  $\sum_{k=0}^n k \sin(kt)$ .

**Solution (Ex.87 – Sommes trigonométriques)**

On écrit une somme géométrique complexe puis on utilise les arguments moitiés.

$$\Sigma_n \stackrel{\text{déf.}}{=} C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n \cos(kt) + i \sum_{k=0}^n \sin(kt) = \sum_{k=0}^n e^{ikt} = \sum_{k=0}^n (e^{it})^k \stackrel{\text{geom.}}{=} \frac{e^{it(n+1)} - 1}{e^{it} - 1}$$

$$e^{i\alpha} - 1 \stackrel{\text{EULER}}{=} e^{i\alpha/2} 2i \sin(\alpha/2), \text{ donc } \Sigma_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} e^{int/2}$$

$$C_n(t) = \operatorname{Re}(\Sigma_n(t)) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cos\left(\frac{nt}{2}\right),$$

$$S_n(t) = \operatorname{Im}(\Sigma_n(t)) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{nt}{2}\right).$$

1.  $\sum_{k=0}^n k \cos(kt) = S'(t)$  et  $\sum_{k=0}^n k \sin(kt) = -C'(t)$ .



# Chapitre 28

## Polynômes de TCHEBYCHEV

☞ [CCP – 2019 – PSI – Pb2-P1]

Je ne me consacre ici qu'aux polynômes de TCHEBYCHEV dit de première espèce.

**Définition – Version relation de récurrence**

Soit  $(T_n)_{n \geq 0}$  la suite de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  définie par

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et, pour tout } n \geq 2, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

**Définition – Version trigonométrique**

Il existe une unique suite de polynômes  $(T_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .

### Exercice 88

*Ces deux définitions coïncident*

Justifier que les deux définitions précédentes définissent la même famille de polynômes.

**Solution (Ex.88 – Ces deux définitions coïncident)**

La version trigonométrique affirme une existence et une unicité non évidente. Commençons par là.

① *Existence* – Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On a :  $\cos(n\theta) \stackrel{\text{DE MOIVRE}}{=} \operatorname{Re}((e^{i\theta})^n)$ .

$(e^{i\theta})^n \stackrel{\text{binome}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{n-k}(\theta)$ , et  $i^k$  est imaginaire pur pour  $k$  impair et réel pour  $k$  pair.

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} i^{2k} \sin^{2k}(t) \cos^{n-2k}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1 - \cos^2(t))^k \cos^{n-2k}(t). \end{aligned}$$

Donc en posant  $T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1 - X^2)^k X^{n-2k}$ ,

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)).$$

② *Unicité* – Soit  $T_n$  et  $U_n$  deux polynômes tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) = U_n(\cos(\theta)).$$

Alors :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, (T_n - U_n)(\cos(\theta)) = 0$ , donc

$$\forall x \in [-1; 1], (T_n - U_n)(x) = 0$$

car tout  $x \in [-1; 1]$  peut s'écrire  $x = \cos(\theta)$ .

Ainsi,  $T_n - U_n$  a une infinité de racines, donc est le polynôme nul, donc  $U_n = T_n$ .

③ *Équivalence des deux définitions* –

Montrons que les polynômes définis trigonométriquement vérifient la définition par récurrence. Par unicité, ces deux familles seront identiques.

*Raisonnement : une récurrence double s'impose, vu la définition de la suite  $(T_n)$ .*

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_0(\cos \theta) = 1 = \cos(0 \cdot \theta)$ .

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_1(\cos \theta) = \cos(\theta) = \cos(1 \cdot \theta)$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons la propriété vraie aux rangs  $n$  et  $n + 1$ .

Rappelons que  $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$ .

Donc :  $\cos((n + 2)\theta) + \cos(n\theta) = 2 \cos((n + 1)\theta) \cos(\theta)$ .

Ainsi :  $\cos((n + 2)\theta) = 2 \cos(\theta) T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))$ .

Donc :  $T_{n+2}(X) = 2X T_{n+1}(X) - T_n(X)$  puisque  $T_{n+2}$  est l'unique polynôme vérifiant  $T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n + 2)\theta)$ .

**Exercice 89**

*Premières propriétés*

1. Calculer  $T_2$  et  $T_3$ .
2. Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n \text{ et } \text{dom}(T_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

où, pour tout polynôme  $P$  non nul,  $\text{dom}(P)$  désigne le coefficient dominant de  $P$ .

3. Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $T_n$  a la même parité que l'entier  $n$ .
4. Montrer, en partant de la définition par récurrence des polynômes  $(T_n)$  et en développant  $\cos((n+2)t)$ , que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \quad (\heartsuit).$$

*On notera que cette relation induit*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1; 1], \quad T_n(x) = \cos(n \text{Arccos}(x)).$$

5. Que valent, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(1)$  et  $T_n(-1)$ ?
6. En dérivant deux fois  $(\heartsuit)$  par rapport à  $\theta$  la relation précédente, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1; 1], \quad (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

7. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0.$$

**Solution (Ex.89 – Premières propriétés)**

1.  $T_2 = 2X^2 - 1$  et  $T_3 = 4X^3 - 3X$
2. Montrons la propriété par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .
  - La propriété est vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .
  - Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons-la vraie aux rangs  $n$  et  $n+1$ . Alors il existe  $Q$  tel que  $T_{n+1} = 2^n X^{n+1} + Q$  avec  $\text{deg}(Q) \leq n$ .  
Donc  $T_{n+2} = 2^{n+1} X^{n+2} + 2XQ - T_n$  avec  $\text{deg}(2XQ - T_n) \leq n+1$ , donc  $T_{n+2}$  est de degré  $n+2$  et de coefficient dominant  $2^{n+1}$  : la propriété est vraie au rang  $n+2$ .
  - Par récurrence j'ai démontré

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{deg}(T_n) = n \quad \text{et} \quad \text{dom}(T_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

3. Notons que la propriété voulue peut s'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(-X) = (-1)^n T_n(X).$$

Raisonnons à nouveau par récurrence sur  $n$ . L'initialisation est acquise. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons cette propriété acquise pour  $n$  et  $n+1$ .

$T_{n+2}(-X) = 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) = -(-1)^{n+1}2XT_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(-X) = (-1)^{n+2}(2XT_{n+1} - T_n) = (-1)^{n+2}T_{n+2}$  donc la propriété est vraie au rang  $n+2$ .

Par récurrence, j'ai établi que

pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $T_n$  a la même parité que l'entier  $n$ .

4. Une ultime récurrence sur  $n$  dont je ne détaille que les points essentiels.
  - $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0.\theta)$  et  $T_1(\cos(\theta)) = \cos(1.\theta)$ .
  - $\cos((n+2)\theta) = \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta)$ 

$$= \cos(n\theta)(2\cos^2(\theta) - 1) - 2\sin(n\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$= 2\cos(\theta)(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)) - \cos(n\theta)$$

$$= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$

$$= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))$$
  - Par récurrence, on a
 
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
5.  $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n.0) = 1$  et  $T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi) = (-1)^n$  ou en utilisant la parité,
 
$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(1) = 1 \text{ et } T_n(-1) = (-1)^n.$$
6.  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}$ ,
 
$$T'_n(\cos(\theta))(-\sin(\theta)) = -n\sin(n\theta)$$
 puis
 
$$T''_n(\cos(\theta))\sin^2(\theta) - T'_n(\cos(\theta))\cos(\theta) = -n^2\cos(n\theta)$$
 d'où
 
$$(1 - \cos^2(\theta))T''_n(\cos(\theta)) - \cos(\theta)T'_n(\cos(\theta)) + n^2T_n(\cos(\theta)).$$
 Comme tout  $x$  de  $[-1; 1]$  peut s'écrire  $x = \cos(\theta)$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ ,
 
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1; 1], \quad (1 - x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0.$$
7. Le polynôme  $(1 - X^2)T''_n - XT'_n + n^2T_n$  admet une infinité de racines (tous les  $x \in [-1; 1]$ ), donc
 
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 - X^2)T''_n - XT'_n + n^2T_n = 0.$$

**Exercice 90**

*Les polynômes de Tchebychev vus comme vecteurs propres*

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .  $\mathcal{B}$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}_m[X]$  et on considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_m[X]$  par

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad \varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'.$$

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_m[X]$ .
2. Déterminer la matrice  $M$  représentant l'endomorphisme  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On donnera explicitement les coefficients  $(m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m+1}$  en fonction de  $i$  et  $j$ .
3.  $\varphi$  est-il un automorphisme de  $\mathbb{R}_m[X]$  ?

- 
4. Justifier que  $\varphi$  est diagonalisable et préciser son spectre, son polynôme caractéristique et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.
  5. Déterminer une base  $\mathcal{T}$  de  $\mathbb{R}_m[X]$  formée de vecteurs propres de  $\varphi$  échelonnée en degré.
  6. On note  $\Pi$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{T}$  et  $D$  la matrice  $\Pi^{-1}M\Pi$ . Que vaut  $D$ ?  
Soit  $\psi$  l'endomorphisme  $\frac{1}{m^2}\varphi$ .  
On note  $N$  la matrice représentant  $\psi$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $\Delta$  la matrice  $\Pi^{-1}N\Pi$ .
  7. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta^n$ .
  8. Justifier que l'endomorphisme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n$  est un projecteur et préciser son rang.

**Solution (Ex.90 – Les polynômes de Tchebychev vus comme vecteurs propres)**

1. • Soit  $P \in \mathbb{R}_m[X]$ .  $\varphi(P)$  est clairement un polynôme et  $\deg(P'') \leq \deg(P) - 2$  donc  $\deg((X^2 - 1)P'') \leq \deg(P) \leq m$ ,  
 $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$  donc  $\deg(XP') \leq \deg(P) \leq m$ ,  
donc  $\deg(\varphi(P)) \leq m$  et  $\varphi(P) \in \mathbb{R}_m[X]$ .  
• Pour  $(P, Q) \in \mathbb{R}_m[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  
 $\varphi(\lambda P + Q) = (X^2 - 1)(\lambda P + Q)'' + X(\lambda P + Q)' = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$  par linéarité de la dérivation.

$\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_m[X]$ .

2. •  $\varphi(1) = 0$ ,  $\varphi(X) = X$   
•  $\forall k \in \llbracket 2; m \rrbracket$ ,  $\varphi(X^k) = (X^2 - 1)k(k - 1)X^{k-2} + XkX^{k-1} = k^2X^k - k(k - 1)X^{k-2}$

$$\bullet M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & \ddots & & (0) & \vdots \\ \vdots & \ddots & 4 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & (0) & & \ddots & \ddots & \ddots & -m(m - 1) \\ \vdots & & & & & \ddots & (m - 1)^2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & m^2 \end{pmatrix}$$

•  $\forall (i, j) \in [[1; m+1]], \quad m_{i,j} = \begin{cases} (j-1)^2 & \text{si } j = i \\ -j(j+1) & \text{si } j = i+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3.  $\varphi(1) = 0$  et  $1 \neq 0$  donc  $\varphi$  n'est pas injective, donc n'est pas un automorphisme.

Ou encore, vu sa matrice,  $\text{rg}(\varphi) = m < \dim(\mathbb{R}_m[X])$ , ou encore  $\det((\varphi)) = \det(M) = 0 \dots$

$\varphi$  n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{R}_m[X]$ .

4. Comme  $M$  est triangulaire supérieure,

$$\text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(M) = \{k^2, k \in [[0; m]]\},$$

donc  $\varphi$  possède exactement  $m+1 = \dim \mathbb{R}_m[X]$  valeurs propres distinctes, donc

$\varphi$  est diagonalisable, avec  $\chi_\varphi = \prod_{k=0}^m (X - k^2) = X(X-1)(X-2^2) \dots (X - m^2)$ .

Enfin, puisque  $\varphi$  est diagonalisable,

$$\forall k \in [[0; m]], \quad \dim(E_{k^2}) = \omega(k^2) = 1.$$

5. D'après la dernière question de la partie précédente,

$$\forall k \in [[0; m]], \quad \varphi(T_k) = k^2 T_k,$$

donc  $T_k (\neq 0)$  est un vecteur propre de  $\varphi$  associé à la valeur propre  $k^2$ .

Comme la famille  $(T_k)_{0 \leq k \leq m}$  est échelonnée en degré d'après la première partie, c'est une base de  $\mathbb{R}_m[X]$ .

$(T_0, T_1, \dots, T_m)$  est une base de  $\mathbb{R}_m[X]$  formée de vecteurs propres de  $\varphi$  échelonnée en degré

6.  $D$  représente  $\varphi$  dans la base de vecteurs propres  $\mathcal{T}$ , donc

$$D = \text{diag}(0, 1, 2^2, \dots, m^2).$$

7.  $N = \frac{1}{m^2}M$  et  $\Delta = \frac{1}{m^2}D = \text{diag}\left(\frac{k^2}{m^2}, k \in [[0; m]]\right)$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta^n = \text{diag}\left(\left(\frac{k^2}{m^2}\right)^n, k \in [[0; m]]\right), \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta^n = \text{diag}(0, \dots, 0, 1).$$

8. Soit  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta^n = \text{diag}(0, \dots, 0, 1)$ .  $L = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n\right)$  et  $L^2 = \text{diag}(0^2, \dots, 0^2, 1^2) = L$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n \text{ est un projecteur et } \text{rg}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n\right) = \text{rg}(L) = 1.$$

**Exercice 91**

*Racines et extrema de  $T_n$  sur  $[-1, 1]$*

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

La norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$  d'un polynôme désigne son maximum que le segment  $[-1; 1]$ .

1. À l'aide de ( $\heartsuit$ ), déterminer toutes les racines de  $T_n$  et justifier que  $T_n$  est scindé à racines simples.
2. Justifier que  $\|T_n\|_\infty = 1$ .
3. Montrer que, dans  $[-1; 1]$ , l'équation  $|T_n(x)| = 1$  possède exactement  $n+1$  solutions.
4. En déduire les racines de  $T'_n$ .
5. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_k(\operatorname{ch}(\theta)) = \operatorname{ch}(k\theta).$$

6. En déduire que, si  $x \notin [-1; 1]$ , alors  $|T_n(x)| > 1$ .

**Solution (Ex.91 – Racines et extrema de  $T_n$  sur  $[-1,1]$ )**

1. • Cherchons les racines de  $T_n$  dans  $[-1; 1]$ . Soit  $x \in [-1; 1]$  et  $\theta = \operatorname{Arccos}(x) \in [0; \pi]$ .

$$T_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

De plus :  $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \in [0; \pi] \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2}$ , or  $\theta \in [0; \pi]$ , donc

$$T_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff \exists k \in [[0; n-1]], \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

$$T_n(x) = 0 \iff \exists k \in [[0; n-1]], x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right).$$

La suite  $\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)_{0 \leq k \leq n-1}$  est strictement croissante à valeurs dans  $[0; \pi]$  et la fonction  $\cos$  est strictement décroissante sur  $[0; \pi]$  donc les  $n$  nombres  $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$  pour  $k \in [[0; n-1]]$  sont deux à deux distincts (suite strictement décroissante).

- Comme  $\deg(T_n) = n$ ,  $T_n$  possède au plus  $n$  racines distinctes.
- Finalement,  $T_n$  a exactement  $n$  racines distinctes, toutes dans  $[-1; 1]$  et est scindé à racines simples puisque  $\deg(T_n) = n$

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[ X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \right]$$

2.  $\forall x \in [-1; 1], T_n(x = \cos(n \operatorname{Arccos}(x))) \in [-1; 1]$ . De plus,  $T_n(1) = 1$ .  
Donc

$$\|T_n\|_\infty = 1.$$

3. Soit  $x \in [-1; 1]$  et  $\theta = \operatorname{Arccos}(x) \in [0; \pi]$ .  
 $|T_n(x)| = 1 \iff \cos(n\theta) = \pm 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = k\pi \iff \exists k \in [[0; n]], \theta = \frac{k\pi}{n}$

$$|T_n(x)| = 1 \iff \exists k \in [[0; n]], x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Ces  $n + 1$  nombres étant deux à deux distincts,

$$|T_n| = 1 \text{ possède exactement } n + 1 \text{ solutions.}$$

4. • Sur  $] -1; 1[$ , chaque fois que  $T_n$  vaut  $\pm 1$ ,  $T_n$  atteint un extremum local puisque  $\|T_n\|_\infty = 1$ , donc  $T'_n$  s'annule. Donc les  $n - 1$  nombres  $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$  pour  $k \in [[1; n - 1]]$  sont  $n - 1$  racines distinctes de  $T'_n$ .  
• Comme  $\deg(T'_n) = \deg(T_n) - 1 = n - 1$ ,  $T_n$  n'a pas d'autre racine.

Les  $n - 1$  racine de  $T'_n$  sont  $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$  pour  $k \in [[1; n - 1]]$ .

5. On raisonne par récurrence sur  $k$  comme dans la première partie.  
•  $T_0(\operatorname{ch}(\theta)) = 1 = \operatorname{ch}(0 \cdot \theta)$  et  $T_1(\operatorname{ch}(\theta)) = \operatorname{ch}(\theta) = \operatorname{ch}(1 \cdot \theta)$ .  
• Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons la propriété vraie aux rangs  $n$  et  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}((n + 2)\theta) &= \operatorname{ch}(n\theta)\operatorname{ch}(2\theta) + \operatorname{sh}(n\theta)\operatorname{sh}(2\theta) \\ &= \operatorname{ch}(n\theta)(2\operatorname{ch}^2(\theta) - 1) + 2\operatorname{sh}(n\theta)\operatorname{sh}(\theta)\operatorname{ch}(\theta) \\ &= 2\operatorname{ch}(\theta)(\operatorname{ch}(n\theta)\operatorname{ch}(\theta) + \operatorname{sh}(n\theta)\operatorname{sh}(\theta)) - \operatorname{ch}(n\theta) \\ &= 2\operatorname{ch}(\theta)\operatorname{ch}((n + 1)\theta) - \operatorname{ch}(n\theta) \\ &= 2\operatorname{ch}(\theta)T_{n+1}(\operatorname{ch}(\theta)) - T_n(\operatorname{ch}(\theta)) \end{aligned}$$

- Par récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\operatorname{ch}(\theta)) = \operatorname{ch}(n\theta).$$

6. •  $\operatorname{ch} : ]0; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[$  est une bijection car continue strictement croissante ( $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh} > 0$  sur  $]0; +\infty[$  et  $\operatorname{ch}(]0; +\infty[) = ]1; +\infty[$ ).  
Soit  $x > 1$ . Il existe un (unique)  $\theta \in ]0; +\infty[$  tel que  $x = \operatorname{ch}(\theta)$ . On a alors  $T_n(x) = \operatorname{ch}(n\theta) > 1$  car  $n\theta > 0$ .

Ce qui prouve que :  $\forall x > 1, |T_n(x)| > 1$ .

- Par parité de  $T_n$ ,

$$\forall x < 1, |T_n(x)| = |(-1)^n T_n(-x)| = |T_n(-x)| > 1 \text{ car } -x > 1.$$

$$\forall x \notin [-1; 1], \text{ alors } |T_n(x)| > 1.$$

*Variante sans utiliser la question précédente -*

- S'il existe  $x > 1$  tel que  $T_n(x) = 1$ , comme  $T_n(1) = 1$  et  $T_n$  est dérivable, l'application du théorème de Rolle montre qu'il existe  $y \in ]1; x[$  tel que

$T'_n(y) = 0$ . Ceci est impossible car toutes les racines de  $T'_n$  sont dans  $[-1; 1]$ . Donc

$$\forall x > 1, T_n(x) \neq 1.$$

• Supposons maintenant qu'il existe  $x > 1$  tel que  $T_n(x) < 1$ . Comme  $T_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{n-1}t^n \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ , le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à  $T_n$  continu sur  $]x; +\infty[$  montre qu'il existe  $y \in ]x; +\infty[ \subset ]1; +\infty[$  tel que  $T_n(y) = 1$ , ce qui est exclu par le point précédent. Donc

$$\forall x > 1, T_n(x) \geq 1.$$

• Donc finalement  $\forall x > 1, T_n(x) > 1$ .

• Et on conclut comme par la première méthode en invoquant la parité pour  $x < -1$ .

### Exercice 92

*Meilleure approximation uniforme de degré  $n$  de la fonction nulle*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$  d'un polynôme désigne son maximum que le segment  $[-1; 1]$ .

Dans cet exercice, on montre que le polynôme

$$t_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

est l'unique polynôme unitaire de degré  $n$  réalisant le minimum de la norme infinie sur  $[-1; 1]$ , *i.e.* tel que pour tout polynôme  $P \neq t_n$  tel que  $\deg(P) = n$  et  $\text{dom}(P) = 1$ ,  $\|P\|_\infty > \|t_n\|_\infty$ .

1. Justifier que  $\|t_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

2. Soit un polynôme  $P$  unitaire de degré  $n$ . On raisonne par l'absurde en supposant que  $\|P\|_\infty < \|t_n\|_\infty$  et on pose  $Q = t_n - P$ .

a) Justifier que  $\deg(Q) \leq n - 1$ .

b) Pour tout  $k \in [[0; n]]$ , on pose :  $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ .

Montrer que  $Q$  change de signe dans chacun des  $n$  intervalles  $[x_{k+1}; x_k]$  (où  $k \in [[0; n-1]]$ ).

c) Justifier que  $Q$  possède au moins  $n$  racines distinctes.

d) En déduire une contradiction.

e) Qu'a-t-on démontré?

3. Dans cette question, on se propose de démontrer que  $t_n$  est l'unique polynôme unitaire de degré  $n$  de norme infinie minimale sur  $[-1; 1]$ .

Soit  $P$  un polynôme unitaire de degré  $n$  vérifiant  $\|P\|_\infty = \|t_n\|_\infty$ .

a) On pose  $Q = t_n - P$ .

Montrer que, pour tout  $k \in [[0; n]]$ ,  $(-1)^k Q(x_k) \geq 0$ .

b) Montrer que, pour tout  $k \in [[0; n]]$ ,  $(-1)^k \prod_{0 \leq i \leq n, i \neq k} (x_k - x_i) > 0$ .

c) On pose

$$\forall k \in [[0; n]], \quad \lambda_k = \frac{Q(x_k)}{\prod_{0 \leq i \leq n, i \neq k} (x_k - x_i)}.$$

Justifier que pour tout  $k \in [[0; n]]$ ,  $\lambda_k \geq 0$ .

d) On pose

$$L_Q = \sum_{k=0}^n \lambda_k \left( \prod_{0 \leq i \leq n, i \neq k} (X - x_i) \right).$$

Montrer que, pour tout  $j \in [[0; n]]$ ,  $L_Q(x_j) = Q(x_j)$ .

e) En déduire que  $L_Q = Q$ . Que peut-on en déduire pour le degré de  $L_Q$ ?

Et pour  $\sum_{k=0}^n \lambda_k$ ?

f) En déduire finalement que  $P = t_n$ .

**Solution (Ex.92 – Meilleure approximation uniforme de degré  $n$  de la fonction nulle)**

1. D'après l'exercice précédent,  $\|T_n\|_\infty = 1$ , donc par homogénéité  $\|t_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

2. Soit un polynôme  $P$  unitaire de degré  $n$ . On raisonne par l'absurde en supposant que  $\|P\|_\infty < \|t_n\|_\infty$  et on pose  $Q = t_n - P$ .

a)  $t_n$  et  $P$  sont unitaires de degré  $n$  donc  $\deg(Q) = \deg(t_n - P) \leq n - 1$  (les monômes dominants se détruisent).

b) Pour tout  $n \in [[0; n]]$ ,

$$t_n(x_k) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x_k) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(k\pi) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

Pour  $k$  pair,  $Q(x_k) = \frac{1}{2^{n-1}} - P(x_k)$  avec  $|P(x_k)| \leq \|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$  donc  $Q(x_k) > 0$ .

Pour  $k$  impair,  $Q(x_k) = \frac{-1}{2^{n-1}} - P(x_k)$  avec  $|P(x_k)| \leq \|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$  donc  $Q(x_k) < 0$ .

Donc  $Q$  change de signe dans chacun des  $n$  intervalles  $[x_{k+1}; x_k]$  (où  $k \in [[0; n - 1]]$ ).

- c) Dans chaque  $[x_{k+1}; x_k]$  (où  $k \in [[0; n-1]]$ ),  $Q$  qui est une fonction continue, change de signe donc s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Comme  $Q$  ne s'annule pas aux extrémités de chacun de ces intervalles,  $Q$  possède au moins  $n$  racines distinctes.
- d)  $Q$  est un polynôme de degré au plus  $n-1$  possédant au moins  $n$  racines distinctes donc  $Q$  est le polynôme nul. Donc  $P = t_n$ . Donc  $\|P\|_\infty = \|t_n\|_\infty$ , ce qui est contradictoire.
- e) On a démontré que tout polynôme  $P$  unitaire de degré  $n$  vérifie  $\|P\|_\infty \geq \|t_n\|_\infty$ . Autrement dit,  $t_n$  est un polynôme réalisant le minimum de  $\|\cdot\|_\infty$  parmi les polynômes unitaires de degré  $n$ .
3. Dans cette question, on se propose de démontrer que  $t_n$  est l'unique polynôme unitaire de degré  $n$  de norme infinie minimale sur  $[-1; 1]$ .

Soit  $P$  un polynôme unitaire de degré  $n$  vérifiant  $\|P\|_\infty = \|t_n\|_\infty$ .

- a) Pour tout  $k \in [[0; n]]$ ,  $(-1)^k Q(x_k) \geq 0$ , d'après l'analyse faite dans la question précédente, où les inégalités deviennent larges car cette fois  $\|P\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$ .
- b) Soit  $k \in [[0; n]]$ .

La suite  $(x_k)_{k \in [[0; n]]} = \left( \cos \frac{k\pi}{n} \right)_{k \in [[0; n]]}$  est une suite strictement décroissante (car  $\cos$  est strictement décroissante sur  $[0; \pi]$ ).

Le produit n'est pas nul puisqu'aucun facteur n'est nul.

Parmi les  $n$  facteurs de  $\prod_{0 \leq i \leq n, i \neq k} (x_k - x_i)$ , il y en a exactement  $k$  qui sont négatifs : ceux pour lesquels  $0 \leq i < k$ .

Donc ce produit est du signe de  $(-1)^k$ , et on a bien

$$(-1)^k \prod_{0 \leq i \leq n, i \neq k} (x_k - x_i) \geq 0.$$

- c) Soit  $k \in [[0; n]]$ .  $\lambda_k = \frac{(-1)^k Q(x_k)}{(-1)^k \prod_{0 \leq i \leq n, i \neq k} (x_k - x_i)} \geq 0$

- d) Soit  $j \in [[0; n]]$ .

$$L_Q(x_j) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \left( \prod_{0 \leq i \leq n, i \neq k} (x_j - x_i) \right) = \lambda_j \left( \prod_{0 \leq i \leq n, i \neq j} (x_j - x_i) \right) + 0$$

Donc  $L_Q(x_j) = Q(x_j)$ .

- e)  $L_Q$  est de degré au plus  $n$  et  $Q$  au plus  $n-1$ , donc  $L_Q - Q$  est de degré au plus  $n$  et admet au moins  $n+1$  racines (les  $x_j$  pour  $j \in [[0; n]]$ ) donc  $L_Q - Q = 0$ , donc  $L_Q = Q$ .

Donc  $\deg(L_Q) = n - 1$ . Or par construction la coefficient de  $X^n$  de  $L_Q$  est  $\sum_{k=0}^n \lambda_k$ . Donc  $\sum_{k=0}^n \lambda_k = 0$ .

- f) Les  $\lambda_k$  sont  $n + 1$  nombres positifs de somme nulle, donc ils sont tous nuls :  $\forall k \in [[0; n]], \lambda_k = 0$ .  
 Donc  $\forall k \in [[0; n]], Q(x_k) = 0$ , et  $Q$  est un polynôme de degré au plus  $n - 1$  admettant au moins  $n + 1$  racines distinctes donc  $Q$  est nul. Donc finalement que  $P = t_n$ .
- 

### Et les polynômes de seconde espèce ?

Ils sont définis par

$$U_0 = 1, U_1 = 2X, \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = XU_{n+1} - U_n.$$

Vous pouvez remarquer que la relation de récurrence est la même que pour ceux de première espèce.

Trigonométriquement parlant, ils vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \sin((n+1)\theta) = \sin(\theta)U_n(\cos(\theta)).$$

Ils sont en quelque sorte l'équivalent des  $(T_n)$  mais pour la fonction  $\sin$  : ils permettent le développement en polynômes des expressions  $\sin(nt)$ . Malheureusement, il n'est pas possible de se débarrasser de du «  $\sin(\theta)$  » apparaissant dans le second membre.

## Chapitre 29

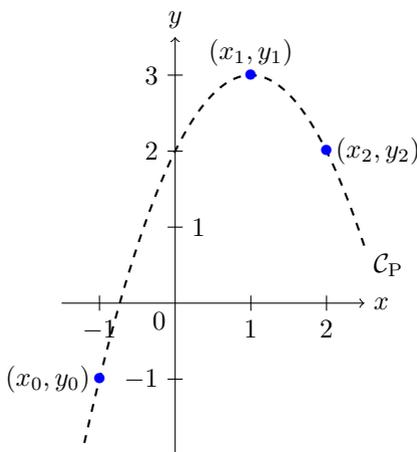
# Interpolation polynomiale de LAGRANGE

☞ [E3A-M1 – 2017 – PSI – Exo 1]

### Position du problème

Est-il possible de construire un polynôme, de degré le plus bas possible, prenant de valeurs imposées en des points donnés ?

Par exemple, soit  $(x_0, x_1, x_2) = (-1, 1, 2)$  et  $(y_0, y_1, y_2) = (-1, 3, 2)$ . Peut-on construire un polynôme  $P$  tel que :  $\forall i \in [0; 2], P(x_i) = y_i$  ?



Sur cet exemple,  $P(X) = -X^2 + 2X + 2$  convient et il n'y pas de polynôme

solution de degré inférieur ou égal à 1 puisque les points ne sont pas alignés.

Le déterminant de VANDERMONDE montre que ce **problème d'interpolation** pour  $n + 1$  points possède une unique solution de degré au plus  $n$ .

LAGRANGE a développé une méthode systématique et efficace pour ce problème d'interpolation.

L'idée est de construire des polynômes qui valent 0 en chaque  $x_i$  sauf l'un d'entre eux. Ici :

$$L_0(X) = \frac{1}{6}(X - 1)(X - 2) \text{ vaut } 0 \text{ en } 1 \text{ et en } 2, \text{ et } 1 \text{ en } -1,$$

$$L_1(X) = -\frac{1}{2}(X + 1)(X - 2) \text{ vaut } 0 \text{ en } -1 \text{ et en } 2, \text{ et } 1 \text{ en } 1,$$

$$L_2(X) = \frac{1}{3}(X + 1)(X - 1) \text{ vaut } 0 \text{ en } -1 \text{ et en } 1, \text{ et } 1 \text{ en } 2.$$

Alors  $P(X) = -L_0(X) + 3L_1(X) + 2L_2(X)$  vaudra  $-1$  en  $x_0 = -1$ ,  $3$  en  $x_1 = 1$  et  $2$  en  $x_2 = 2$ , mission accomplie.

**Exercice 93**

*Deux méthodes pour l'existence et l'unicité*

Soit  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$   $n + 1$  scalaires de  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) **deux à deux distincts**, et  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$   $n + 1$  scalaires de  $\mathbb{K}$  quelconques.

1. *Première méthode* – En écrivant un système linéaire de  $n + 1$  équations, justifier qu'il existe un unique polynôme  $P$  dans  $\mathbb{K}_n[X]$  vérifiant
 
$$(I) \quad \forall i \in [[0; n]], \quad P(x_i) = y_i.$$
2. *Seconde méthode* – Soit  $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}, P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$ .
  - a) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme.
  - b) En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  vérifiant (I).

**Solution (Ex.93 – Deux méthodes pour l'existence et l'unicité)**

1. Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ . On cherche les  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  pour vérifier

(I).

Alors :

$$(I) \iff \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

$$\text{Posons } M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$(\mathcal{I}) \iff MX = Y.$$

Mais  $\det(M) = \mathcal{V}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$  car les  $(x_i)$

sont deux à deux distincts.

Donc  $M$  est inversible et

$$(\mathcal{I}) \iff X = M^{-1}Y,$$

donc le problème admet une unique solution, puisque ce système admet une unique solution.

2. a)  $\varphi$  est linéaire, et si  $P \in \text{Ker } \varphi$ , alors  $P$  est de degré au plus  $n$  et admet  $n+1$  racines distinctes, donc  $P$  est le polynôme nul. Ainsi  $\varphi$  est injective. Et comme  $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = \dim(\mathbb{K}^{n+1})$ ,  $\varphi$  est un isomorphisme.
- b) Comme  $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ ,  $y$  admet un unique antécédent dans  $\mathbb{K}_n[X]$  par  $\varphi$ , autrement dit il existe un unique polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  vérifiant  $(\mathcal{I})$ .

#### Définition – Base de LAGRANGE

Soit  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$   $n+1$  scalaires de  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On pose, pour tout  $k \in [[0; n]]$ ,

$$L_k(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{X - x_j}{x_k - x_j} = \frac{1}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} \prod_{j \neq k} (X - x_j).$$

#### Exercice 94

*Propriété de la base de LAGRANGE*

Justifier les propriétés suivantes.

$$\textcircled{1} \forall i \in [[0; n]], \forall k \in [[0; n]], \quad L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases} \stackrel{\text{Kronecker}}{=} \delta_{i,k}.$$

$\textcircled{2} \mathcal{L} = (L_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

③ Pour tout  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ , on a :

$$P = \sum_{k=0}^n P(x_k)L_k.$$

Autrement dit, les coordonnées de tout polynôme  $P$  dans la base de LAGRANGE  $\mathcal{L}$  sont  $(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \in \mathbb{K}^n$ .

④ Soit  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ . Il existe un unique polynôme dans  $\mathbb{K}_n[X]$  vérifiant  $\forall i \in [[0; n]], P(x_i) = y_i$ .

Autrement dit, le problème d'interpolation admet une unique solution, de degré au plus  $n$ .

**Solution (Ex.94 – Propriété de la base de LAGRANGE)**

Surtout, ne jamais commencer par tenter de développer l'expression définissant les  $L_k$ . Elle est très pratique car elle nous indique les racines de  $L_k$ .

① Soit  $(i, k) \in [[0; n]]^2$ .  $L_k(x_i) = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq k} \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j}$ .

- Si  $i = k$ , alors le numérateur et le dénominateur sont égaux, donc  $L_k(x_i) = 1$ .
- Si  $i \neq k$ , alors le numérateur s'annule car  $j$  peut prendre la valeur  $i$ , et pour cette valeur  $x_i - x_j = x_i - x_i = 0$ , donc  $L_k(x_i) = 0$ .

② Tous les polynômes  $L_k$  sont de degré  $n$  car produit de  $n$  polynômes de degré 1.

$\mathcal{L}$  est de cardinal  $n + 1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ . Il suffit de montrer que la famille  $\mathcal{L}$  est libre.

Soit  $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$  tel que

$$(\mathcal{R}) \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k = 0.$$

Soit  $i \in [[0; n]]$ . La relation  $(\mathcal{R})$  évaluée en  $X = x_i$  donne  $\alpha_i \times 1 = 0$  puisque  $L_k(x_i) = 0$  si  $k \neq i$  et  $L_k(x_i) = 1$  si  $k = i$ . Donc  $\alpha_i = 0$ .

Donc  $\mathcal{L}$  est une famille libre.

③ Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  et  $Q = \sum_{k=0}^n P(x_k)L_k$ .

Alors :  $\forall i \in [[0; n]],$

$$\begin{aligned} (P - Q)(x_i) &= P(x_i) - \left( \sum_{k=0}^n P(x_k)L_k(x_i) \right) \\ &= P(x_i) - \sum_{k=0}^n P(x_k)\delta_{i,k} \\ &= P(x_i) - P(x_i) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $P - Q \in \mathbb{K}_n[X]$  admet  $n + 1$  racines distinctes, donc  $P - Q$  est le polynôme nul.

---

Donc  $P = Q = \sum_{k=0}^n P(x_k)L_k$ , et comme  $\mathcal{L}$  est une base, la décomposition est unique.

④ Posons  $P = \sum_{k=0}^n y_k L_k \in \mathbb{K}_n[X]$ .

Alors :  $\forall i \in [[0; n]]$ ,  $P(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k \delta_{i,k} = y_i$ .

$P$  est bien solution du problème d'interpolation.

Si  $Q$  est une autre solution dans  $\mathbb{K}_n[X]$ , alors :  $\forall i \in [[0; n]]$ ,  $(P-Q)(x_i) = 0$ , donc  $P - Q$  possède au moins  $n + 1$  racines et est de degré au plus  $n$ , donc  $P - Q = 0$ , *i.e.*  $Q = P$ , d'où l'unicité.

<b>Exercice 95</b>
--------------------

<i>Somme constante</i>
------------------------

Montrer que  $L_0 + L_1 + \dots + L_n = 1$ , polynôme constant égal à 1.

**Solution** (**Ex.95** – *Somme constante*)

Le polynôme  $L_0 + L_1 + \dots + L_n - 1$  est de degré au plus  $n$  et admet au moins  $n + 1$  racines : les  $x_i$  pour tout  $0 \leq i \leq n$ .



# Chapitre 30

## Phénomène de RUNGE

On sait que, étant donné une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  et  $n + 1$  points distincts, il existe un unique polynôme  $P_n$  de degré au plus  $n$  coïncidant avec  $f$  en ces  $n + 1$  points. Ce polynôme est traditionnellement appelé polynôme d'interpolation de Lagrange<sup>1</sup>

En 1901, le mathématicien allemand Carl RUNGE(1958–1927) a constaté (et démontré) que, *contre toute attente*, même pour une fonction  $f$  très régulière, lorsque l'on choisit des points équirépartis dans  $I$ , le polynôme d'interpolation  $P_n$  en ces points ne tend pas nécessairement uniformément vers  $f$ .

**Notations** –

- $I$  désigne le segment  $[-1; 1]$ ,
  - $\alpha$  un réel strictement positif,
  - $f$  la fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$ ,
  - $n$  un entier naturel non nul pair s'écrivant  $n = 2m$  (donc  $m$  désigne toujours  $n/2$ ),
  - pour tout  $k \in [[1; m]]$ ,  $x_k = \frac{2k-1}{n}$  et  $x'_k = -x_k$ , de sorte que la famille  $(x'_m, x'_{m-1}, \dots, x'_1, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)$  est la famille des  $n$  points équirépartis de  $-1 + \frac{1}{n}$  à  $1 - \frac{1}{n}$  avec un pas valant  $\frac{2}{n}$ .
  - $P_n$  le polynôme interpolateur de  $f$  aux  $n$  points précédents, caractérisé par
- $$\deg(P_n) \leq n - 1 \text{ et } \forall k \in [[1; m]], \quad P_n(x_k) = f(x_k) \text{ et } P_n(x'_k) = f(x'_k)$$

---

1. Voir la partie consacrée à l'interpolation polynomiale de LAGRANGE.

**Exercice 96**

*Une expression de  $f(x) - P_n(x)$*

On pose :

$$\forall x \in I, \quad A_n(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} 1 - (x^2 + \alpha^2)P_n(x) \text{ et } Q_n(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2).$$

1. Justifier qu'il existe  $(r, s) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall x \in I, \quad A_n(x) = Q_n(x)(rx + s).$$

2. Montrer que :  $s = \frac{1}{Q(i\alpha)}$  et  $r = 0$ .

3. En déduire que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) - P_n(x) = \frac{(-1)^m Q_n(x)}{(x^2 + \alpha^2) \prod_{k=1}^m (\alpha^2 + x_k^2)}.$$

**Solution (Ex.96 – Une expression de  $f(x) - P_n(x)$ )**

1. On a :

$\forall k \in [[1; m]], A_n(x_k) = 1 - (x_k^2 + \alpha^2)f(x_k) = 0$ , et de même  $A_n(x'_k) = 0$ .  
Donc le polynôme  $A_n$  est factorisable par  $(X - x_k)(X - x'_k) = X^2 - x_k^2$  pour tout  $k \in [[1; m]]$ .

Donc  $A_n$  est multiple de  $Q_n$ .

Or par définition  $\deg(Q_n) = n$  et  $\deg(A_n) = 2 + \deg(P_n) \leq n + 1$ , donc il existe  $(r, s) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$A_n = (rX + s)Q_n.$$

Cette relation est *a fortiori* vraie sur  $I$ .

2. En évaluant la relation précédente en  $i\alpha$  et  $-i\alpha$ , on obtient

$$\begin{cases} i\alpha r + s = 1/Q(i\alpha) \\ -i\alpha r + s = 1/Q(-i\alpha) \end{cases} \quad \text{or } Q(-i\alpha) = Q(i\alpha) \text{ donc } \begin{cases} i\alpha r + s = 1/Q(i\alpha) \\ -i\alpha r + s = 1/Q(i\alpha) \end{cases}$$

Donc  $s = \frac{1}{Q(i\alpha)}$  et  $r = 0$ .

3. Comme :  $\forall x \in I, A_n(x) = 1 - (x^2 + \alpha^2)Q_n(x)$ ,

on en déduit :  $\forall x \in I$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{A_n(x)}{x^2 + \alpha^2} = \frac{Q_n(x)}{(x^2 + \alpha^2) \prod_{k=1}^m (-\alpha^2 - x_k^2)}$$

$$= \frac{(-1)^m Q_n(x)}{(x^2 + \alpha^2) \prod_{k=1}^m (\alpha^2 + x_k^2)}$$

### Exercice 97

*Étude d'une fonction auxiliaire*

Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$h(x) = \int_0^1 \ln(x^2 + u^2) du.$$

1. Démontrer que :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, h(x) = 2x \operatorname{Arctan}(1/x) + \ln(x^2 + 1) - 2.$$

2. Vérifier que :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, h'(x) = \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x).$$

3. Étudier les variations de  $h$ .

4. a) Justifier qu'il existe un unique réel strictement positif  $\alpha_0$  tel que  $h(\alpha_0) = 2 \ln 2 - 2$ .

b) Justifier que  $\alpha_0 \in ]0; 1[$ .

**Solution (Ex.97 – Étude d'une fonction auxiliaire)**

1. Soit  $x \in ]0; +\infty[$ . Toutes les fonctions considérées sont de classe  $\mathcal{C}^1$  (au moins) sur  $[0; 1]$ .

$$\begin{aligned} h(x) &\stackrel{\text{IPP}}{=} [u \ln(x^2 + u^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2u^2}{x^2 + u^2} du = \ln(x^2 + 1) - 2 \int_0^1 1 - \frac{x^2}{x^2 + u^2} du \\ &= \ln(x^2 + 1) - 2 + 2x \int_0^1 \frac{1/x}{1 + (u/x)^2} du \\ &= \ln(x^2 + 1) - 2 + 2x \left[ \operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{x}\right) \right]_0^1 \end{aligned}$$

donc

$$\forall x \in ]0; +\infty[, h(x) = 2x \operatorname{Arctan}(1/x) + \ln(x^2 + 1) - 2.$$

2.  $h$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , et  $\forall x \in ]0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 \operatorname{Arctan}(1/x) + 2x \frac{-1/x^2}{1 + 1/x^2} + \frac{2x}{x^2 + 1} \\ &= 2 \operatorname{Arctan}(1/x), \text{ or } \operatorname{Arctan}(1/x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x), \text{ donc} \\ &\forall x \in ]0; +\infty[, h'(x) = \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x). \end{aligned}$$

3.  $\text{Arctan} < \frac{\pi}{2}$  sur  $]0; +\infty[$  donc  $h$  est strictement croissante.
4. a) •  $h$  est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $h(]0; +\infty[) = ]-2; +\infty[$  (car  $\text{Arctan}(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ ).  
Comme  $2 \ln(2) - 2 \in ]-2; +\infty[$ , il existe un unique réel strictement positif  $\alpha_0$  tel que  $h(\alpha_0) = 2 \ln 2 - 2$ .
- b)  $h(1) = \frac{\pi}{2} + \ln(2) - 2 > 2 \ln(2) - 2$  car  $\frac{\pi}{2} > 1 > \ln(2)$ , donc puisque  $h$  est strictement croissante,  $\alpha_0 \in ]0; 1[$ .

**Exercice 98**

*Un équivalent de  $\prod_{k=1}^m (\alpha^2 + x_k^2)$*

1. Soit  $F$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0; 1]$  et  $a \in [0; 1[$ .  
Pour tout  $t \in [0; 1 - a]$ , on pose :

$$G(t) = \int_a^{a+t} F(u) du - tF\left(a + \frac{t}{2}\right).$$

- a) Calculer  $G'$  en fonction de  $F$  et  $F'$ .
- b) Soit  $x \in [0; 1 - a]$ . À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à  $F$  sur  $\left[a + \frac{x}{2}; a + x\right]$ , établir que

$$|G'(x)| \leq \frac{x^2}{8} \|F''\|_{\infty, [0; 1]}.$$

- c) En déduire que, pour tout  $x \in [0; 1 - a]$  :

$$|G(x)| \leq \frac{x^3}{24} \|F''\|_{\infty, [0; 1]}.$$

2. À l'aide de la majoration précédente appliquée à  $F : u \mapsto \ln(\alpha^2 + u^2)$ ,  
 $a = \frac{k-1}{m}$  et  $x = \frac{1}{m}$ , montrer que, pour tout  $k \in [[1; m]]$ ,

$$\left| \ln(\alpha^2 + x_k^2) - m \int_{(k-1)/m}^{k/m} \ln(\alpha^2 + u^2) du \right| \leq \frac{1 + \alpha^2}{12\alpha^4 m^2}.$$

3. En déduire que :

$$\prod_{k=1}^m (\alpha^2 + x_k^2) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} e^{h(\alpha)m}.$$

**Solution (Ex.98 – Un équivalent de  $\prod_{k=1}^m (\alpha^2 + x_k^2)$ )**

1. Soit  $F$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0; 1]$  et  $a \in [0; 1[$ .  
Pour tout  $t \in [0; 1 - a]$ , on pose :

$$G(t) = \int_a^{a+t} F(u)du - tF\left(a + \frac{t}{2}\right).$$

- a) En notant  $\Phi$  une primitive de la fonction continue  $F$ , on voit que  $t \mapsto \int_a^{a+t} F(u)du = \Phi(a+t) - \Phi(a)$  est dérivable de dérivée  $t \mapsto F(a+t)$ .  
Donc  $G$  est dérivable.

$$\forall t \in [0; 1], G'(t) = F(a+t) - F\left(a + \frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2}F'\left(a + \frac{t}{2}\right).$$

- b) Soit  $x \in [0; 1-a]$ . À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à  $F$  sur  $\left[a + \frac{x}{2}; a+x\right]$ , établir que

$$|G'(x)| \leq \frac{x^2}{8} \|F''\|_{\infty, [0; 1]}.$$

La formule de Taylor appliquée à l'ordre un avec  $F$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\left[a + \frac{x}{2}; a+x\right]$  donne

$$F(a+x) = F\left(a + \frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}F'\left(a + \frac{x}{2}\right) + \int_{a+x/2}^{a+x} (a+x-u)F''(u)du$$

Donc

$$\begin{aligned} |G'(x)| &\leq \int_{a+x/2}^{a+x} (a+x-u) |F''(u)| du \leq \|F''\|_{\infty, [0; 1]} \int_{a+x/2}^{a+x} a+x-u du \\ &\leq \|F''\|_{\infty, [0; 1]} \left[ -\frac{(a+x-u)^2}{2} \right]_{a+x/2}^{a+x} \\ &\leq \frac{x^2}{8} \|F''\|_{\infty, [0; 1]}. \end{aligned}$$

- c) Alors

$$|G(x)| = \left| \int_0^x G'(u)du \right| \text{ car } G(0) = 0, \text{ donc}$$

$$|G(x)| \leq \left| \int_0^x \frac{u^2}{8} \|F''\|_{\infty, [0; 1]} du \right| \leq \frac{\|F''\|_{\infty, [0; 1]}}{8} \times \frac{x^3}{3}.$$

Ainsi, pour tout  $x \in [0; 1-a]$  :

$$|G(x)| \leq \frac{x^3}{24} \|F''\|_{\infty, [0; 1]}.$$

2. • En substituant avec les valeurs données dans l'énoncé ( $F$  étant  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0; 1]$ ),

$$G(x) = \int_{(k-1)/m}^{k/m} \ln(\alpha^2 + u^2)du - \frac{1}{m} \ln(\alpha^2 + x_k^2)$$

On déduit de la majoration précédente

$$\left| \ln(\alpha^2 + x_k^2) - m \int_{(k-1)/m}^{k/m} \ln du(\alpha^2 + u^2) \right| \leq m \left(\frac{1}{m}\right)^3 \frac{1}{24} \|F''\|_{\infty, [0; 1]}$$

•  $\forall u \in [0; 1], F'(u) = \frac{2u}{\alpha^2 + u^2}, F''(u) = \frac{2\alpha^2 - 2u^2}{(\alpha^2 + u^2)^2}$ , donc

(i) si  $u \leq \alpha$ , alors  $|F''(u)| \leq \frac{2\alpha^2}{\alpha^4} \leq \frac{2(\alpha^2 + 1)}{\alpha^4}$ ,

(ii) si  $u > \alpha$ , alors  $|F''(u)| = \frac{2}{((\alpha^2 + u^2)^2(u^2 - \alpha^2))} \leq \frac{2}{\alpha^4} \leq \frac{2(\alpha^2 + 1)}{\alpha^4}$  (car  $u \leq 1$ ),

et dans tous les cas  $|F''(u)| \leq \frac{2(\alpha^2 + 1)}{\alpha^4}$ , ce qui conduit à

$$\left| \ln(\alpha^2 + x_k^2) - m \int_{(k-1)/m}^{k/m} \ln(\alpha^2 + u^2) du \right| \leq \frac{1 + \alpha^2}{12\alpha^4 m^2}.$$

3. Sommons pour  $k$  allant de 1 à  $m$  et appliquons l'inégalité triangulaire :

$$\left| \ln \left( \prod_{k=1}^m (\alpha^2 + x_k^2) \right) - m \int_0^1 \ln(\alpha^2 + u^2) du \right| \leq m \times \frac{1 + \alpha^2}{12\alpha^4 m^2}, \text{ donc}$$

$$\ln \left( \prod_{k=1}^m (\alpha^2 + x_k^2) \right) - m \int_0^1 \ln(\alpha^2 + u^2) du \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Or  $u_m - v_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$  entraîne  $\exp(u_m - v_m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$  donc  $e^{u_m} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_m}$ .

D'où finalement

$$\prod_{k=1}^m (\alpha^2 + x_k^2) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} e^{h(\alpha)m}$$

puisque  $h(\alpha) = \int_0^1 \ln(\alpha^2 + u^2) du$ .

**Exercice 99**

*... et le phénomène de Runge*

1. a) Vérifier que  $Q_n(1) = \frac{1}{n^n} \prod_{i=1}^n (2i - 1)$ .

b) Donner un équivalent simple de  $Q_n(1)$

c) En déduire un équivalent de  $f(1) - P_n(1)$ .

2. Montrer finalement que :

$$P_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1) \text{ si, et seulement si, } \alpha > \alpha_0.$$

**Solution** (Ex.99 – ... et le phénomène de Runge)

---


$$\begin{aligned}
 \text{1. a) } Q_n(1) &= \prod_{k=1}^m \left( 1 - \left( \frac{2k-1}{n} \right)^2 \right) = \frac{1}{n^{2m}} \prod_{k=1}^m (n^2 - (2k-1)^2) \\
 &= \frac{1}{n^n} \prod_{k=1}^m (n - (2k-1))(n + (2k-1)) = \frac{1}{n^n} \prod_{i=1}^{2n} (2i-1).
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } Q_n(1) = \frac{1}{n^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{n^n 2^n \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2} \cdot 2^n e^{-n}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } f(1) - P_n(1) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n/2} \sqrt{2} \cdot 2^n e^{-n}}{(1 + \alpha^2) e^{h(\alpha)n/2}} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n/2} \sqrt{2}}{1 + \alpha^2} \exp \left[ \frac{n}{2} (2 \ln(2) - 2 - h(\alpha)) \right].
 \end{aligned}$$

2. • Si  $2 \ln(2) - 2 - h(\alpha) < 0$  (i.e.  $\alpha > \alpha_0$ ), alors  $f(1) - P_n(1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

• Si  $2 \ln(2) - 2 - h(\alpha) \geq 0$  (i.e.  $\alpha \leq \alpha_0$ ), alors  $f(1) - P_n(1)$  diverge sans limite.

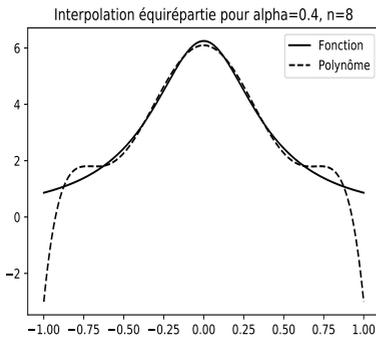
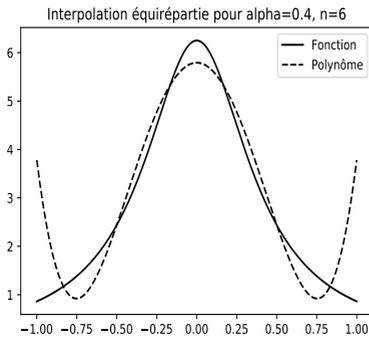
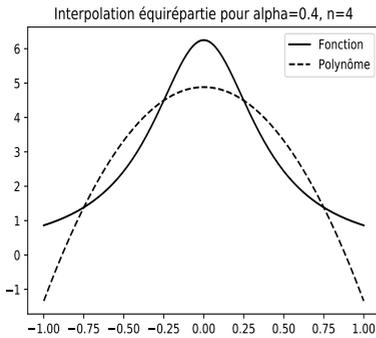
Plus précisément,  $|P_n(1)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  si  $\alpha < \alpha_0$ , et si  $\alpha = \alpha_0$  alors

$|P_n(1)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\sqrt{2}}{1 + \alpha^2}$  qui est d'ailleurs différent de  $|f(1)|$ .

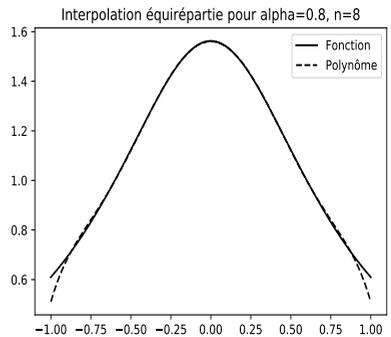
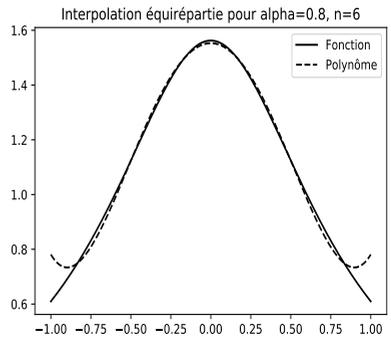
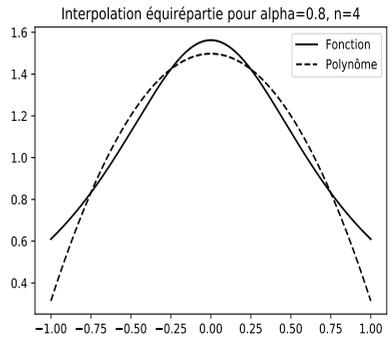
Conclusion :

$P_n(1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(1)$  si, et seulement si,  $\alpha > \alpha_0$  et il n'y a pas convergence uniforme sur  $[0; 1] \dots$

$$\alpha = 0,4 < \alpha_0$$



$$\alpha = 0,8 > \alpha_0$$



# Chapitre 31

## Convergence de l'interpolation de LAGRANGE et points de TCHEBYCHEV

### Exercice 100

*Erreur de l'interpolation polynomiale de LAGRANGE*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $[a; b]$  un segment,  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  et  $x_0, x_1, \dots, x_n$   $n + 1$  points deux à deux distincts de  $[a; b]$ .

Soit  $P_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , caractérisé par

$$\deg(P) \leq n \quad \text{et} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}, P_n(x_k) = f(x_k).$$

On définit le polynôme  $\pi_n$  par

$$\pi_n = \prod_{k=0}^n (X - x_k).$$

1. Soit  $x \in [a; b]$  **fixé et distincts des**  $x_k$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ .

a) Montrer qu'il existe une constante réelle  $A$  telle que

$$\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) - P_n(t) - A\pi_n(t)$$

s'annule en  $x$ .

b) Justifier que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  et s'annule en  $n + 2$  points distincts de  $[a; b]$ .

c) En déduire que  $\varphi^{(n+1)}$  s'annule au moins une fois en un point  $c$  de  $]a; b[$ .

d) Justifier que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \pi_n(x).$$

2. Justifier que

$$\forall x \in [a; b], \quad |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} |\pi_n(x)|,$$

puis que

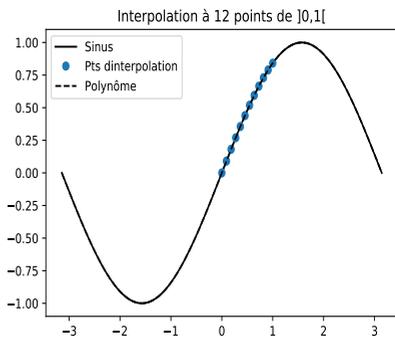
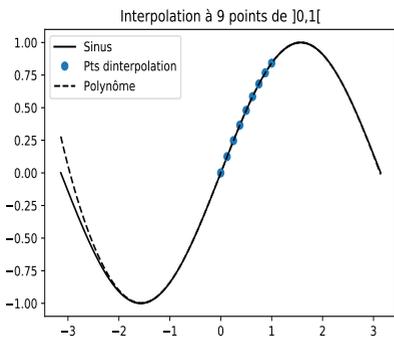
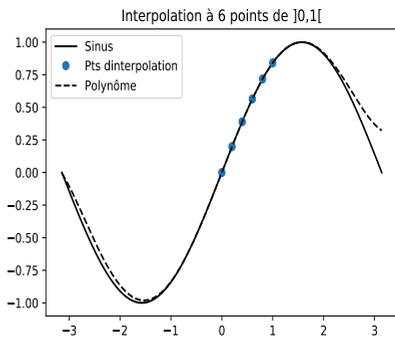
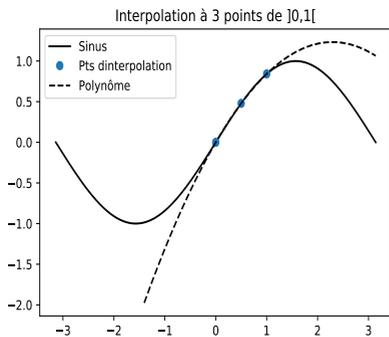
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|\pi_n\|_\infty,$$

et enfin que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

3. *Étonnant non ?*

Montrer que le polynôme interpolateur  $P_n$  de la fonction « sinus » en  $n$  points de  $[0; 1]$  converge uniformément vers  $\sin$  sur le segment  $[-\pi; \pi]$ ... *et il n'y a pas d'erreur sur les segments considérés !... comme on peut le constater sur les figures suivantes :*



**Solution (Ex.100 – Erreur de l'interpolation polynomiale de LAGRANGE)**

1. a) Comme  $x$  est distinct des  $x_k$ ,  $\pi_n(x) \neq 0$ , donc  $A = \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)}$  convient.
- b)  $\varphi$  est somme de fonctions de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  au moins.  
 Pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $f(x_k) = P_n(x_k)$  et  $\pi_n(x_k) = 0$  donc  $\varphi(x_k) = 0$ .  
 Par choix de  $A$ ,  $\varphi(x) = 0$ .  
 Donc  $\varphi$  s'annule en  $n + 2$  points distincts de  $[a; b]$ .
- c) En appliquant  $n + 1$  le théorème sur les intervalles formées par les  $n + 2$  points d'annulation de  $\varphi$ , on voit que  $\varphi'$  s'annule aux moins  $n + 1$  fois. Et en itérant ce raisonnement  $n$  fois, on voit que  $\varphi^{(n+1)}$  s'annule au moins une fois, en un point  $c \in ]0; 1[$ .
- d) Comme  $\deg P_n \leq n$ ,  $P_n^{(n+1)} = 0$  et comme  $\pi_n$  est un polynôme unitaire

de degré  $n + 1$ ,  $\pi^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$ .

Donc  $\varphi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - (n + 1)!A$ , d'où  $A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}$  et

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} \pi_n(x).$$

2. Justifier que

$$\forall x \in [a; b], \quad |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\|\varphi^{(n+1)}\|_\infty}{(n + 1)!} \pi_n(x).$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|\varphi^{(n+1)}\|_\infty}{(n + 1)!} (b - a)^{n+1}.$$

De ce qui précède découle :

$$\forall x \in [a; b], \exists c_x \in ]a; b[, |f(x) - P_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n + 1)!} \pi_n(x) \right|$$

On en déduit

$$\forall x \in [a; b], \quad |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n + 1)!} |\pi_n(x)|$$

puis

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n + 1)!} \|\pi_n\|_\infty.$$

Enfin, puisque pour tout  $x \in [a; b]$   $\pi_n(x)$  est le produit de  $n + 1$  facteurs  $x - x_k$  tels que  $|x - x_k| \leq b - a$ ,  $|\pi_n(x)| \leq (b - a)^{n+1}$ , d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n + 1)!} (b - a)^{n+1}.$$

3. *Étonnant non ?*

La majoration précédente conduit à

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|\sin - P_n\|_\infty \leq \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Or  $\frac{(2\pi)^{n+1}}{(n + 1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc par encadrement  $\|\sin - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et

$P_n \xrightarrow{\text{CVU}} \sin$  sur  $[-\pi; \pi]$ .

**Exercice 101**

*Les points de TCHEBYCHEV*

On reprend les hypothèses précédentes, en fixant de plus le segment en posant  $[a; b] = [-1; 1]$ .

On admet l'existence des *polynômes de Tchebychev* vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n, \text{dom}(T_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

et  $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

On pose  $t_n = \frac{1}{2^n} T_{n+1}$ .

1. a) Justifier que  $t_n$  est unitaire de degré  $n + 1$ .  
 b) Déterminer  $\|t_n\|_\infty$ .
2. On suppose que  $\|\pi_n\|_\infty < \|t_n\|_\infty$  et on pose  $Q = t_n - \pi_n$ .  
 Soit pour tout  $k \in [[0; n + 1]]$ ,  $y_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \cos\left(\frac{k\pi}{n + 1}\right)$ .  
 a) Montrer que  $Q$  change de signe dans chacun des  $n + 1$  intervalles  $]y_{k+1}; y_k[$  avec  $k \in [[0; n]]$ .  
 b) En déduire que  $Q$  est le polynôme nul.  
 c) En déduire une contradiction.
3. a) Déterminer les racines de  $t_n$ .  
 b) En déduire que

$$\forall k \in [[0; n]], \quad x_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \cos\left(\frac{(2k + 1)\pi}{2(n + 1)}\right)$$

constitue un choix optimal des  $n + 1$  points  $x_k$  pour la convergence uniforme de  $(P_n)$  vers  $f$ .

Ces points s'appellent les *points de Tchebychev*.

4. En 1901 le mathématicien allemand Carl RUNGE a démontré que, pour la fonction

$$f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{3x^2 + 1}$$

le choix de points uniformément répartis sur  $] -1; 1[$  n'entraîne pas la convergence uniforme de  $P_n$  vers  $f$ . Plus précisément, on peut montrer le *phénomène de Runge* :

$$P_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Observons ce qui se passe si l'on choisit les points de Tchebychev.

- a) En remarquant que

$$\forall x \in [-1; 1], \quad f(x) = \text{Im} \left( \frac{1}{\sqrt{3x - i}} \right),$$

proposer une majoration de  $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ .

- b) En déduire que polynôme interpolateur  $P_n$  de  $f$  aux points de Tchebychev converge uniformément vers  $f$  sur  $[-1; 1]$ .

**Solution** (Ex.101 – Les points de TCHEBYCHEV)

1. a)  $\deg(t_n) = \deg(T_{n+1}) = n + 1$  et  $\text{dom}(t_n) = \frac{1}{2^n} \text{dom}(T_{n+1}) = 1$ .

b)  $\forall x \in [-1; 1]$ ,

$$T_{n+1}(x) = T_{n+1}(\cos(\text{Arccos}(x))) = \cos((n+1)\text{Arccos}(x)) \in [-1; 1],$$

donc  $\|T_{n+1}\|_\infty \leq 1$ .

De plus  $T_{n+1}(1) = T_{n+1}(\cos(0)) = \cos((n+1)0) = 1$  donc  $\|T_{n+1}\|_\infty \geq 1$ .

Donc  $\|T_{n+1}\|_\infty = 1$  et par homogénéité  $\|t_n\|_\infty = \frac{1}{2^n}$ .

2. a)  $\forall k \in [[0; n+1]]$ ,

$$\begin{aligned} Q(y_k) &= \frac{1}{2^n} \cos((n+1)y_k) - \pi_n(y_k) = \frac{1}{2^n} \cos(k\pi) - \pi_n(y_k) = \\ &= (-1)^k \|t_n\|_\infty - \pi_n(y_k) \end{aligned}$$

Si  $k$  est pair,  $Q(y_k) = \|t_n\|_\infty - \pi_n(y_k) > 0$  car  $\|\pi_n\|_\infty < \|t_n\|_\infty$ .

Si  $k$  est impair,  $Q(y_k) = -\|t_n\|_\infty - \pi_n(y_k) < 0$  car  $\|\pi_n\|_\infty < \|t_n\|_\infty$ .

Donc  $Q$  change de signe sur chacun de intervalles  $]y_{k+1}; y_k[$  avec  $k \in [[0; n]]$ .

b) Comme toute fonction polynomiale est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $Q$  s'annule au moins une fois dans chaque intervalle  $]y_{k+1}; y_k[$  avec  $k \in [[0; n]]$ .

Donc  $Q$  possède au moins  $n + 1$  racines distinctes. Mais  $Q = t_n - \pi_n$  où  $t_n$  et  $\pi_n$  sont tous deux de degré  $n + 1$  et unitaires, donc  $Q$  est au plus de degré  $n$ . Par conséquent,  $Q$  est le polynôme nul.

c) Donc  $t_n = \pi_n$ , donc  $\|\pi_n\|_\infty = \|t_n\|_\infty$ , ce qui est contradictoire.

3. a) • Les racines de  $t_n$  sont celles de  $T_{n+1}$ .

• Cherchons les racines de  $T_{n+1}$  dans  $[-1; 1]$ .

Soit  $x \in [-1; 1]$  et  $\theta = \text{Arccos}(x) \in [0; \pi]$ .

$$T_{n+1}(x) = 0 \iff \cos((n+1)\theta) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{k\pi}{n+1}$$

De plus :  $\frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{k\pi}{n+1} \in [0; \pi] \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq n + \frac{1}{2}$ , or  $\theta \in [0; \pi]$ ,

donc

$$T_{n+1}(x) = 0 \iff \cos((n+1)\theta) = 0 \iff \exists k \in [[0; n]], \theta = \frac{\pi}{2(n+1)} +$$

$$\frac{k\pi}{n+1}$$

$$T_{n+1}(x) = 0 \iff \exists k \in [[0; n]], x = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right).$$

La suite  $\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)_{0 \leq k \leq n-1}$  est strictement croissante à valeurs dans

$[0; \pi]$  et la fonction  $\cos$  est strictement décroissante sur  $[0; \pi]$  donc les

$n$  nombres  $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)$  pour  $k \in [[0; n-1]]$  sont deux à deux distincts (suite strictement décroissante).

- Comme  $\deg(\mathbb{T}_{n+1}) = n+1$ ,  $\mathbb{T}_{n+1}$  possède au plus  $n+1$  racines distinctes.
- Finalement,  $\mathbb{T}_{n+1}$  a exactement  $n+1$  racines distinctes, toutes dans  $[-1; 1]$  et est scindé à racines simples, donc

$$t_n = \prod_{k=0}^n \left[ X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right) \right]$$

4. a) Tout choix des  $x_k$  conduit à  $\|\pi_n\|_\infty \geq \|t_n\|_\infty$ , et comme  $t_n$  possède  $n+1$  racines distinctes dans  $[-1; 1]$ , prendre

$$\forall k \in [[0; n]], \quad x_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)$$

rend minimale la norme  $\|\pi_n\|_\infty$ .

C'est donc un choix optimal des  $n+1$  points  $x_k$  pour la convergence uniforme de  $(P_n)$  vers  $f$ .

On peut écrire

$$\|t_n\|_\infty = \min_{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P)=n+1, \text{dom}(P)=1} \|P\|_\infty.$$

On peut même démontrer que ce choix optimal est unique, c'est-à-dire que si  $P$  est unitaire de degré  $n+1$ , alors  $\|P\|_\infty = \|t_n\|_\infty$  entraîne  $P = t_n$ .

5. a)  $\forall x \in [-1; 1], \text{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{3}x - i}\right) = \text{Im}\left(\frac{\sqrt{3}x + i}{3x^2 + 1}\right) = f(x)$

On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1; 1], f^{(k)}(x) = \text{Im}\left(\frac{(-1)^k \sqrt{3}^k k!}{(\sqrt{3}x - i)^{k+1}}\right),$$

donc  $|f^{(k)}(x)| \leq k! \sqrt{3}^k$  car  $|(\sqrt{3}x - i)^{k+1}| \geq 1$ .

Donc  $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq (n+1)! \sqrt{3}^{n+1}$ .

- b) La majoration de l'exercice précédent

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|\pi_n\|_\infty$$

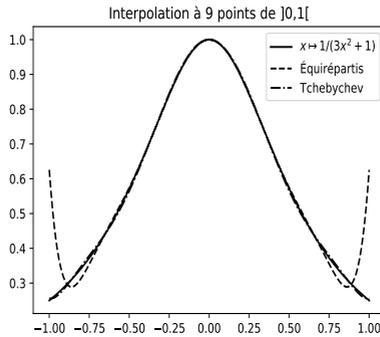
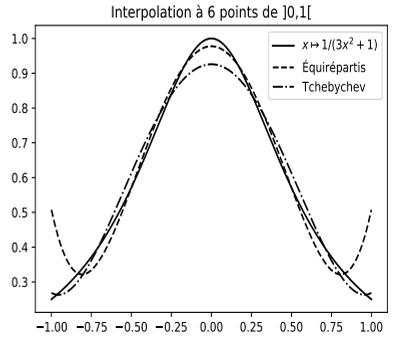
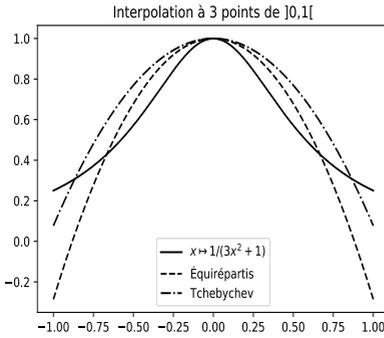
donne pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|t_n\|_\infty \leq \frac{\sqrt{3}^{n+1}}{2^n} \leq \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Comme  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , par encadrement,

# CHAPITRE 31. CONVERGENCE DE L'INTERPOLATION DE LAGRANGE ET POINTS DE TCHEBYCHEV

$$\|f - P_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \text{ i.e. } P_n \xrightarrow{\text{CVU}} f.$$



# Chapitre 32

## Espaces de HILBERT et familles de polynômes orthogonaux

☞[E3A-M1 – 2017 – PSI – Exo 2] ☞[CCP – 2019 – PC – Exo 1]

**Définition – Fonctions poids, produits scalaires intégraux, espaces  $L^2$  de HILBERT**

① Soit  $]a; b[ \subset \mathbb{R}$  (éventuellement  $a = -\infty$  ou/et  $b = +\infty$ ). On appelle fonction poids  $w : ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$  toute fonction telle que

- (i)  $f$  est continue strictement positive sur  $]a; b[$ ,
- (ii) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^n w(x)$  est intégrable sur  $]a; b[$ .

Dans la suite,  $w$  est une fonction poids sur  $]a; b[$ .

② On appelle espace de HILBERT l'ensemble

$$L_w^2 \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \{f : ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}, f^2 w \text{ est int\u00e9grable}\}.$$

$L_w^2$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

③ On d\u00e9finit sur  $L_w^2$  le produit scalaire int\u00e9gral

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

et sa norme associ\u00e9e

$$\|f\| \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \sqrt{\int_a^b f(x)^2 w(x)dx}$$

**Commentaires –**

(ii) assure que pour tout  $n$ ,  $x \mapsto x^n$  est dans  $L_w^2$ , donc  $\mathbb{R}[X] \subset L_w^2 : L_w^2$  contient au moins tous les polyn\u00f4mes.

② prétend de  $L_w^2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}]a; b[$ , énorme espace de toutes les fonctions de  $]a; b[$  dans  $\mathbb{R}$ .

Pour montrer que  $L_w^2$  est stable par combinaison linéaire, on peut s'appuyer sur

$$(f + \lambda g)^2 \leq f^2 + \lambda^2 g^2 + 2|\lambda f g| \leq (1 + |\lambda|)(f^2 + |\lambda| g^2)$$

obtenue grâce à  $|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$  (car  $(|x| - |y|)^2 \geq 0 \dots$ )

Dans ③, la bilinéarité, la symétrie et la positivité ne posent aucun problème. Pour montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est défini, on observe que  $f^2 w$  est continue et positive, donc la nullité de l'intégrale entraîne la nullité de la fonction  $f^2 w$  sur  $]a; b[$ , et comme  $w$  ne s'annule jamais, elle entraîne la nullité de  $f$  sur  $]a; b[$ .

**Exemples –**

Dans les concours, on rencontre fréquemment :

①  $]a; b[ = ]-1; 1[$  et  $w : x \mapsto 1$ , ce qui conduit au produit scalaire usuel

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Les *polynômes de LEGENDRE* forment une famille orthogonale pour ce produit scalaire.

②  $]a; b[ = ]-1; 1[$  et  $w : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , ce qui conduit au produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{x=\cos(t)}{=} \int_0^\pi f(\cos(t))g(\cos(t))dt.$$

Les *polynômes de TCHEBYCHEV* forment une famille orthogonale pour ce produit scalaire.

③  $]a; b[ = ]0; +\infty[$  et  $w : x \mapsto e^{-x}$ , ce qui conduit au produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x} dx.$$

Les *polynômes de LAGUERRE* forment une famille orthogonale pour ce produit scalaire.

④  $]a; b[ = ]-\infty; +\infty[$  et  $w : x \mapsto e^{-x^2}$ , ce qui conduit au produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx.$$

Les *polynômes de HERMITE* forment une famille orthogonale pour ce produit scalaire.

---

**Exercice 102***Vérifications*

Vérifier que pour tous ces exemples, les fonctions  $x \mapsto x^n w(x)$  sont intégrables sur  $]a; b[$ .

**Solution (Ex.102 – Vérifications)**

① Les fonctions  $x \mapsto x^n w(x) = x^n$  sont continues sur le segment  $[-1; 1]$  donc intégrables sur  $] -1; 1[$ .

②  $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$  or  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  est une fonction intégrable sur  $[0; 1[$  (intégrale de Riemann avec  $\alpha = 1/2 < 1$ ). Donc  $x \mapsto x^n w(x)$  est intégrable sur  $[0; 1[$ . Par parité, elle l'est sur  $] -1; 1[$ .

Notez que pour ce poids  $w$  le changement de variable  $x = \cos(t)$  fait le plus grand bien, ☞ *exercice suivant*.

③ Observer par exemple que  $x^n e^{-x} = o(e^{-x/2})$  en  $+\infty$  et  $x \mapsto e^{-x/2}$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$  (exemple de référence,  $1/2 > 0$ ).

④ Observer par exemple que  $x^n e^{-x^2} = o(e^{-x})$  en  $+\infty$  et  $x \mapsto e^{-x}$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$  (exemple de référence,  $1 > 0$ ). Par parité on récupère l'intégrabilité sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 103***Exemple des polynômes de TCHEBYCHEV*

On prend  $]a; b[ = ] -1; 1[$  et  $w : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , ce qui conduit au produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{x=\cos(t)}{=} \int_0^\pi f(\cos(t))g(\cos(t))dt.$$

Soit  $(T_n)$  la suite de polynôme définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)).$$

Justifier les propriétés suivantes.

① La famille  $(T_n)$  est orthogonale avec pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(T_n) = n$ .

② Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , toutes les racines de  $T_n$  sont réelles, simples et dans  $]a; b[ = ] -1; 1[$ .

**Solution (Ex.103 – Exemple des polynômes de TCHEBYCHEV)**

① Pour  $m \neq n$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle T_m, T_n \rangle &= \int_0^\pi T_m(\cos(t))T_n(\cos(t))dt = \int_0^\pi \cos(mt) \cos(nt)dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin((m+n)t)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)t)}{m-n} \right]_0^\pi \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Pour  $\deg(T_n) = n$ , voir la partie consacrée aux polynômes de TCHEBYCHEV.

② Dans cette partie, on a justement démontré que  $T_n$  admet pour racines les  $n$  nombres  $\cos\left(\frac{2k-1}{n+1}\pi\right)$  où  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , qui sont bien  $n$  racines distinctes dans  $] -1; 1[$ .

**Exercice 104**

*Les polynômes orthogonaux vérifient une relation de récurrence d'ordre 2*

À l'aide du procédé de GRAM-SCHMIDT par exemple, on peut construire une suite de polynômes orthogonaux  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(P_n) = n,$$

ce qui a pour conséquence que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad Q \perp P_n$$

puisque  $P_n \in \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})^\perp = \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ .

Montrer qu'alors

$$\forall n \geq 2, \quad \exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3, P_n(X) = (a_n X + b_n)P_{n-1}(X) + c_n P_{n-2}(X).$$

Sur les polynômes de TCHEBYCHEV, nous avons vu une telle relation

$$T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$$

.

**Solution (Ex.104 – Les polynômes orthogonaux vérifient une relation de récurrence**

- En appliquant le procédé de GRAM-SCHMIDT à la famille  $(1, X, \dots, X^n)$  par exemple, ou par tout autre procédé, on peut construire une famille orthogonale  $(P_0, \dots, P_n)$  vérifiant les conditions.

- Soit pour tout  $n$   $d_n$  le coefficient dominant de  $P_n$ .

$P_n - \frac{d_n}{d_{n-1}}XP_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , donc  $(1, \dots, P_{n-1})$  étant une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ,

il peut s'écrire

$$P_n - \frac{d_n}{d_{n-1}}XP_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i P_i \quad (\heartsuit).$$

En calculer le produit scalaire de  $(\heartsuit)$  avec  $P_j$ , pour  $0 \leq j < n$ , on obtient

$$-\frac{d_n}{d_{n-1}} \langle P_j, XP_{n-1} \rangle = \beta_j \|P_j\|^2.$$

Or par définition du produit scalaire,  $\langle P_j, XP_{n-1} \rangle = \langle XP_j, P_{n-1} \rangle$ .

Et  $P_{n-1}$  est orthogonal à tout polynôme de degré  $i < n - 1$ , donc à  $XP_j$  si  $j \leq n - 3$ . Donc

$$\forall j \leq n - 3, 0 = \beta_j \|P_j\|^2, \text{ donc } \beta_j = 0.$$

$(\heartsuit)$  devient

$$P_n - \frac{d_n}{d_{n-1}} XP_{n-1} = \beta_{n-2} P_{n-2} + \beta_{n-1} P_{n-1}.$$

Donc en prenant  $a_n = \frac{d_n}{d_{n-1}}$ ,  $b_n = \beta_{n-1}$  et  $c_n = \beta_{n-2}$

$$P_n(X) = (a_n X + b_n) P_{n-1}(X) + c_n P_{n-2}(X).$$

### Exercice 105

#### *Racines des polynômes orthogonaux*

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes orthogonaux vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(P_n) = n.$$

Montrer que les  $n$  racines du polynôme  $P_n$  sont réelles, deux à deux distinctes, et à l'intérieur de  $]a; b[$ .

**Solution (Ex.105 – Racines des polynômes orthogonaux)**

Soit  $x_1, \dots, x_k$  les racines de  $P_n$  qui sont réelles, de multiplicité impaire, à l'intérieur de  $]a; b[$ . On a  $k \leq n$  car  $\deg(P_n) = n$ .

Supposons  $k < n$  et posons

$$Q(X) = 1 \text{ si } k = 0,$$

$$Q(X) = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_k) \text{ sinon.}$$

$\langle Q, P_n \rangle = 0$  car  $\deg Q = k < n$ , or  $\langle Q, P_n \rangle = \int_a^b Q(x) P_n(x) w(x) dx$ , et le

polynôme  $QP_n$  est de signe constant car toutes ses racines sont de multiplicité paire. Donc  $QP_n w$  est continue, de signe constant et d'intégrale nulle sur  $]a; b[$ , donc est nulle sur  $]a; b[$ . Comme  $w$  ne s'annule jamais, le polynôme  $QP_n$  est le polynôme, ce qui est absurde car  $\deg(QP_n) = n + k \geq 0$ .

Donc  $k = n$ ,  $P_n$  admet  $n$  racines réelles dans  $]a; b[$ , et comme  $\deg(P_n) = n$ , il n'y en a pas d'autres donc la propriété est vraie, et elles sont toutes de multiplicité 1.



# Chapitre 33

## Polynômes de LEGENDRE

☞[CCP – 2018 – PC – ]

Les polynômes de LEGENDRE forment aussi un exemple de famille de polynômes orthogonaux.

**Définition – Les polynômes de LEGENDRE**

Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n = (X^2 - 1)^n = (X - 1)^n(X + 1)^n$ .

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$L_n = P_n^{(n)} = \frac{d^n}{dX^n}(X^2 - 1)^n.$$

$L_n$  est le  $n$ -ième polynôme de LEGENDRE.

### Exercice 106

*Propriétés des polynômes de Legendre*

1. Montrer que  $L_0 = 1$ ,  $L_1 = 2X$  et  $L_2 = 12X^2 - 4$ .  
 $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(L_n) = n$ ,  $\text{dom}(L_n) = \frac{(2n)!}{n!}$  et  $L_n$  a la même parité que l'entier  $n$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $L_n$  admet exactement  $n$  racines réelles distinctes comprises dans  $] -1 ; 1[$ .

**Solution (Ex.106 – Propriétés des polynômes de Legendre)**

1.  $P_0 = 1$ , donc  $L_0 = P_0^{(0)} = P_0 = 1$ .  
 $P_1 = (X^2 - 1)$ , donc  $L_1 = P_1^{(1)} = 2X$ .  
 $P_2 = (X^2 - 1)^2$ , donc  $L_2 = P_2^{(2)} = (2 \cdot 2X(X^2 - 1))' = 12X^2 - 4$ .  
 $\deg(P_n) = 2n$  donc  $\deg(L_n) = \deg(P_n^{(n)}) = 2n - n = n$ .

$P_n = X^{2n} + \dots$  donc après  $n$  dérivation,

$$P_n^{(n)} = [2n(2n-1)\dots(2n-(n-1))]X^n + \dots = \frac{(2n)!}{n!}X^n + \dots$$

$P_n = (X^2 - 1)^n$  est un polynôme pair. Or le dérivé d'un polynôme pair est impair, et le dérivé d'un polynôme impair est pair. Donc après  $n$  dérivation,  $L_n$  est pair si  $n$  est pair et impair si  $n$  est impair.

2. Ici, deux outils nous attendent :

- si  $\alpha$  est racine de multiplicité  $j$  du polynôme  $Q$ , alors  $Q(\alpha) = Q'(\alpha) = \dots = Q^{(j-1)}(\alpha) = 0$ , autrement dit  $\alpha$  est racine de  $j$  polynômes dérivés successifs,

- si  $P(a) = P(b)$ , alors  $P'$  admet une racine dans  $]a; b[$ ... le fameux théorème de ROLLE, puisque  $P$  est dérivable.

$P_n = (X + 1)^n(X - 1)^n$  admet comme racine  $-1$  et  $1$ , toutes deux de multiplicité  $n$ .

Montrons par récurrence sur  $k \in [[0; n - 1]]$  que  $P_n^{(k)}$  admet  $-1$  et  $1$  comme racines de multiplicité  $n - k$ , et  $k$  racines distinctes dans  $] -1; 1[$ .

**I**  $-1$  et  $1$  sont les racines de  $P_n$ , de multiplicité  $n$  exactement.

**H** Supposons la propriété vraie au rang  $k \in [[0; n - 2]]$  fixé.

Alors  $-1$  et  $1$  sont racines de multiplicité  $n - k$  de  $P^{(k)}$ , donc sont racines de multiplicité  $n - k - 1$  de  $P^{(k+1)}$ .

De plus  $P^{(k)}$  admet  $k$  racines dans  $] -1; 1[$ , disons

$$-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < 1$$

Donc

$$P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(\alpha_1) = \dots = P^{(k)}(\alpha_k) = P^{(k)}(1) = 0.$$

En appliquant le théorème de ROLLE sur chacun des  $k + 1$  intervalles  $[-1; \alpha_1], [\alpha_1; \alpha_2], \dots, [\alpha_k; 1]$ , on obtient que  $P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$  admet  $k + 1$  racines respectivement dans  $] -1; \alpha_1[, ] \alpha_1; \alpha_2[, \dots, ] \alpha_k; 1[$ , ce qu'il fallait démontrer.

**C** La propriété est vraie pour tout  $k \in [[0; n - 1]]$  et en particulier pour  $k = n - 1$  :  $P_n^{(n-1)}$  admet comme racine simple  $-1$  et  $1$ , ainsi que  $n - 1$  nombres distincts  $-1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{n-1} < 1$ .

Donc par le théorème de ROLLE toujours,  $L_n = P_n^{(n)}$  admet  $n$  racines, intercalées entre ces  $n + 1$  nombres. *Cqfd*.

**Exercice 107**

*Orthogonalité des polynômes de LEGENDRE*

Montrer que les polynômes de LEGENDRE forment une famille orthogonale pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

qui correspond à la fonction poids  $w : x \mapsto 1$  sur  $] -1; 1[$  (voir § sur les familles de polynômes orthogonales).

**Solution (Ex.107 – Orthogonalité des polynômes de LEGENDRE)** *Puisque  $-1$  et  $1$  sont racines de  $L_m$  d'ordre  $m$  et de  $L_n$  d'ordre  $n$ , en prenant  $n < m$ , en effectuant  $n$  IPP successives dérivant  $L_n$  et primitivant  $L_m$ ,  $-1$  et  $1$  seront encore racines de la  $n$ -ème primitive de  $L_m$  mais  $L_n$  aura disparu, car  $\deg(L_n) = n$ .*

Soit  $n < m$ .

$$\begin{aligned} \langle L_m, L_n \rangle &= \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^m]^{(m)} [(x^2 - 1)^n]^{(n)} dx \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} - \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^m]^{(m-1)} [(x^2 - 1)^n]^{(n+1)} dx \\ &\quad + \underbrace{\left[ [(x^2 - 1)^m]^{(m-1)} [(x^2 - 1)^n]^{(n)} \right]_{-1}^1}_{=0 \text{ car } -1 \text{ et } 1 \text{ sont racines d'ordre } m \text{ de } (x^2-1)^m} \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^m]^{(m-2)} [(x^2 - 1)^n]^{(n+2)} dx \\ &\quad - \underbrace{\left[ [(x^2 - 1)^m]^{(m-2)} [(x^2 - 1)^n]^{(n+1)} \right]_{-1}^1}_{=0 \text{ car } -1 \text{ et } 1 \text{ sont racines d'ordre } m \text{ de } (x^2-1)^m} \\ &\quad \vdots \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} (-1)^m \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^m] [(x^2 - 1)^n]^{(n+m)} dx \end{aligned}$$

et comme  $n + m > 2n$  et  $\deg(x^2 - 1)^n = 2n$ ,  $[(x^2 - 1)^n]^{(n+m)} = 0$ ,  $\langle L_m, L_n \rangle = 0$ .



# Chapitre 34

## Intégration numérique de GAUSS

☞[CCP – 2019 – PC – Exo 1]

☞Lire le §« Espaces de Hilbert et familles de polynômes orthogonaux » au préalable.

*On connaît les classiques méthode des rectangles et méthode des trapèzes pour calculer la valeur approchée d'une intégrale. Ces méthodes ne sont pas adaptées aux intégrales impropres puisqu'elles nécessitent la connaissance des valeurs de l'intégrande aux bornes de l'intervalle, et nécessitent aussi que l'intervalle soit borné. GAUSS a proposé une toute autre démarche, basées sur les polynômes orthogonaux.*

### Une formule magique

Soit  $P$  un polynôme. Étudions cette proposition due à GAUSS :

$$\int_{-1}^1 P(t)dt \simeq \frac{5}{9}P\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}P(0) + \frac{5}{9}P\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \quad (\heartsuit)$$

( $\heartsuit$ ) prétend calculer l'intégrale de  $P$  sur  $[-1; 1]$  en s'appuyant uniquement sur les valeurs de  $P$  en 3 points.

Observons ( $\heartsuit$ ) pour les premiers monômes :

P	$\int_{-1}^1 P(t)dt$	$\frac{5}{9}P\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}P(0) + \frac{5}{9}P\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$
1	2	$\frac{5}{9} + \frac{8}{9} + \frac{5}{9} = 2$
X	0	$-\frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{8}{9} \times 0 + \frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{5}} = 0$
X <sup>2</sup>	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9} \times \frac{3}{5} + \frac{8}{9} \times 0 + \frac{5}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{3}$
X <sup>3</sup>	0	$-\frac{5}{9}\sqrt{\frac{3^3}{5^3}} + \frac{8}{9} \times 0 + \frac{5}{9}\sqrt{\frac{3^3}{5^3}} = 0$
X <sup>4</sup>	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{9} \times \frac{3^2}{5^2} + \frac{8}{9} \times 0 + \frac{5}{9} \times \frac{3^2}{5^2} = \frac{2}{5}$
X <sup>5</sup>	0	$-\frac{5}{9}\sqrt{\frac{3^5}{5^5}} + \frac{8}{9} \times 0 + \frac{5}{9}\sqrt{\frac{3^5}{5^5}} = 0$
X <sup>6</sup>	$\frac{2}{7} \simeq 0,2857\dots$	$\frac{5}{9} \times \frac{3^3}{5^3} + \frac{8}{9} \times 0 + \frac{5}{9} \times \frac{3^3}{5^3} = \frac{6}{25} = 0,24$

De plus la formule (♡) est linéaire, donc comme elle est vraie pour tout  $X^k$  avec  $0 \leq k \leq 5$ , elle est vraie pour tout  $P \in \mathbb{R}_5[X]$ . Ainsi

$$\forall P \in \mathbb{R}_5[X], \quad \int_{-1}^1 P(t)dt = \frac{5}{9}P\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}P(0) + \frac{5}{9}P\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

**Exercice 108**

*Intégration numérique ou « Quadrature de GAUSS »*

Soit  $]a; b[$  un intervalle,  $w$  une fonction poids sur  $]a; b[$  (voir le § sur les polynômes orthogonaux).

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$  une suite de polynômes orthogonaux telle que :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \deg(L_k) = k.$$

En particulier,  $L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$  et  $L_n$  admet  $n$  racines distinctes deux à deux  $x_1, \dots, x_n$  dans  $]a; b[$ .

Montrer qu'il existe  $n$  réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_a^b P(t)w(t)dt = \alpha_1 P(x_1) + \dots + \alpha_n P(x_n) \quad (\mathcal{G})$$

**Solution (Ex.108 – Intégration numérique ou « Quadrature de GAUSS »)**

(i) Cherchons  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  pour que  $(\mathcal{G})$  soit vérifiée pour tout polynôme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Par linéarité, il suffit que  $(\mathcal{G})$  soit vérifiée pour tous les monômes  $(X^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ .

Soit  $k \in [[0; n-1]]$ . Notons  $I_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_a^b t^k dt$ .

$X^k$  vérifie  $(\mathcal{G})$  si, et seulement si,  $\alpha_1 x_1^k + \dots + \alpha_n x_n^k = I_k$ .

Ainsi

$$\forall k \in [[0; n-1]], \quad \begin{matrix} X^k \text{ vérifie } (\mathcal{G}) \end{matrix} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \dots + \alpha_n = I_0 \\ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = I_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 x_1^{n-1} + \dots + \alpha_n x_n^{n-1} = I_{n-1} \end{cases}$$

$$\iff V \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ \vdots \\ I_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{où } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

$V$  est une matrice de VANDERMONDE, inversible car les racines  $x_i$  sont deux à deux distinctes.

Donc ce système admet une unique solution, donc il existe une unique famille de  $n$  réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  telle que  $(\mathcal{G})$  est vérifiée pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

(ii) Montrons qu'alors  $(\mathcal{G})$  est vraie pour tout  $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ . Par la propriété de division euclidienne,

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{R}[X], \quad P = QL_n + R \text{ avec } \deg(R) \leq n-1 \\ \text{et aussi } \deg(Q) \leq n-1 \text{ car } \deg(L_n) = n \text{ et } \deg(P) \leq 2n-1.$$

$$\int_a^b P(t)w(t)dt = \int_a^b (Q(t)L_n(t) + R(t))w(t)dt \\ = \int_a^b Q(t)L_n(t)w(t)dt + \int_a^b R(t)w(t)dt$$

Or  $L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$  et  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  donc  $L_n \perp Q : \int_a^b Q(t)L_n(t)w(t)dt = 0$

Et  $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  donc  $\int_a^b R(t)w(t)dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i R(x_i)$ .

Mais :  $\forall i \in [[1; n]]$ ,  $R(x_i) = P(x_i) - Q(x_i)L_n(x_i) = P(x_i)$  car  $x_i$  est une

racine de  $L_n$ . Donc  $\int_a^b R(t)w(t)dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(x_i)$ .

Ainsi

$$\int_a^b P(t)w(t)dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(x_i).$$

**Exercice 109**

*Exemple dans un cas impropre*

Établir la formule suivante :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}P(2 - \sqrt{2}) + \frac{2 - \sqrt{2}}{4}P(2 + \sqrt{2})$$

**Solution (Ex.109 – Exemple dans un cas impropre)** Ici  $]a; b[ = ]0; +\infty[$  et  $w : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t}$ .

Cherchons une famille  $(L_0, L_1, L_2)$  orthogonale de  $\mathbb{R}_2[X]$ , par le procédé de GRAM-SCHMIDT appliqué à la base  $(1, X, X^2)$ .

Je rappelle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \Gamma(n + 1) = n!$

- $\|1\| = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$  donc  $P_0 = 1$  convient.

- $X - \langle X, P_0 \rangle P_0 = X - \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = X - 1$

$$\|X - 1\|^2 = \int_0^{+\infty} (t - 1)^2 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (t^2 - 2t + 1)e^{-t} dt = 2! - 2 \cdot 1! + 0! = 1$$

Donc  $P_1 = X - 1$  convient.

- $X^2 - \langle X^2, P_0 \rangle P_0 - \langle X^2, P_1 \rangle P_1 = X^2 - 2!P_0 - (3! - 2!)P_1 = X^2 - 4X + 2$

Inutile de normaliser  $P_2$  car je cherche juste une famille orthogonale, donc  $P_2 = X^2 - 4X + 2$ .

Ses racines sont  $2 \pm \sqrt{2}$ .

Il reste à trouver  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  pour que

$$\alpha_1 P(2 - \sqrt{2}) + \alpha_2 P(2 + \sqrt{2}) = \int_0^{+\infty} P(t) dt$$

lorsque  $P = 1$  et  $P = X$  :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1(2 - \sqrt{2}) + \alpha_2(2 + \sqrt{2}) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \\ \alpha_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

# Chapitre 35

## Approximation polynomiale en norme $L^2$ de HILBERT

☞ Lire le § « généralités sur les polynômes orthogonaux au préalable.

*En dehors de l'approximation uniforme, une autre idée pour mesurer l'écart entre un polynôme  $P$  et une fonction  $f$  est d'utiliser la norme  $\|\cdot\|$  de HILBERT. Je rappelle le contexte.*

**Définition – Fonctions poids, produits scalaires intégraux, espaces  $L^2$  de HILBERT**

① Soit  $]a; b[ \subset \mathbb{R}$  (éventuellement  $a = -\infty$  ou/et  $b = +\infty$ ). On appelle fonction poids  $w : ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$  toute fonction telle que

- (i)  $f$  est continue strictement positive sur  $]a; b[$ ,
- (ii) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^n w(x)$  est intégrable sur  $]a; b[$ .

Dans la suite,  $w$  est une fonction poids sur  $]a; b[$ .

② On appelle espace de HILBERT l'ensemble

$$L_w^2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \{f : ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}, f^2 w \text{ est intégrable}\}.$$

$L_w^2$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

③ On définit sur  $L_w^2$  le produit scalaire intégral

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

et sa norme associée

$$\|f\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{\int_a^b f(x)^2 w(x)dx}$$

**Définition – Écart quadratique moyen**

Pour toutes fonctions  $(f, g) \in L_w^2$ , on appelle *écart quadratique* ou *distance quadratique* entre  $f$  et  $g$  le réel

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_a^b (f - g)^2(t)w(t)dt}.$$

**Exercice 110**

*Meilleure approximation polynomiale en norme  $L^2$ , ou au sens de HILBERT*

Soit  $f \in L_w^2$ .

Justifier que la meilleure approximation polynomiale de degré au plus  $n$  au sens de HILBERT est le polynôme  $Q_n(f) = p_{\mathbb{R}_n[X]}(f)$ , projeté orthogonal de  $f$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Autrement dit, justifier que  $Q_n(f) = p_{\mathbb{R}_n[X]}(f)$  est l'unique polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que

$$\|f - Q_n(f)\| = \min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - P\|.$$

**Solution (Ex.110 –** *Meilleure approximation polynomiale en norme  $L^2$ , ou au sens de HILBERT*) C'est la caractérisation du projeté orthogonal comme meilleure approximation en norme, qui est une propriété du cours.

Elle repose sur le théorème de Pythagore.

Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Alors

$$\|f - P\|^2 = \|(f - Q_n(f)) + (Q_n(f) - P)\|^2.$$

Or  $f - Q_n(f) \perp Q_n(f) - P$  car  $f - Q_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$  tandis que  $Q_n(f) - P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

Par le théorème de Pythagore,

$$\|f - P\|^2 = \|f - Q_n(f)\|^2 + \|Q_n(f) - P\|^2 \geq \|f - Q_n(f)\|^2,$$

avec égalité si, et seulement si,  $P = Q_n(f)$ .

## Chapitre 36

# Approximation polynomiale uniforme et polynômes de BERNSTEIN

☞[CCP – 2016 – PC – ] ☞[MP-M2 – 2019 – PSI – Partie II]

... ou comment des idées probabilistes amènent à la démonstration d'un résultat analytique.

Nous allons démontrer le théorème suivant dans un cas particulier mais déjà très vaste : celui où la fonction  $f$  est  $K$ -lipschitzienne sur  $[0; 1]$ , ce qui englobe toutes les fonctions  $C^1$ .

### **Théorème de WEIERSTRASS**

Toute fonction  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue est la limite uniforme d'une suite de polynômes.

Autrement dit, il existe une suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}[X]$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n - f\|_\infty = 0.$$

Autrement dit, bis,

$$\overline{\mathbb{R}[X]} = C^0([0; 1], \mathbb{R}).$$

Nous étudierons une approche probabiliste, due à BERNSTEIN

### **Exercice 111**

*Convergence uniforme des polynômes de BERNSTEIN*

Soit  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $K$ -lipschitzienne.

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $x \in [0; 1]$ . Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variable aléatoire réelle indépendantes toutes de loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(x)$ .

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad F_n = \frac{S_n}{n}.$$

Justifier les propriétés suivantes.

1.  $\forall \delta > 0, \quad \mathbb{P}(|F_n - x| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$
2.  $\forall \delta > 0, \quad \mathbb{P}(|F_n - x| \geq \delta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
3. L'idée de BERNSTEIN est que  $F_n \xrightarrow{\mathbb{P}} x$ , ce qui se lit «  $F_n$  converge en probabilité vers  $x$  », et que par conséquent  $f(F_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(x)$ . Or BERNSTEIN remarque que
  - (i)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, x)$ , donc
  - (ii)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}(f(F_n))$  est un polynôme en  $x$ .
4.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |P_n(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}(|f(F_n) - f(x)|)$
5. On prend  $\delta = \frac{\varepsilon}{2K}$ . En justifiant que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|f(F_n) - f(x)|) &= \sum_{y/|y-x| < \delta} |f(y) - f(x)| \mathbb{P}([F_n = y]) \\ &\quad + \sum_{y/|y-x| \geq \delta} |f(y) - f(x)| \mathbb{P}([F_n = y]) \end{aligned}$$

on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

6. Finalement

$$\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{i.e. } P_n \xrightarrow{\text{CVU}} f.$$

**Solution (Ex.111 – Convergence uniforme des polynômes de BERNSTEIN)**

1. Voilà qui sent bon l'inégalité de BIENAYMÉ-TSCHEBYCHEV.

$$\mathbb{E}(F_n) \stackrel{\text{lin.}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} n \times x = x$$

$$\mathbb{V}(F_n) \stackrel{\text{indép.}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n^2} n \times x(1-x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

Par l'inégalité de BIENAYMÉ-TSCHEBYCHEV

$$\forall \delta > 0, \quad \mathbb{P}(|F_n - x| \geq \delta) \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2}.$$

Reste à majorer  $x(1-x)$  sachant que  $x \in [0; 1]$ . On peut étudier la fonction  $x \mapsto x(1-x)$  ou observer que

$$x(1-x) = x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}, \text{ donc}$$

$$\forall \delta > 0, \quad \mathbb{P}(|F_n - x| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

2. Par encadrement,  $\forall \delta > 0, \quad \mathbb{P}(|F_n - x| \geq \delta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$

*Ceci est exactement la loi faible des grands nombres appliquée à la suite des variable aléatoire réelle  $(X_i)$ , indépendantes, toutes de même loi, possédant une espérance valant  $x$  et une variance.*

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $F_n = \frac{S_n}{n}$ , or  $S_n$  est la somme de  $n$  variables de Bernoulli indépendantes de loi  $\mathcal{B}(x)$ , donc par stabilité  $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, x)$ , et  $S_n(\Omega) = [[0; n]]$ .

Donc par transfert, en appliquant la fonction  $g : u \mapsto f\left(\frac{u}{n}\right)$ ,

$$\mathbb{E}(f(F_n)) = \mathbb{E}(g(S_n)) \stackrel{\text{transfert}}{=} \sum_{k=0}^n g(k)\mathbb{P}(S_n = k)$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}(f(F_n)) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

est un polynôme en  $x$ .

4.  $|P_n(x) - f(x)| \stackrel{\text{lin.}}{=} |\mathbb{E}(f(F_n) - f(x))|$ , or pour toute variable aléatoire réelle  $Y$  admettant une espérance,  $|Y|$  admet une espérance et  $Y \leq |Y|$  entraîne par croissance de l'espérance  $\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(|Y|)$ . D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |P_n(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}(|f(F_n) - f(x)|)$$

5. On prend  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\delta = \frac{\varepsilon}{2K}$ .

$$\mathbb{E}(|f(F_n) - f(x)|) \stackrel{\text{transfert}}{=} \sum_{y \in F_n(\Omega)} |f(y) - f(x)| \mathbb{P}([F_n = y])$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|f(F_n) - f(x)|) &= \sum_{y/|y-x| < \delta} |f(y) - f(x)| \mathbb{P}([F_n = y]) \\ &\quad + \sum_{y/|y-x| \geq \delta} |f(y) - f(x)| \mathbb{P}([F_n = y]) \end{aligned}$$

Or :  $|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq K\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Et pour  $|y - x| \geq \delta$ , on a  $|f(y) - f(x)| \leq |f(y)| + |f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ .

Donc

$$\mathbb{E}(|f(F_n) - f(x)|) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{y/|y-x| < \delta} \mathbb{P}([F_n = y]) + 2\|f\|_\infty \sum_{y/|y-x| \geq \delta} \mathbb{P}([F_n = y])$$

$$\mathbb{E}(|f(F_n) - f(x)|) \leq \frac{\varepsilon}{2} \mathbb{P}(|F_n - x| < \delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|F_n - x| \geq \delta)$$

En majorant la première probabilité par 1 et en utilisant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

6.

7. Finalement, on a pris  $\varepsilon > 0$  quelconque,  $\delta = \frac{\varepsilon}{2K}$ , indépendant de  $n$  et  $x$ .

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n_0 \geq \frac{\|f\|_\infty}{\delta^2}$ , par exemple  $n_0 = \left\lceil \frac{\|f\|_\infty}{\delta^2} \right\rceil + 1$ .

Alors pour tout  $n \geq n_0 : \forall x \in [0; 1], \quad |P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$ .

Donc :  $\forall n \geq n_0, \quad \|P_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ .

On a bien démontré :  $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , i.e.  $P_n \xrightarrow{CVU} f$ .

### Définition – Polynômes de BERNSTEIN

La démarche de BERNSTEIN fait apparaître une famille de polynômes baptisés *polynômes de BERNSTEIN*.

8. Pour tout  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , on pose

$$B_{n,k}(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}.$$

9. Soit  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle  $n$ -ième polynôme de BERNSTEIN de  $f$  le polynôme

$$P_n(f)(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$$

Nous avons démontré que, lorsque  $f$  est  $K$ -lipschitzienne,  $P_n(f) \xrightarrow{CVU} f$ .

### Exercice 112

Quelques propriétés des polynômes de BERNSTEIN

Justifier les propriétés suivantes.

1.  $\deg(B_{n,k}) = n$  et  $\text{dom}(B_{n,k}) = (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$ .

2. Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,

$$B_{n,k}(x) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = 1, \quad B_{n,k}(x) = B_{n,n-k}(1-x)$$

3.  $B_{n,k}(0) = \delta_{k,0}$  et 0 est racine de multiplicité  $k$ ,  
 $B_{n,k}(1) = \delta_{n-k,0}$  et 1 de multiplicité  $n-k$  de  $B_{n,k}$ .
4. Décomposition dans la base canonique :

$$B_{n,k}(X) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} X^i$$

5. Dérivé :  $B'_{n,k} = n(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k})$
6. La famille  $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Solution (Ex.112 – Quelques propriétés des polynômes de BERNSTEIN)**

$$4. \quad B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j X^j 1^{n-k-j}$$

$$B_{n,k}(X) \stackrel{i=j+k}{=} \binom{n}{k} X^k \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} (-1)^{i-k} X^{i-k}$$

$$\text{or } \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} = \frac{n!}{k!(i-k)!(n-i)!} = \binom{n}{i} \binom{i}{k} \text{ donc}$$

$$B_{n,k}(X) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} X^i$$

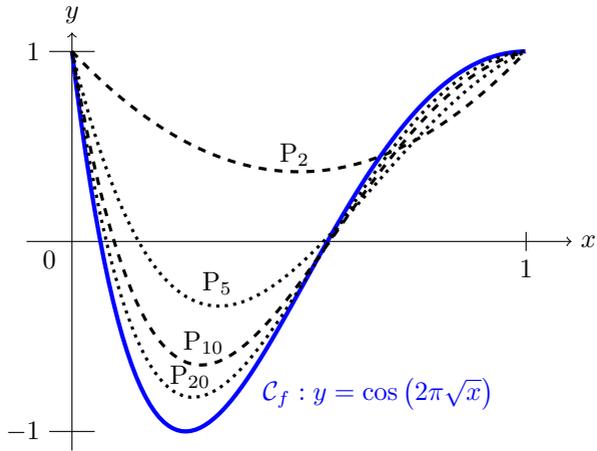
6. Le monôme de plus bas degré de  $B_{n,k}$  est  $\binom{n}{k} X^k$ , donc dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,

$$\det_{\mathcal{B}}((B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}) = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & 0 & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \times & \dots & \times & \binom{n}{n} \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k} \neq 0$$

donc  $((B_{n,k})_{0 \leq k \leq n})$  est une base.

### Illustration graphique

Les polynômes de BERNSTEIN  $P_2, P_5, P_{10}$  &  $P_{20}$   
pour la fonction  $f : x \mapsto \cos(2\pi\sqrt{x})$  sur  $[0; 1]$



## Chapitre 37

# Produit de convolution et régularisation

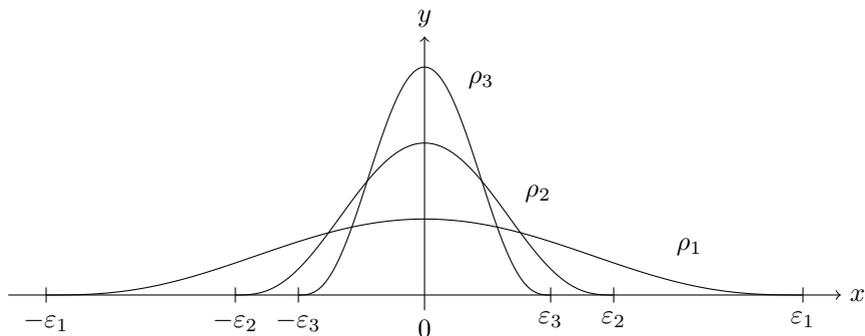
### Exercice 113

#### *Suites régularisantes*

On dit qu'une suite de fonctions  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  est une **suite régularisante** si :

- (i) pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et positive ;
- (ii) pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $\varepsilon_n \in ]0 ; +\infty[$  tel que  $\rho_n$  est nulle en dehors du segment  $[-\varepsilon_n ; \varepsilon_n]$ , avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$  ;

- (iii) pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x) dx = 1$ .



1. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

a) Soit  $I_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{k+1} dx$ . Montrer que

$$I_k = 2^{2k+3} \frac{((k+1)!)^2}{(2k+3)!}.$$

b) On pose

$$\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{I_k} (1-x^2)^{k+1} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $\rho$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Montrer que la suite  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto n\rho(nx)$$

est une suite régularisante de fonctions, toutes de classe  $\mathcal{C}^k$ , et préciser, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , une valeur possible de  $\varepsilon_n$ .

**Solution (Ex.113 – Suites régularisantes)**

1. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

a) Soit  $I_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{k+1} dx$ . Montrer que

$$I_k = 2^{2k+3} \frac{((k+1)!)^2}{(2k+3)!}.$$

Raisonnons par récurrence.

- $I_0 = \int_{-1}^1 1-x^2 dx = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 2^3 \frac{1!^2}{3!}$

- Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons le résultat acquis au rang  $k-1$ .

En intégrant par parties avec  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto (1-x^2)^{k+1}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,

$$\begin{aligned} I_k &= [x(1-x^2)^{k+1}]_{-1}^1 + 2(k+1) \int_{-1}^1 x^2(1-x^2)^k dx \\ &= 2(k+1) \int_{-1}^1 (x^2-1+1)(1-x^2)^k dx = 2(k+1)(I_{k-1} - I_k) \end{aligned}$$

D'où :

$$I_k = \frac{2(k+1)}{2k+3} I_{k-1} = 2^{2k+2} \frac{(k+1)!k!}{(2k+3)(2k+1)!} = 2^{2k+3} \frac{((k+1)!)^2}{(2k+3)!}.$$

- Par récurrence, l'égalité est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

b)  $\rho$  est polynomiale donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1; 1[$  et nulle donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -\infty; -1[ \cup ] 1; +\infty[$ .

Il reste à étudier les raccordements en  $\pm 1$ . Comme  $\rho$  est paire, il suffit d'établir que  $\rho$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $[0; +\infty[$ .

$P : x \mapsto (1 - x^2)^{k+1}$  est polynomiale et admet 1 comme racine de multiplicité  $k + 1$  donc  $P^{(i)}(1) = 0$  pour tout  $i$  de  $[[0; k]]$ . Donc  $\rho$  est  $k$  fois dérivable à gauche en 1 avec  $\rho_g^{(i)}(1) = 0$  pour tout  $i \in [[0; k]]$ .

De façon analogue,  $N : x \mapsto 0$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $N^{(i)}(1) = 0$  pour tout  $i$  de  $[[0; k]]$ . Donc  $\rho$  est  $k$  fois dérivable à droite en 1 avec  $\rho_d^{(i)}(1) = 0$  pour tout  $i \in [[0; k]]$ .

Par conséquent,  $\rho$  est bien de classe  $\mathcal{C}^k$  au voisinage de 1.

c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Par composition,  $\rho_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}$ .

Comme  $\rho$  est positive,  $\rho_n$  aussi.

Pour  $|x| > \frac{1}{n}$ ,  $|nx| > 1$  donc  $\rho_n(x) = n\rho(nx) = 0$ . Donc en prenant

$\varepsilon_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{n}$ ,  $\rho_n$  est nulle en dehors de  $[-\varepsilon_n; \varepsilon_n]$ .

Et on a bien :  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x) dx = \int_{-1/n}^{1/n} n\rho(nx) dx \stackrel{u=nx}{=} \int_{-1}^1 \rho(u) du = \frac{1}{I_k} \int_{-1}^1 (1 - u^2)^{k+1} du$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x) dx = 1.$$

La suite  $(\rho_n)$  est une suite régularisante de fonctions, toutes de classe  $\mathcal{C}^k$ .

### Exercice 114

#### *Heuristique de la convolution*

Soit  $[a; b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux.

Pour tout  $x$  de  $[a; b]$ , on note  $f(x^-)$  et  $f(x^+)$  respectivement les limites

$$\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow x^+} f(t).$$

Soit  $h > 0$  et  $f_h : x \mapsto \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$ .

Autrement dit,  $f_h(x)$  est la valeur moyenne de  $f$  sur un petit intervalle centré en  $x$  (« petit » dépendant de la valeur de  $h$ ).

1. a) Montrer que, si  $f$  est continue en  $x$ , alors

$$f_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f(x).$$

b) Montrer que, si  $f$  n'est pas continue en  $x$ , alors

$$f_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

On appelle régularisée de  $f$ , noté  $\tilde{f}$ , la fonction définie par

$$\tilde{f}(a) = f(a^+), \quad \forall x \in ]a; b[, \tilde{f}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, \quad \text{et} \quad \tilde{f}(b) = f(b^-).$$

2. a) On pose

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-h; h] \\ \frac{1}{2h} & \text{si } x \in [-h; h] \end{cases}$$

Que vaut  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_h(x) dx$  ?

b) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi_h(x-t) dt$$

On n'oubliera pas de justifier l'existence des intégrales généralisées ci-dessus.

3. La fonction positive  $\varphi_h$ , dont l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  vaut 1, concentre ses valeurs autour de 0, et ceci d'autant plus que  $h > 0$  est petit. Cependant,  $\varphi_h$  n'est pas continue. Nous allons observer ce qui se passe en substituant une suite régularisante à  $\varphi_h$ .

Dans toute cette question,  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  est une suite régularisante de fonctions  $\rho_n$ , chacune nulle en dehors du segment  $[-\varepsilon_n; \varepsilon_n]$ , avec  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note

$$(f * \rho_n)(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \rho_n(x-t) dt.$$

a) Vérifier que  $f * \rho_n$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

b) Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \rho_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \rho_n(t) dt.$$

c) Montrer qu'en tout  $x \in \mathbb{R}$  où  $f$  est continue, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f * \rho_n)(x) = f(x).$$

On commencera par écrire  $f(x) - (f * \rho_n)(x)$  comme une unique intégrale sur l'intervalle  $[-\varepsilon_n; \varepsilon_n]$ .

**Solution (Ex.114 – Heuristique de la convolution)**

1. a) Soit  $\varepsilon > 0$ . En remarquant que  $\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(x) dt = \frac{1}{2h} 2h f(x) = f(x)$ ,

$$\begin{aligned} |f_h(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \end{aligned}$$

Comme  $f$  est continue en  $x$ , il existe  $h_0 > 0$  tel que

$$\forall h \in ]0; h_0[, \forall t \in [x - h; x + h] |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ donc}$$

$$|f_h(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2h} 2h\varepsilon \leq \varepsilon.$$

On a bien  $f_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f(x)$ .

$$\text{b) } \forall h > 0, \quad f_h(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} \int_{x-h}^x f(t) dt + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \right)$$

$f$  est continue par morceaux et discontinue en  $x$ , il existe  $h_g > 0$  tel que  $f$  est continue sur  $[x - h_g; x[$ . En posant

$$f_g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [x - h_g; x[ \\ f(x^-) & \text{si } t = x \end{cases}$$

$f_g$  est continue sur  $[x - h_g; x[$  et coïncide avec  $f$  sur  $[x - h_g; x[$ , donc

$$\forall h \in ]0; h_g[, \quad \int_{x-h}^x f_g(t) dt = \int_{x-h}^x f(t) dt$$

Et par un raisonnement analogue à la question précédente, puisque  $f_g$  est continue,

$$\frac{1}{h} \int_{x-h}^x f(t) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f(x^-).$$

On montre de même que

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} x dt f(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f(x^+),$$

d'où

$$f_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

$$\text{2. a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_h(x) dx = \int_{-h}^h \frac{1}{2h} dx = 1.$$

b) Pour  $t \in [x - h; x + h]$ ,  $x - t \in [-h; h]$  donc  $f(t)\varphi_h(x - t) = \frac{1}{2h} f(t)$ .

Pour  $t \notin [x - h; x + h]$ ,  $x - t \notin [-h; h]$  donc  $f(t)\varphi_h(x - t) = 0$ .

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_h(x - t) dt$  se réduit à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur le segment  $[x - h; x + h]$ , donc existe et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_h(x - t) dt = \int_{x-h}^{x+h} \frac{1}{2h} f(t) dt = f_h(x).$$

3. La fonction positive  $\varphi_h$ , dont l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  vaut 1, concentre ses valeurs autour de 0, et ceci d'autant plus que  $h > 0$  est petit. Cependant,  $\varphi_h$  n'est pas continue. Nous allons observer ce qui se passe en substituant une suite régularisante à  $\varphi_h$ .

Dans toute cette question,  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  est une suite régularisante de fonctions  $\rho_n$ , chacune nulle en dehors du segment  $[-\varepsilon_n; \varepsilon_n]$ , avec  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note

$$(f * \rho_n)(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\rho_n(x-t)dt.$$

a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Comme précédemment, on a :

$$f(t)\rho_n(x-t) = \begin{cases} f(t)\rho_n(x-t) & \text{si } t \in [x - \varepsilon_n; x + \varepsilon_n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc  $(f * \rho_n)(x)$  est défini par l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur le segment  $[x - \varepsilon_n; x + \varepsilon_n]$ , donc qui existe.

b) Le changement de variable  $u = x - t$ , affine donc  $\mathcal{C}^1$  strictement monotone, donne directement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \rho_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\rho_n(u)du.$$

c) Soit  $x$  un point où  $f$  est continue. Soit  $\varepsilon > 0$ .

Comme  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)dt = 1$ , on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_n(t)dt = f(x)$ , et comme  $\rho_n$  est nulle hors de  $[-\varepsilon_n; \varepsilon_n]$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} |f(x) - (f * \rho_n)(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x-t))\rho_n(t)dt \right| \\ &\leq \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} |f(x) - f(x-t)|\rho_n(t)dt \end{aligned}$$

Comme  $f$  est continue en  $x$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall t \in [-\delta; \delta], \quad |f(x) - f(x-t)| \leq \varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad [-\varepsilon_n; \varepsilon_n] \subset [-\delta; \delta].$$

Alors :  $\forall n \geq n_0$ ,

$$|f(x) - (f * \rho_n)(x)| \leq \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} \varepsilon \rho_n(t)dt \leq \varepsilon$$

On a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f * \rho_n)(x) = f(x)$ .

### Définition – Produit de convolution

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\varphi$  est nulle en dehors du segment  $[-\alpha; \alpha]$ .

On appelle *convolée de  $f$  et  $\varphi$* , notée  $f * \varphi$ , la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt.$$

L'exercice précédent montre que, si  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  est une suite régularisante,

la suite des convolées  $(f * \rho_n)$  converge simplement vers  $f$  en tout point de continuité de  $f$ .

En particulier,

si  $f$  est continue, alors  $f * \varphi_n \xrightarrow{CVS} f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Nous allons voir dans la suite de cette partie que  $f * \varphi$  hérite des propriétés de régularité de  $\varphi$ .

### Exercice 115

#### Régularité des convolées

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\varphi$  est nulle en dehors du segment  $[-\alpha; \alpha]$ .

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt.$$

1. a) Justifier que  $f * \varphi$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\varphi(t)dt.$$

2. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose de plus  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Montrer que  $f * \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et que, pour tout  $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$ ,

$$(f * \varphi)^{(i)} = f * \varphi^{(i)}.$$

3. En déduire, à l'aide des exercices précédents, que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , toute fonction continue est limite simple d'une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Solution (Ex.115 – Régularité des convolées)**

1. a) • Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto g(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $\varphi$  l'est.

• Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto g(x, t)$  est continue par morceaux.

*Remarque : en fait,  $t \mapsto g(x, t)$  est continue par morceaux sur le segment  $[x - \alpha; x + \alpha]$  et nulle en dehors de ce segment (car  $t \notin [x - \alpha; x + \alpha] \implies x - t \notin [-\alpha; \alpha]$ ), donc est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Mais être intégrable n'est pas une hypothèse du théorème, c'en est une conclusion.*

• Soit  $[a; b]$  un segment quelconque de  $\mathbb{R}$ .

$\varphi$  est continue sur le segment  $[-\alpha; \alpha]$  donc bornée, et nulle en dehors, donc bornée sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $\|\varphi\|_\infty$  existe.

$f$  est continue par morceaux donc bornée sur le segment  $[a - \alpha; b + \alpha]$ .

Soit  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $|f(t)| \leq M$  pour tout  $t \in [a - \alpha; b + \alpha]$ .

Alors

$$\forall(x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}, \quad |f(t)\varphi(x-t)| \leq \psi(t)$$

$$\text{où } \psi(t) \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \begin{cases} M \|\varphi\|_\infty & \text{si } t \in [a-\alpha; b+\alpha] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, si  $t < a - \alpha$ , alors  $x - t > \alpha$  car  $x \geq a$  donc  $\varphi(x - t) = 0$ , et de m\u00eame, si  $t > b + \alpha$ , alors  $x - t < -\alpha$  car  $x \leq b$  donc  $\varphi(x - t) = 0$ .

Or  $\psi$  est int\u00e9grable sur  $\mathbb{R}$  puisque constante sur un segment et nulle en dehors.

- Par le th\u00e9or\u00e8me de continuit\u00e9 des int\u00e9grales \u00e0 param\u00e8tre,  $f * \varphi$  est continue sur  $[a; b]$ , et ceci pour tout segment  $[a; b]$  de  $\mathbb{R}$ . Donc  $f * \varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**b)** Le changement de variable  $u = x - t$ , affine donc  $\mathcal{C}^1$  strictement monotone, donne directement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\varphi(u)du.$$

**2.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose de plus  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^k$ .

On reprend exactement la m\u00eame d\u00e9marche mais pour le th\u00e9or\u00e8me de la classe  $\mathcal{C}^k$  des int\u00e9grales \u00e0 param\u00e8tre. Il n'y a aucun probl\u00e8me car il suffit d'observer que, pour tout  $i \in [[1; k]]$ ,  $\|\varphi^{(i)}\|_\infty$  existe puisque  $\varphi^{(i)}$  est continue sur le segment  $[-\alpha; \alpha]$  et nulle en dehors, donc born\u00e9e sur  $\mathbb{R}$ . Ceci donne l'int\u00e9grabilit\u00e9 des  $t \mapsto f(t)\varphi^{(i)}(x-t)$  pour tout  $i \in [[0; k-1]]$  et la domination de  $t \mapsto f(t)\varphi^{(k)}(x-t)$  par

$$\psi : x \mapsto \begin{cases} M \|\varphi^{(i)}\|_\infty & \text{si } t \in [a-\alpha; b+\alpha] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

elle-m\u00eame int\u00e9grable.

D'o\u00f9 la classe  $\mathcal{C}^k$  de  $f * \varphi$  et la formule

$$(f * \varphi)^{(i)} = f * \varphi^{(i)}$$

pour tout  $i \in [[0; k]]$ , par d\u00e9rivation sous l'int\u00e9grale.

**3.** Par le premier exercice, il existe des suites r\u00e9gularisantes  $(\rho_n)$  de fonctions toutes de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Par le deuxi\u00e8me exercice, si  $f$  est continue, alors  $f * \rho_n \xrightarrow{\text{CVS}} f$ .

Et par cet exercice, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f * \rho_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  puisque  $\rho_n$  l'est.

En conclusion, toute fonction continue est limite simple d'une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ , ceci pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

---

**Exercice 116***Suite régularisante de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$* 

Soit  $g$  la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Justifier que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ ,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et qu'il existe un polynôme  $P_k$  tel que

$$\forall x > 0, \quad g^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{3k}} \exp(-1/x^2).$$

2. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \rho(x) = g(x+1)g(1-x).$$

a) Justifier que  $\rho$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , positive, et nulle en dehors du segment  $[-1; 1]$ .

b) Justifier l'existence de  $I \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-1}^1 \rho(x) dx$ .

3. Montrer que la suite  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n}{I} \rho(nx)$$

est une suite régularisante de fonctions, toutes de classe  $\mathcal{C}$ , et préciser, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , une valeur possible de  $\varepsilon_n$ .

4. Justifier que toute fonction continue sur  $\mathbb{R}$  est la limite simple d'une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Solution (Ex.116 – Suite régularisante de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ )**

1. a)  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  par les théorèmes opératoires usuels et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 = g(0)$  donc  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

b) • Pour  $k = 0$ , la propriété est vraie avec  $P_0(x) = 1$ .

• Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons la propriété est vraie au rang  $k$ .

(i)  $g$  est  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $\mathbb{R}^*$  (par les théorèmes opératoires usuels).

(ii) Comme  $g$  est  $\mathcal{C}^k$  avec  $\forall x \in ]-\infty; 0[$ ,  $g^{(k)}(x) = 0$ ,  $g$  est  $\mathcal{C}^{k+1}$  avec  $\forall x \in ]-\infty; 0[$ ,  $g^{(k+1)}(x) = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g^{(k+1)}(x) = 0$ .

(iii)  $\forall x > 0$ ,  $g^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{3k}} \exp(-1/x^2)$ , donc  $g$  est  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $]0; +\infty[$  avec

$$\forall x > 0, \quad g^{(k+1)}(x) = \left( \frac{P'_k(x)}{x^{3k}} - \frac{3kP_k(x)}{x^{3k+1}} + \frac{2P_k(x)}{x^{3k+3}} \right) \exp(-1/x^2)$$

$$= \frac{P_{k+1}(x)}{x^{3(k+1)}} \exp(-1/x^2)$$

en posant  $P_{k+1}(x) = x^3 P'_k(x) - 3kx^2 P_k(x) + 2P_k(x)$ , qui est bien un polynôme.

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g^{(k+1)}(x) \stackrel{u=1/x}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{3(k+1)} P_{k+1}(1/u)}{\exp(u)} = 0$ , par croissance comparée (car aussi  $P_{k+1}(1/u) \xrightarrow{u \rightarrow 0^+} P(0)$ , limite finie).

(iv) Finalement :  $g^{(k+1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , limite réelle finie.

D'après le théorème de régularité du prolongement,  $g$  est de classe  $C^{k+1}$  sur  $\mathbb{R}$ .

J'ai prouvé la propriété au rang  $k + 1$ .

• Par récurrence sur  $k$ , la propriété est établie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

2. a)  $\rho$  est le produit de deux fonctions positives et  $C^\infty$  donc est positive et  $C^\infty$ .

Pour  $x < -1$ ,  $g(x + 1) = 0$  donc  $\rho(x) = 0$ .

Pour  $x > 1$ ,  $g(1 - x) = 0$  donc  $\rho(x) = 0$ .

- b)  $\rho$  est continue sur le segment  $[-1; 1]$  et nulle en dehors donc  $\int_{-1}^1 \rho(x) dx$  existe.

$$\int_{-1}^1 \rho(x) dx \text{ existe.}$$

3. Copier-coller du premier exercice.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Par composition,  $\rho_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Comme  $\rho$  est positive,  $\rho_n$  aussi.

Pour  $|x| > \frac{1}{n}$ ,  $|nx| > 1$  donc  $\rho_n(x) = n\rho(nx) = 0$ . Donc en prenant

$\varepsilon_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{n}$ ,  $\rho_n$  est nulle en dehors de  $[-\varepsilon_n; \varepsilon_n]$ .

Et on a bien :  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x) dx = \int_{-1/n}^{1/n} n\rho(nx) dx \stackrel{u=nx}{=} \frac{1}{n} \int_{-1}^1 \rho(u) du = 1$$

La suite  $(\rho_n)$  est une suite régularisante de fonctions, toutes de classe  $C^\infty$ .

4. Soit  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $f * \rho_n \xrightarrow{\text{CVS}} f$ , et par l'exercice 3, question 2, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f * \rho_n$  est de classe  $C^\infty$ .

**Exercice 117**

*Uniforme continuité et convergence uniforme*

On se donne une suite régularisante  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  de fonctions toutes de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux.

D'après les exercices précédents, on sait que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f * \rho_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , et que, en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}$  où  $f$  est continue,  $f * \rho_n(x)$  tend vers  $f(x)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

1. On suppose que  $f$  est continue par morceaux sans être continue. Justifier que la suite de fonctions  $(f * \rho_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$ .

*On suppose dorénavant que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$*

On se donne un segment  $[a; b]$  de  $\mathbb{R}$  (avec  $a < b$ ).

2. Dans cette question un peu technique, on se propose de démontrer le *théorème de HEINE* qui affirme que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in [a; b]^2, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (\mathcal{U})$$

- a) En quoi cette propriété  $(\mathcal{U})$  n'est pas équivalente à la continuité de  $f$  sur  $[a; b]$ ?

- b) Si  $f$  vérifie la propriété  $(\mathcal{U})$ ,  $f$  est-elle continue?

La propriété  $(\mathcal{U})$  s'appelle l'*uniforme continuité*.

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Soit  $A \subset [a; b]$  l'ensemble des points  $c$  tels que

$$\exists \delta_c > 0, \forall (x, y) \in [a; c]^2, \quad |x - y| \leq \delta_c \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (\mathcal{U}_c)$$

Comme  $A$  est non vide, puisque  $a \in A$ , et majorée par  $b$ ,  $A$  possède une borne supérieure. On note  $\beta$  la borne supérieure de  $A$ , qui est donc le plus petit des majorants de  $A$ .

- c) Justifier qu'il existe  $h > 0$  tel  $|x - \beta| \leq h$  et  $x \in [a; b]$  entraînent  $|f(x) - f(\beta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

- d) Justifier l'existence de  $c \in A$  tel que  $\beta - \frac{h}{2} < c \leq \beta$ .

On note  $\delta_c$  défini par  $(\mathcal{U}_c)$ .

- e) Soit  $\delta' = \min(\delta_c, \frac{h}{2})$ .

Montrer que, pour tout  $(x, y) \in ([a; b] \cap [a; \beta + h])^2$ ,  
 $|x - y| \leq \delta'$  entraîne  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ .

- f) En déduire que  $\beta \in A$ , puis que  $\beta = b$ .

- g) Que peut-on en conclure?

3. Montrer alors que, sur tout segment  $[a; b]$  de  $\mathbb{R}$ , la suite de fonctions  $(f * \rho_n)$  converge uniformément vers  $f$ .

**Solution (Ex.117 – Uniforme continuité et convergence uniforme)**

1. Puisque les  $\rho_n$  sont toutes continues ( $k \geq 0$ ), les  $f * \rho_n$  sont toutes continues.

Et  $f * \rho_n \xrightarrow{\text{CVS}} f$ .

Si la convergence était uniforme, alors  $f$  serait aussi continue, d'après le théorème du cours. Comme  $f$  n'est pas, la suite de fonctions ( $f * \rho_n$ ) ne converge pas uniformément vers  $f$ .

On se donne un segment  $[a; b]$  de  $\mathbb{R}$  (avec  $a < b$ ).

2. Dans cette question un peu technique, on se propose de démontrer le *théorème de HEINE* qui affirme que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in [a; b]^2, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (\mathcal{U})$$

a) Observons :

$f$  continue sur  $[a; b]$

$\iff$

$$\forall y \in [a; b], \quad \lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$$

$\iff$

$$\forall y \in [a; b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [a; b], \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (\mathcal{C})$$

Dans cette dernière assertion (C),  $\delta$  dépend de  $y$  et de  $\varepsilon$ , tandis que dans (U),  $\delta$  ne dépend que de  $\varepsilon$  (on peut prendre le même  $\delta$  pour tous les  $y$  de  $[a; b]$ ).

(C) et (U) ne sont donc pas équivalentes.

- b) Par l'ordre des quantificateurs, (U)  $\implies$  (C), autrement dit, toute fonction uniformément continue est continue.

Le théorème de Heine dit que, **sur un segment**, si  $f$  est continue, alors elle est uniformément continue.

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Soit  $A \subset [a; b]$  l'ensemble des points  $c$  tels que

$$\exists \delta_c > 0, \forall (x, y) \in [a; c]^2, \quad |x - y| \leq \delta_c \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (\mathcal{U}_c)$$

Comme  $A$  est non vide, puisque  $a \in A$ , et majorée par  $b$ ,  $A$  possède une borne supérieure. On note  $\beta$  la borne supérieure de  $A$ .

- c)  $\beta \in [a; b]$  et  $f$  est continue en  $\beta$ , donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \beta} f(\beta)$ , et il existe  $h > 0$

tel que :

$$(|x - \beta| \leq h \text{ et } x \in [a; b]) \implies |f(x) - f(\beta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

- d) Si on avait :  $\forall c \in \left] \beta - \frac{h}{2}; \beta \right], c \notin A$ ,  $\beta$  ne serait pas la borne supérieure

de  $A$  puisque  $\beta - \frac{h}{2}$  serait un majorant de  $A$  plus petit que  $\beta$  : c'est absurde.

---

Donc :  $\exists c \in \left] \beta - \frac{h}{2}; \beta \right]$  tel que  $c \in A$ .

On note  $\delta_c$  défini par  $(\mathcal{U}_c)$ .

e) Soit  $\delta' = \min\left(\delta_c, \frac{h}{2}\right)$ .

Soit  $(x, y) \in ([a; b] \cap [a; \beta + h])^2$ . Supposons, pour fixer les idées, que  $x \leq y$ , ceci sans perdre de généralité puisque dans la conclusion attendue,  $x$  et  $y$  jouent un rôle symétrique ( $|x - y| = |y - x|$  et  $|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)|$ ).

• Si  $y \leq c$ , alors

$$|x - y| \leq \delta' \implies |x - y| \leq \delta_c \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

• Si  $y > c$ , alors  $\beta - \frac{h}{2} \leq y \leq \beta + h$ .

Supposons  $|x - y| \leq \delta'$ ,  $|x - y| \leq \frac{h}{2}$ , donc finalement

$$\beta - h \leq x \leq y \leq \beta + h.$$

Du coup, par le choix de  $h$  (cf. c) :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(\beta)| + |f(\beta) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

f) Ceci prouve que  $\beta \in A$  car on a :

$$\forall (x, y) \in [a; \beta]^2, \quad |x - y| \leq \delta' \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (\mathcal{U}_\beta)$$

Et si on avait  $\beta < b$ , alors on aurait  $c = \min(\beta + h, b) \in A$  :  $\beta$  ne serait plus un majorant de  $A$  puisque  $c > \beta$ .

Donc  $\beta = b \in A$ .

g) Comme  $b \in A$ , on a :

$$\exists \delta_b > 0, \forall (x, y) \in [a; b]^2, \quad |x - y| \leq \delta_b \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (\mathcal{U}_b).$$

Comme la propriété  $(\mathcal{U}_b)$  est exactement  $(\mathcal{U})$ ,  $f$  vérifie  $(\mathcal{U})$  :  $f$  est uniformément continue.

3. Soit  $[a; b] \subset \mathbb{R}$ . Adaptons la fin du raisonnement de l'exercice 2.

Soit  $x \in [a; b]$ . Soit  $\varepsilon > 0$ .

Comme  $f$  est uniformément continue sur le segment  $[a - 1; b + 1]$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall (x, y) \in [a - 1; b + 1], |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Si  $\delta > 1$  alors la propriété précédente est vraie en remplaçant  $\delta$  par 1, donc on peut supposer  $\delta \leq 1$ . On peut alors réécrire la propriété précédente :

$$\forall x \in [a; b], \forall t \in [-\delta; \delta] |f(x) - f(x - t)| \leq \varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\forall x \in [a; b], \forall n \geq n_0, [-\varepsilon_n; \varepsilon_n] \subset [-\delta; \delta].$$

Alors :  $\forall n \geq n_0, \forall x \in [a; b],$

$$\begin{aligned} |f(x) - (f * \rho_n)(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x-t))\rho_n(t)dt \right| \\ &\leq \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} |f(x) - f(x-t)|\rho_n(t)dt \\ &\leq \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} \varepsilon \rho_n(t)dt \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc :  $\forall n \geq n_0, \|f - f * \rho_n\|_{\infty} \leq \varepsilon.$

Autrement dit :  $\|f - f * \rho_n\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \text{ i.e. } f * \rho_n \xrightarrow{\text{CVU}} f \text{ sur } [a; b].$

# Chapitre 38

## Transformée de LAPLACE

☞[E3A-M2 – 2017 – PC – Partie II] ☞[E3A-M2 – 2018 – PSI – Partie I]  
☞[CS-M2 – 2016 – PSI – Partie VI]

La Transformée de LAPLACE permet notamment de transformer certaines équations différentielles en des équations plus simples. Elle est d'usage courant en S.I. par exemple. Certains sujets de maths abordent ses aspects théoriques.

Je présente ici une version pour les fonctions  $f$  continues par morceaux sur  $[0; +\infty[$ , on pourrait procéder à quelques adaptations sur  $]0; +\infty[$ .

**Définition – Fonctions d'ordre exponentiel et transformée de LAPLACE**

- ① Soit  $f : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue par morceaux. On appelle transformée de LAPLACE de  $f$ , si elle existe, la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$\mathcal{L}(f) : p \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Sur quel espace de fonctions  $f$  peut-on définir  $\mathcal{L}(f)$  ?

- ② Soit  $f : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{K}$  continue par morceaux.

Si :  $\exists (M, \gamma) \in \mathbb{R}^2, \exists A > 0, \forall t \geq A, |f(t)| \leq Mt^\gamma$ ,

alors on dit que  $f$  est d'ordre exponentiel.

Autrement dit,  $f$  est d'ordre exponentiel si  $\exists \gamma \in \mathbb{R}, f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(t^\gamma)$ .

Dans ce cas,  $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$  existe car  $|e^{-pt} f(t)| \leq Mt^\gamma e^{-pt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .

En particulier, tout polynôme  $P$  est d'ordre exponentiel puisqu'en  $+\infty$ , on a :  $P(t) = \mathcal{O}(t^{\deg(P)})$ .

**Exercice 118**  
*Structure d'espace vectoriel*

Montrer que l'ensemble des fonctions d'ordre exponentiel forme un espace vectoriel  $E$ , sous-espace de  $\mathcal{C}^{p.m}([0; +\infty[, \mathbb{K})$ .

**Solution (Ex.118 – Structure d'espace vectoriel)**

Par définition,  $E \subset \mathcal{C}^{p.m}([0; +\infty[, \mathbb{K})$ , et  $0 \in E$ .

Soit  $(f, g) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors  $\begin{cases} \exists M_f, \gamma_f, A_f, \quad \forall t \geq A_f, |f(t)| \leq M_f t^{\gamma_f} \\ \exists M_g, \gamma_g, A_g, \quad \forall t \geq A_g, |g(t)| \leq M_g t^{\gamma_g} \end{cases}$

Prenons  $M = |\lambda| M_f + M_g$ ,  $\gamma = \max(\gamma_f, \gamma_g)$  et  $A = \max(A_f, A_g, 1)$ , alors  $\forall t \geq A, |\lambda f(t) + g(t)| \leq M t^\gamma$

☞  $J'impose A \geq 1$  pour avoir  $t \geq A \implies \begin{cases} t^{\gamma_f} \leq t^\gamma \\ t^{\gamma_g} \leq t^\gamma \end{cases}$  (faux si  $t \in ]0; 1[$ ).

Donc  $\lambda f + g$  est aussi d'ordre exponentiel. *Cqfd.*

**Exercice 119**  
*Quelques exemples*

$p$  désigne un réel de  $]0; +\infty[$ .

1. Montrer que  $\mathcal{L}(1)(p) = \frac{1}{p}$ , et que plus généralement  $\mathcal{L}(t^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$  pour tout  $n$  de  $s\mathbb{N}$ .
2. On suppose  $p - \alpha > 0$ . Montrer que  $\mathcal{L}(e^{\alpha t})(p) = \frac{1}{p - \alpha}$ .
3. a) Montrer que  $\mathcal{L}(e^{it})(p) = \frac{p + i}{p^2 + 1}$ .

b) En déduire que

$$\mathcal{L}(\cos(t))(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\sin(t))(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

**Solution (Ex.119 – Quelques exemples)**

1. *J'utilise la fonction  $\Gamma$  d'EULER, mais on peut raisonner par récurrence sur  $n$  avec une intégration par parties.*

$$\mathcal{L}(t^n)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt \stackrel{u=pt}{=} \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$2. \mathcal{L}(e^{\alpha t})(p) = \int_0^{+\infty} e^{(-p+\alpha)t} dt \stackrel{\alpha-p < 0}{=} \frac{1}{p-\alpha}$$

$$3. \mathcal{L}(e^{it})(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(p-i)t} dt = \left[ \frac{e^{-(p-i)t}}{-p+i} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-i} = \frac{p+i}{p^2+1}$$

car  $|\exp((-p+i)t)| = \exp(-pt) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ .

En prenant les parties réelles puis imaginaires des deux membres, on obtient les deux valeurs de b).

### Exercice 120

*Quelques propriétés classiques*

$p$  désigne toujours un réel de  $]0; +\infty[$  et  $f$  une fonction d'ordre exponentiel :  $f \in \mathcal{E}$ .

1. *Linéarité* –

Justifier que  $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{F}$  est linéaire.

2. *Translation* –

Soit  $p + \alpha > 0$ . Montrer que

$$\mathcal{L}(e^{-\alpha t} f(t))(p) = \mathcal{L}(f)(p + \alpha).$$

3. *Retard* –

Soit  $a > 0$ . On note  $g : t \mapsto \begin{cases} f(t-a) & \text{si } t \geq a, \\ 0 & \text{si } t < a. \end{cases}$

Montrer que

$$\mathcal{L}(g(t))(p) = e^{-ap} \mathcal{L}(f)(p).$$

... qui s'écrit parfois abusivement :

$$\mathcal{L}(f(t-a))(p) = e^{-ap} \mathcal{L}(f)(p).$$

4. *Changement d'échelle* –

Soit  $\alpha > 0$ . On note  $h : t \mapsto f(\alpha t)$ . Montrer que

$$\mathcal{L}(h(t))(p) = \frac{1}{\alpha} (\mathcal{L}(f))\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

... qui s'écrit parfois abusivement :

$$\mathcal{L}(f(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha} (\mathcal{L}(f))\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

**Solution (Ex.120 – Quelques propriétés classiques)**

1. *Linéarité* – par linéarité de l'intégrale.

2. *Translation* – Pour  $p + \alpha > 0$ ,

$$\mathcal{L}(e^{-\alpha t} f(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+p)t} f(t) dt = \mathcal{L}(f)(p + \alpha)$$

3. *Retard* – Soit  $a > 0$ . On note  $g : t \mapsto \begin{cases} f(t - a) & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$

$$\mathcal{L}(g(t))(p) = \int_0^a 0 dt + \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t - a) dt \stackrel{u=t-a}{=} e^{-ap} \mathcal{L}(f)(p).$$

4. *Changement d'échelle* – Pour  $\alpha > 0$ ,

$$\mathcal{L}(f(\alpha t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\alpha t) dt \stackrel{u=\alpha t}{=} \frac{1}{\alpha} (\mathcal{L}(f))\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

**Exercice 121**

*Classe de dérivabilité de  $\mathcal{L}(f)$*

Soit  $f \in E$ .

1. Montrer que  $\mathcal{L}(f)$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .
2. Justifier que  $\mathcal{L}(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ , avec

$$(\mathcal{L}(f))'(p) = - \int_0^{+\infty} t e^{-pt} f(t) dt = -\mathcal{L}(t f(t))(p).$$

3. En déduire que  $\mathcal{L}(f)$  est de classe  $\mathcal{C}$  sur  $]0; +\infty[$  et

$$(\mathcal{L}(f))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t)).$$

**Solution** (Ex.121 – *Classe de dérivabilité de  $\mathcal{L}(f)$* )

1. Soit  $g : ]0; +\infty[ \times ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, (p, t) \mapsto e^{-pt} f(t)$ .

(i)  $\forall t \geq 0, p \mapsto g(p, t)$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

(ii)  $\forall p > 0, t \mapsto g(p, t)$  est c.p.m sur  $]0; +\infty[$ .

(iii) Soit  $[a; b] \subset ]0; +\infty[$ .

$$\begin{cases} p \geq a \\ t \geq 0 \end{cases} \implies pt \geq at \implies e^{-pt} \leq e^{-at}, \text{ d'où la domination}$$

$$\forall p \in [a; b], \forall t \in [0; +\infty[, |g(p, t)| \leq e^{-at} |f(t)|$$

or  $\varphi : t \mapsto e^{-at} |f(t)|$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$  car  $|f|$  est d'ordre exponentiel.

Par le théorème de continuité sous l'intégrale,  $\mathcal{L}(f)$  est continue sur tout segment de  $]0; +\infty[$ , donc continue sur  $]0; +\infty[$ .

2. (i)  $\forall t \geq 0, p \mapsto g(p, t)$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .
- (ii)  $\forall p > 0, t \mapsto g(p, t)$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$ .

(iii)  $\forall p > 0, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial p}(p, t) = -te^{-pt}f(t)$  est c.p.m. sur  $]0; +\infty[$ .

(iv) Soit  $[a; b] \subset ]0; +\infty[$ . On a une domination analogue à ①

$$\forall p \in [a; b], \forall t \in [0; +\infty[, \left| \frac{\partial g}{\partial p}(p, t) \right| \leq e^{-at} |tf(t)|$$

or  $\varphi : t \mapsto e^{-at} |tf(t)|$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$  car  $t \mapsto tf(t)$  est d'ordre exponentiel. Donc  $\mathcal{L}(f)$  est  $\mathcal{C}^1$  sur tout segment de  $]0; +\infty[$ , donc  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .

### Exercice 122

#### Transformée de la dérivée $\mathcal{L}(f')$

Soit  $f \in E$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que  $\mathcal{L}(f')$  existe et  

$$\mathcal{L}(f'(t))(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

**Solution (Ex.122 – Transformée de la dérivée  $\mathcal{L}(f')$ )**

Comme  $e^{-pt}f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , on peut effectuer une intégration par parties qui prouve au passage l'existence de  $\mathcal{L}(f')(p)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t))(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} [e^{-pt} f(t)]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \\ &= -f(0) + p\mathcal{L}(f)(p) \end{aligned}$$

#### Deux exemples élémentaires pour comprendre l'intérêt de la transformation de LAPLACE

*Une application classique et efficace de la transformation de LAPLACE est l'utilisation dans les équations différentielles. Je prends deux exemples très simples.*

On admet que **la transformation de LAPLACE est injective** pour les fonctions continues d'ordre exponentiel sur  $]0; +\infty[$ .

1. Soit à résoudre pour  $t \in [0; +\infty[$  : (C) 
$$\begin{cases} f'(t) + f(t) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Soit  $p \in ]0; +\infty[$ . Je prends la transformée de LAPLACE (linéaire) de l'équation différentielle

$$\mathcal{L}(f'(t))(p) + \mathcal{L}(f(t))(p) = \mathcal{L}(0)(p)$$

$$(p\mathcal{L}(f(t))(p) - f(0)) + \mathcal{L}(f(t))(p) = 0$$

$$(p+1)\mathcal{L}(f(t))(p) = 1$$

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \frac{1}{p+1}$$

Or  $\mathcal{L}(e^{-t})(p) = \frac{1}{p+1}$  et  $\mathcal{L}(\cdot)$  est injective, donc

$$f(t) = e^{-t}$$

2. Soit à résoudre pour  $t \in [0; +\infty[$  :  $(\mathcal{C}) \begin{cases} f''(t) + f(t) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$

Soit  $p \in ]0; +\infty[$ . Je prends la transformée de LAPLACE (linéaire) de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f''(t))(p) + \mathcal{L}(f(t))(p) &= \mathcal{L}(0)(p) \\ [p\mathcal{L}(f'(t))(p) - f'(0)] + \mathcal{L}(f(t))(p) &= 0 \\ p[p\mathcal{L}(f(t))(p) - f(0)] + \mathcal{L}(f(t))(p) &= 1 \\ (p^2 + 1)\mathcal{L}(f(t))(p) &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

Or  $\mathcal{L}(\sin(t))(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$  et  $\mathcal{L}(\cdot)$  est injective, donc

$$f(t) = \sin(t)$$

# Chapitre 39

## Séries de FOURIER

☞ [CS-M2 – 2016 – PSI – Partie IV]

☞ *Avant la réforme des programmes de 2015, les séries de Fourier étaient au programme. Du coup, et par leur utilité, elles constituent du coup un thème classique de concours.*

### Très brève introduction historique

C'est dans un mémoire intitulé *Théorie analytique de la chaleur*, soumis en 1807 à l'Académie des Sciences, que Joseph FOURIER introduit les concepts qui lancent les bases de l'*analyse harmonique*, parfois appelée *analyse de Fourier*.

En s'intéressant à l'*équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{CD} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

et après quelques transformations que Fourier débouche sur l'équation

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0$$

dont les solutions sont évidemment  $x \mapsto a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x)$ .

Les conditions aux bords imposent de plus que  $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$ .

Par principe de superposition, il obtient des solutions en forme de *séries trigonométriques*<sup>1</sup>

---

1. Dans le texte originel, les considérations aux bords faisaient aussi que tous les coefficients  $a_k$  étaient nul, Fourier obtenant alors une série uniquement somme de sinus. Daniel BERNOULLI avait déjà échafaudé en 1753 une approche analogue, mais bien moins générale pour la résolution des *l'équation des cordes vibrantes*.

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx) \quad (\mathcal{F})$$

Notons  $f_1 = \frac{1}{2\pi}$  la fréquence associée à la période  $2\pi$  et observons que :

- $x \mapsto \cos(x)$  et  $x \mapsto \sin(x)$  sont sinusoidales de fréquence  $f_1$ .
- $x \mapsto \cos(2x)$  et  $x \mapsto \sin(2x)$  sont sinusoidales de fréquence  $2f_1$ .
- $x \mapsto \cos(3x)$  et  $x \mapsto \sin(3x)$  sont sinusoidales de fréquence  $3f_1$ .
- ⋮

La solution  $f$  est donc une somme de signaux périodiques dont les fréquences sont les multiples de la fréquence fondamentale  $f_1$ . Ses signaux sont les *harmoniques* du signal fondamental, leur amplitude est donnée par les coefficients  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

En s'appuyant sur les intégrales suivantes :

$$\forall k \geq 1, \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx$$

$$\forall (k, n), \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx = 0$$

$$\forall k \neq n, \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx$$

$$\forall k \geq 1, \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx$$

on peut expliciter les coefficients  $a_k$  et  $b_k$ .

- En intégrant  $(\mathcal{F})$  entre  $-\pi$  et  $\pi$ , on obtient

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

- Pour  $n \geq 1$  fixé, en multipliant  $(\mathcal{F})$  par  $\cos(nx)$  puis en intégrant, on obtient

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

- De même, multipliant  $(\mathcal{F})$  par  $\sin(nx)$  puis en intégrant, on obtient

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

La collection des coefficients  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  constitue le **spectre** de  $f$ .

*Quelques interrogations soulevées par l'analyse de Fourier*

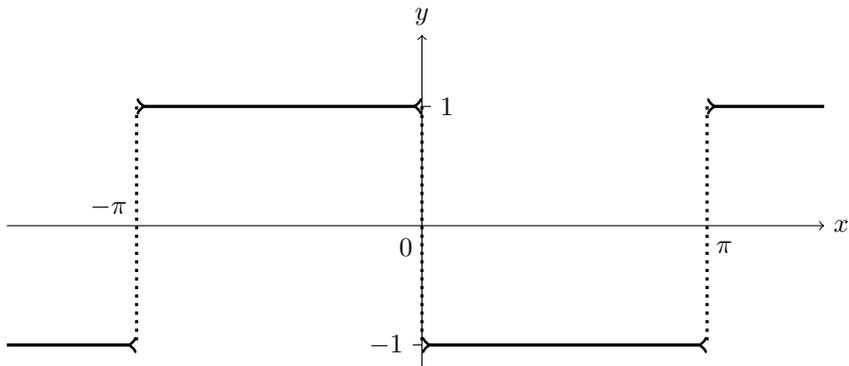
- 
- Étant donnée une fonction  $f$   $T$ -périodique continue par morceaux, à quelle(s) condition(s) a-t-on

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \quad ?$$

- Étant donné un spectre  $(a_n)$ , ou  $(b_n)$ , ou les deux, que dire de la somme de la série trigonométrique ainsi formée ?

**Exemple d'un signal carré ou « créneau »**

Soit  $f$   $2\pi$ -périodique telle que  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]-\pi; 0[ \\ -1 & \text{si } x \in ]0; \pi[ \end{cases}$



$f$  est impaire.

Calcul des  $a_n$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto f(x) \cos(nx)$  est impaire donc

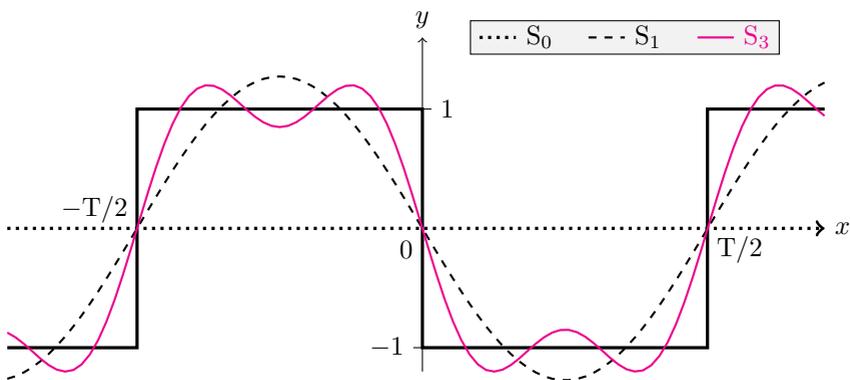
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0, \text{ donc } a_n = 0.$$

Calcul des  $b_n$

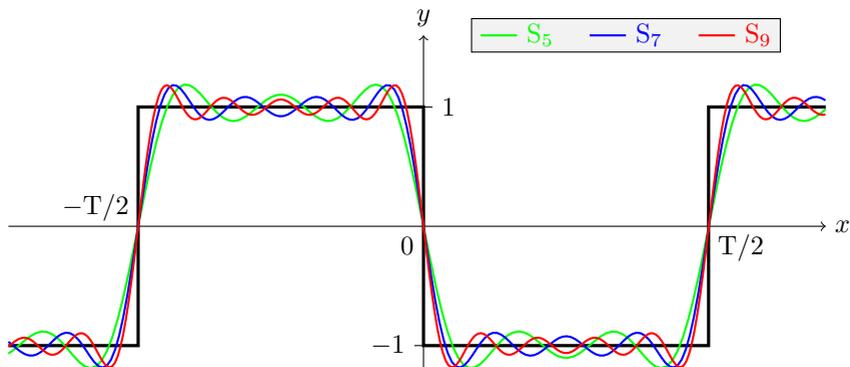
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto f(x) \sin(nx)$  est paire donc

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx &= 2 \int_0^{\pi} -\sin(nx) dx \\ &= 2 \left[ \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n} (\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{n} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \\ b_n &= \begin{cases} -\frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}. \end{aligned}$$

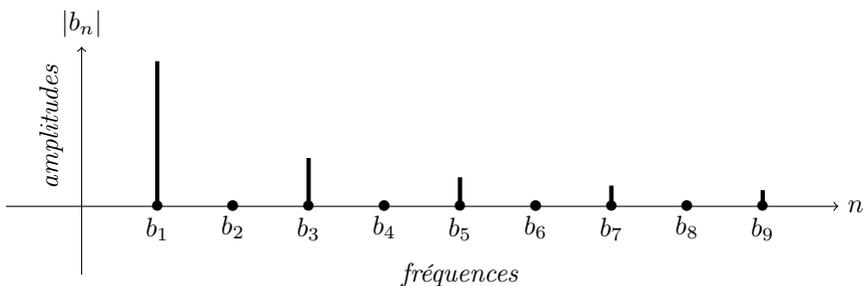
Les trois premières sommes partielles de Fourier :



Les trois suivantes :



Le « spectre » :



### Définition – Série de Fourier d’une fonction

Soit  $T \in ]0; +\infty[$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique et continue par morceaux (ce qui signifie que  $f$  admet des limites finies à gauche et à droite de ses points de discontinuité).

On note  $\omega \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{2\pi}{T}$  la pulsation associée à la période  $T$ . On pose

$$\text{Version complexe} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ni\omega t} dx \end{array} \right.$$

$$\text{Version réelle} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dx = c_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dx = c_n + c_{-n} \\ b_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dx = i(c_n - c_{-n}) \end{array} \right.$$

Notons que  $f$  étant  $T$ -périodique, ces intégrales peuvent être calculées sur tout intervalle de longueur  $T$ , comme par exemple  $[0; T]$ .

*Nous allons étudier quelques propriétés fréquemment rencontrées dans les sujets traitant des séries de Fourier.*

**Dans toute la suite**,  $f$  désigne une fonction  $T$ -périodique continue par morceaux et on note  $S_n(f)$  la  $n$ -ème somme partielle de sa série de Fourier

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega x} = \sum_{k=0}^n a_k \cos(\omega k x) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(\omega k x).$$

**Exercice 123**

*Cas des fonctions paires ou impaires*

1. Si  $f$  est paire, montrer que  $b_n$  est nul pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Si  $f$  est impaire, montrer que  $a_n$  est nul pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Solution (Ex.123 – Cas des fonctions paires ou impaires)**

Il suffit d’observer que l’intervalle  $[-T/2; T/2]$  est symétrique par rapport à 0 et que  $t \mapsto f(t) \sin(n\omega t)$  est impaire si  $f$  est paire tandis que  $t \mapsto f(t) \cos(n\omega t)$  est impaire si  $f$  est impaire.

*Une condition nécessaire pour avoir un espoir que*

$$\sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\omega x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(x)$$

*est que les termes généraux de ces séries tendent vers 0 (sinon divergence grossière...)*

### Exercice 124

*Lemme de Riemann-Lebesgue*

Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux. Alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{-in\omega t} dt &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(n\omega t) dt &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(n\omega t) dt &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Par conséquent,  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  tendent vers 0.

Démontrer ce résultat pour les cas suivants :

1. lorsque  $f$  est constante ;
2. lorsque  $f$  est en escalier ;
3. lorsque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , **démonstration classique.**

**Solution** (Ex.124 – Lemme de Riemann-Lebesgue)

1. Supposons  $f$  constante égale à  $k$ . Alors

$$\int_a^b f(t) e^{in\omega t} dt = \left[ \frac{ke^{in\omega t}}{-in\omega} \right]_a^b = \frac{ke^{in\omega b}}{-in\omega} - \frac{ke^{in\omega a}}{-in\omega} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car  $\left| \frac{ke^{in\omega b}}{-in\omega} \right| = \frac{k}{n\omega} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , idem pour  $a$ .

Le raisonnement est le même pour  $\cos$  ou  $\sin$ , les primitives font apparaître  $n\omega$  au dénominateur et des numérateurs bornés par  $|k|$ .

2. On peut découper  $[a; b]$  en  $m$  intervalles sur lesquels  $f$  est constante. En appliquant le cas précédent à chacun des  $m$  intervalles, chacune des  $m$  intégrales tend vers 0, et l'intégrale sur  $[a; b]$  qui est leur somme tend vers 0.

3. Je la traite par exemple sur le  $\cos$ . Comme  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ , on intègre par parties

$$\int_a^b f(t) \cos(n\omega t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ \frac{f(t) \sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_a^b - \frac{1}{n\omega} \int_a^b f'(t) \sin(n\omega t) dt$$

$f$  et  $f'$  sont continues sur le segment  $[a; b]$  donc bornée. Alors :

- $\left| \frac{f(b) \sin(n\omega b)}{n\omega} \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{n\omega} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- $\left| \frac{f(a) \sin(n\omega a)}{n\omega} \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{n\omega} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$\bullet \left| \frac{1}{n\omega} \int_a^b f'(t) \sin(n\omega t) dt \right| \leq \frac{1}{n\omega} \int_a^b |f'(t) \sin(n\omega t)| dt$$

$$\left| \frac{1}{n\omega} \int_a^b f'(t) \sin(n\omega t) dt \right| \leq \frac{(b-a) \|f'\|_\infty}{n\omega} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Chaque terme tend bien vers 0.

*Gustav Lejeune DIRICHLET a franchi dès 1829 des pas décisifs dans l'étude de la convergence des séries de Fourier. Il a introduit une suite de fonctions fondamentales pour l'étude de cette convergence.*

**Exercice 125**

*Noyau de Dirichlet*

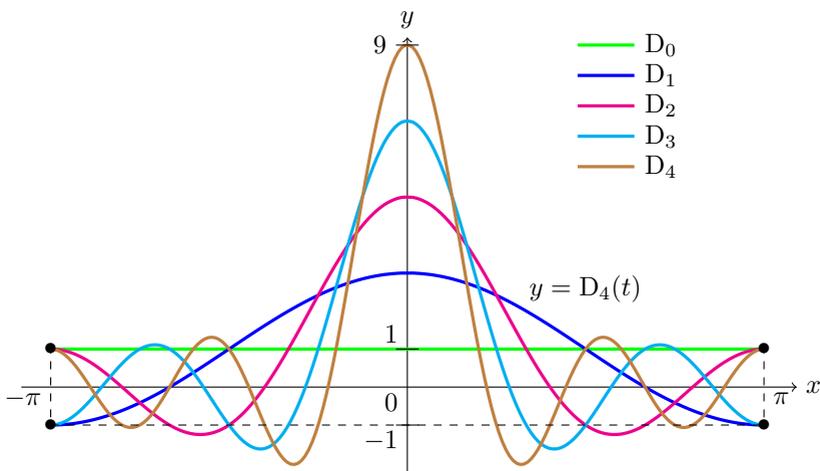
On appelle noyau de Dirichlet d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  la fonction définie par

$$D_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

Justifier les propriétés suivantes.

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D_n$  est  $2\pi$ -périodique.
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$ .
3.  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} & \text{si } x \not\equiv 0 [2\pi] \\ 2n+1 & \text{sinon} \end{cases}$
4.  $\forall n \in \mathbb{N}, D_n(-\pi) = D_n(\pi) = (-1)^n$ .
5.  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^\pi D_n(x) dx = \pi$ .

**Courbes des premiers noyaux de Dirichlet**



**Solution (Ex.125 – Noyau de Dirichlet)**

1. Car les fonctions  $x \mapsto e^{ikx}$  sont  $2\pi$ -périodique.
2. En regroupant les indices opposés :  $e^{-ikx} + e^{ikx} = 2 \cos(kx)$ .

$$3. D_n(x) = \sum_{k=-n}^n (e^{ix})^k = e^{-inx} \frac{1 - e^{ix(2n+1)}}{1 - e^{ix}}$$

$$D_n(x) = e^{-inx} \frac{e^{ix(2n+1)/2} (-2i \sin((2n+1)x/2))}{e^{ix/2} (-2i \sin(x/2))} = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

$$4. D_n \text{ est paire et } D_n(\pi) = \frac{\sin(n\pi + \pi/2)}{1} = (-1)^n.$$

5. Se calcule immédiatement sur ② par linéarité, car pour  $k \geq 1$ ,

$$\int_0^\pi \cos(kx) dx = \left[ \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi = 0.$$

Changeons un peu de point de vue et munissons-nous d'un produit scalaire adapté à la situation.

### Exercice 126

*Orthonormalité, projection et inégalité de Bessel*

Soit  $E = \mathcal{C}^0([-T/2; T/2], \mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace des fonctions continues sur le segment  $[-T/2; T/2]$ . On note  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

On munit  $E$  du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)g(x)dx.$$

Justifier les propriétés suivantes.

1. Soit  $\gamma_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{T}}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\gamma_n : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(n\omega x) \quad \text{et} \quad \sigma_n : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(n\omega x).$$

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la famille  $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$  est une famille orthonormale.

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la  $n$ -ème somme de Fourier

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\omega x)$$

est le projeté orthogonal de  $f$  sur  $F_n = \text{Vect}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ .

3. *Inégalité de BESSEL*

$$a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f(x))^2 dx$$

4. *Corollaire : le retour de RIEMANN-LEBESGUE*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

**Solution (Ex.126 – Orthonormalité, projection et inégalité de Bessel)**

1. • On peut commencer par observer que pour tout  $n \geq 1$  :

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega x) dx = \left[ \frac{\sin(n\omega x)}{n\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} = 0 \text{ et}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega x) dx = \left[ -\frac{\cos(n\omega x)}{n\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} = 0$$

- On vérifie que les fonctions sont unitaires :

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{T} \text{ donc } \|\gamma_0\|^2 = T \times \frac{1}{T} = 1,$$

et pour  $n \geq 1$ ,

$$\|\gamma_n\|^2 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 + \cos(2n\omega x)}{2} dx = 1$$

$$\|\sigma_n\|^2 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 - \cos(2n\omega x)}{2} dx = 1$$

• L'orthogonalité se vérifie de façon analogue, notamment par linéarisation :

$$\gamma_m \gamma_n = \frac{1}{2} (\gamma_{m+n} - \gamma_{m-n}) \text{ d'intégrale nulle sur } [-T/2; T/2].$$

$$\sigma_m \sigma_n = \frac{1}{2} (\gamma_{m-n} - \gamma_{m+n}) \text{ d'intégrale nulle sur } [-T/2; T/2].$$

$\gamma_m \sigma_n$  est une fonction impaire donc son intégrale sur  $[-T/2; T/2]$  est nulle.

2. Puisqu'on dispose d'une base orthonormale de  $F_n$ , les coordonnées de du projeté  $p_n(f)$  de  $f$  sur  $F_n$  dans cette base sont les produits scalaires :

$$\langle f, \gamma_0 \rangle = \sqrt{\frac{1}{T}} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \sqrt{T} a_0, \text{ et pour } n \geq 1,$$

$$\langle f, \gamma_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega x) dx = \sqrt{\frac{T}{2}} a_n$$

$$\langle f, \sigma_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n\omega x) dx = \sqrt{\frac{T}{2}} b_n$$

Donc

$$\begin{aligned} p_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^n \langle f, \gamma_k \rangle \gamma_k(x) + \sum_{k=1}^n \langle f, \sigma_k \rangle \sigma_k(x) \\ &= \sqrt{T} a_0 \frac{1}{\sqrt{T}} + \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{T}{2}} a_k \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{T}{2}} b_k \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(k\omega x) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\omega x) \\ &= S_n(f)(x) \end{aligned}$$

3. De  $f = S_n(f) + (f - S_n(f))$  avec  $S_n(f) \in F_n$  et  $f - S_n(f) \in F_n^\perp$  (caractérisation du projeté orthogonal), on obtient par le théorème de PYTHAGORE  $\|f\|^2 = \|S_n(f)\|^2 + \|f - S_n(f)\|^2$ , donc  $\|S_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2$  ( $\heartsuit$ ).

Or :  $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \langle f, \gamma_k \rangle \gamma_k(x) + \sum_{k=1}^n \langle f, \sigma_k \rangle \sigma_k(x)$ , et comme cette décomposition se fait dans une base orthonormale,

$$\|S_n(f)\|^2 = \sum_{k=0}^n \langle f, \gamma_k \rangle^2 + \sum_{k=1}^n \langle f, \sigma_k \rangle^2 = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

De plus,  $\|f\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)^2 dx$ .

En remplaçant par ces expressions dans (♡), on obtient l'inégalité de Bessel

4. Le membre de gauche de l'inégalité de Bessel forme une suite croissante et majorée (le majorant ne dépend pas de  $n$ ), donc convergente, donc la série de terme général  $a_k^2 + b_k^2$  converge, donc ce terme général tend vers 0, donc  $a_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$  et  $b_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ .

*Le raisonnement précédent, qui mêle astucieusement algèbre et analyse, ne se généralise pas directement aux fonctions non continues car*

$$N(f) = \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} f^2(x) dx}$$

*ne vérifie pas l'axiome de séparation des normes. Si  $f$  est partout nulle sauf en 0 où elle vaut 1, alors  $N(f) = 0$  bien que  $f$  ne soit pas la fonction nulle. Revenons à un calcul plus élémentaire qui permet d'établir ces résultats pour les fonctions continues par morceaux.*

### Exercice 127

BESSEL et RIEMANN-LEBESGUE pour les fonctions continues par morceaux

Soit  $f : [-T/2; T/2] \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux.

Justifier les propriétés suivantes.

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la  $n$ -ème somme de Fourier

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\omega x)$$

vérifie

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) S_n(x) dx = T \left( a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) = \int_{-T/2}^{T/2} (S_n(f)(x))^2 dx.$$

2. Inégalité de BESSEL

On observant que  $\int_{-T/2}^{T/2} (f(x) - S_n(f)(x))^2 dx \geq 0$ ,

$$a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f(x))^2 dx$$

3. *Lemme de RIEMANN-LEBESGUE*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

**Solution** (Ex.127 – BESSEL et RIEMANN-LEBESGUE pour les fonctions continues p

1. La première égalité est un simple constat, vu les définitions des  $a_k$  et  $b_k$ .

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) S_n(x) dx &\stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{k=0}^n a_k \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega x) dx + \sum_{k=1}^n b_k \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega x) dx \\ &= T \left( a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right). \end{aligned}$$

La seconde égalité provient des intégrales déjà calculées dans la version précédente de l'inégalité de Bessel :

$$\begin{aligned} (S_n(f)(x))^2 &= \left( \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\omega x) \right)^2 \\ (S_n(f)(x))^2 &= \sum_{k=0}^n a_k^2 \cos^2(k\omega x) + \sum_{k=1}^n b_k^2 \sin^2(k\omega x) + 2 \sum (\text{tous les produits}) \end{aligned}$$

En intégrant, les intégrales des produits sont nulles donc

$$\int_{-T/2}^{T/2} (S_n(f)(x))^2 dx = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

2. Par positivité de l'intégrale :  $\int_{-T/2}^{T/2} (f(x) - S_n(f)(x))^2 dx \geq 0$ , or

$$\begin{aligned} &\int_{-T/2}^{T/2} (f(x) - S_n(f)(x))^2 dx \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} (f(x))^2 dx - 2 \int_{-T/2}^{T/2} f(x) S_n(f)(x) dx + \int_{-T/2}^{T/2} (S_n(f)(x))^2 dx \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} (f(x))^2 dx - T \left( a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) \end{aligned}$$

D'où l'inégalité de Bessel, établie cette fois pour toute fonction continue par morceaux.

Étudions maintenant le théorème de DIRICHLET. Dans l'exemple du créneau, on peut remarquer qu'aux points de discontinuité  $-\Gamma/2$ ,  $0$  et  $\Gamma/2$  (identique à  $-\Gamma/2$  par périodicité), les sommes partielles de la série de Fourier valent  $0$ , qui est exactement la moyenne des limites à gauche et à droite de la fonction. La série de Fourier opère une régularisation de  $f$  en ces points de discontinuité.

**Définition – Régularisée d'une fonction continue par morceaux**

Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux. On appelle régularisée de  $f$ , notée  $\tilde{f}$ , définie pour tout  $x$  de  $[a; b]$  par

- si  $f$  est continue en  $x$  alors  $\tilde{f}(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} f(x)$ ,
- si  $f$  est discontinue en  $x$  alors  $\tilde{f}(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)}{2}$ .

Pour alléger les notations, on écrira

$$f(x^-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \text{ et } f(x^+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t).$$

On peut résumer cette définition en écrivant

$$\forall x \in [a; b], \quad \tilde{f}(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

**Exercice 128**

*Théorème de Dirichlet*

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et  $\Gamma$ -périodique. On pose  $\omega = \frac{2\pi}{\Gamma}$  et on note  $(S_n(f))_n$  la suite des sommes partielles de la série de Fourier

$$S_n(f) : x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ki\omega x} = \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\omega x).$$

On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, *i.e.*  $f$  est continue par morceaux, dérivable sauf éventuellement en un nombre fini de point sur une période, et que  $f'$  est continue par morceaux.

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) = \tilde{f}(x).$$

Autrement dit, la série de Fourier de  $f$  converge simplement vers sa régularisée.

Pour alléger les notations, on prouve ce résultat dans le cas particulier  $T = 2\pi$ .  
 Il se généralise par un simple changement de variable.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Justifier les propriétés suivantes.

1.  $S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt$
2.  $S_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \sin\left((n + \frac{1}{2})t\right) \frac{f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)}{\sin(t/2)} dt \right)$
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = 0$ .

**Solution (Ex.128 – Théorème de Dirichlet)**

1. Passons par les coefficients complexes :

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx}$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt$$

Le changement de variable affine  $u = x - t$  fournit alors

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_n(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) du$$

par  $2\pi$ -périodicité (l'intégrale est la même sur tout intervalle de longueur  $2\pi$ ).

2.  $D_n$  est paire, donc  $\int_{-\pi}^0 f(x-t) D_n(t) dt \stackrel{u=-t}{=} \int_0^{\pi} f(x+u) D_n(u) du$ , d'où

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) (f(x+t) + f(x-t)) dt$$

$$S_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) (f(x+t) + f(x-t)) dt - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Or :  $\int_0^{\pi} D_n(t) dt = \pi$  donc par linéarité

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) (f(x^+) + f(x^-)) dt$$

Et toujours par linéarité

$$S_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) (f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)) dt$$

où on peut écrire  $D_n(t) = \frac{\sin((n + 1/2)t)}{\sin(t/2)}$ .

3. Posons

$$g(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)}{\sin(t/2)}.$$

de sorte que

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - \tilde{f}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin((n+1/2)t)g(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin(nt) \cos(t/2)g(t)dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(nt) \sin(t/2)g(t)dt \end{aligned}$$

Si  $g$  est continue par morceaux, on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue pour conclure.

- Comme  $f$  est continue par morceaux sur  $[0; \pi]$ ,  $g$  est continue par morceaux sur  $]0; \pi]$ .

- $\frac{f(x-t) - f(x^-)}{\sin(t/2)} = \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t} \times \frac{t}{\sin(t/2)} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} f'(x^-) \times 2$  car  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

De même  $\frac{f(x+t) - f(x^+)}{\sin(t/2)} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} 2f'(x^+)$ .

Donc  $f$  admet une limite finie en 0, donc est continue par morceaux sur  $[0; \pi]$ .

*Pour terminer, voyons une égalité qui clôt l'inégalité de BESSEL, due à Marc-Antoine PARSEVAL DES CHÊNES. Cette formule peut être interprétée comme une généralisation du théorème de Pythagore pour les séries dans les espaces  $\ell^2$  de Hilbert.*

*Dans de nombreuses applications physiques (courant électrique par exemple), cette formule peut s'interpréter comme suit : l'énergie totale s'obtient en sommant les contributions des différents harmoniques.*

*Elle permet aussi le calcul rapide de somme de séries, comme certaines séries de Riemann, que je propose en application.*

**Exercice 129**

*Identité de PARSEVAL et application au calcul de sommes*

Soit  $f$  satisfaisant les hypothèses du théorème de DIRICHLET.  
Justifier les propriétés suivantes.

**1. Identité de PARSEVAL**

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

2. *Application 1 : calcul de  $\zeta(2)$*

En utilisant la fonction  $2\pi$ -périodique telle que  $f(x) = x$  pour  $x$  dans  $] -\pi; \pi[$ , on obtient

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. *Application 2 : calcul de  $\zeta(4)$*

En utilisant la fonction  $2\pi$ -périodique et paire telle que  $f(x) = x$  pour  $x$  dans  $[0; \pi[$ , on obtient

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**Solution (Ex.129 – Identité de PARSEVAL et application au calcul de sommes)**

1. Puisque  $f$  satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet,

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

En multipliant par  $\tilde{f}(x)$  et en intégrant sur  $[-T/2; T/2]$ , toujours grâce à l'orthogonalité de la famille  $(1, \cos(\omega x), \cos(2\omega x), \dots, \sin(\omega x), \sin(2\omega x), \dots)$ , on obtient, au facteur  $1/T$  près, l'identité de Parseval pour  $\tilde{f}$ . Et comme  $f$  et  $\tilde{f}$  ne diffèrent au plus qu'en un nombre fini de points, leurs intégrales sur  $[-T/2; T/2]$  sont égales.

2. Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique telle que  $f(x) = x$  pour  $x$  dans  $] -\pi; \pi[$ .  $f$  vérifie les conditions de Dirichlet et, étant impaire, on a  $a_n = 0$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{\pi} \left( \left[ \frac{-x \cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + 0 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \text{ d'où } \frac{1}{2} b_n^2 = \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Par l'identité de Parseval :

$$\frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} = 2\zeta(2), \text{ donc } \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique et paire telle que  $f(x) = x$  pour  $x$  dans  $]0; \pi[$ .  $f$  vérifie les conditions de Dirichlet et, étant paire, on a  $b_n = 0$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx \text{ (parité), donc } a_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \text{ (parité)}$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{\pi} \left( \left[ \frac{x \sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) = 0 + \frac{2}{n\pi} \left[ \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } a_n^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{16}{n^4\pi^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\text{Par l'identité de Parseval : } \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{(2n+1)^4\pi^2}, \text{ or}$$

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{16}\zeta(4) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \text{ soit}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{15}{16}\zeta(4), \text{ d'où :}$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{15}{2\pi^2}\zeta(4), \text{ donc } \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

# Chapitre 40

## Transformée de FOURIER

☞[CS-M1 – 2016 – PC – Partie II]☞[CS-M2 – 2016 – PSI – Parties I, II & III] ☞[CS-M1 – 2018 – PC – Parties I & II] ☞[MP-M2 – 2019 – PSI – Partie IV]

☞ *Les séries de Fourier pour les fonctions périodiques associent à chaque signal temporel son spectre fréquentiel, association d'ailleurs réversible puisqu'on peut reconstituer le signal connaissant son spectre. Si les séries de Fourier font des merveilles avec les ondes sonores par exemple, en les décomposant en somme d'harmoniques de fréquences multiples de la fréquence fondamentale, comment généraliser l'idée à des signaux non périodiques ?*

*La généralisation débouche sur la transformation de Fourier, exemple le plus courant nécessitant d'intégrer des fonctions à valeurs complexes.*

**Introduction : des séries de Fourier à la transformée de Fourier, l'idée empirique**

Lorsqu'une fonction  $T$ -périodique vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} \quad \text{où } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Dans son *Traité de la chaleur*, Fourier propose d'envisager les fonctions non périodiques comme des fonctions  $T$ -périodiques dont la période  $T$  tend vers  $+\infty$ .

Comme il ne s'agit plus d'empiler des harmoniques de fréquences  $nf_1$  multiples de la fréquence fondamentale  $f_1 = \frac{1}{T}$ , l'astuce consiste à effectuer un «

changement de variable » faisant disparaître  $n$  et permettant un passage à la limite lorsque  $T \rightarrow +\infty$  : on pose  $\xi \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{n}{T}$ .

En écrivant :

- $\Delta\xi = \frac{n+1}{T} - \frac{n}{T} = \frac{1}{T}$  et

- $C(\xi) = Tc_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega x} dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx$  - quantité ne dépendant que de  $\xi$ , il vient

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(\xi)e^{2\pi i\xi x} \Delta\xi.$$

En faisant tendre  $T$  vers  $+\infty$ ,  $\Delta\xi \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{} 0$  et on passe de la somme discrète à la somme continue, alias l'intégrale,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\xi)e^{2\pi i\xi x} d\xi.$$

Quant à  $C(\xi)$ , il devient, puisque  $T \rightarrow +\infty$ ,

$$C(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx.$$

Ce coefficient  $C(\xi)$ , fonction complexe de la variable réelle  $\xi$ , joue le rôle de la suite des coefficients complexes ( $c_n$ ).  $C(\xi)$  est la *transformée de Fourier* de  $f$ , couramment notée  $\mathcal{F}(f)$  ou  $\hat{f}$  (se lit souvent «  $f$  chapeau »).

Ces considérations heuristiques débouchent sur les idées suivantes :

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) fonction « signal », dont la variable est en général dans le domaine « temporel » en physique,

- $\mathcal{F}(f) = \hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \xi \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx$  fonction « spectre », dont la variable est dans le domaine « fréquentiel »,

- avec comme transformation inverse  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x} d\xi$ .

Comme  $\mathcal{F}(f)$  est définie par une intégrale impropre, on n'évitera pas les questions de convergence.

**Exercice 130**

*Transformée de Fourier dans l'espace  $\mathbf{L}_1$ , transformée de la dérivée*

Soit  $L_1$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continues par morceaux et intégrables sur  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $f \in L_1$ . Montrer que  $x \mapsto f(x)e^{-2\pi i\xi x}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $f \in L_1$ . Montrer que  $\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que, si de plus  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  avec  $f^{(k)}$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , alors

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (2\pi i\xi)^k \mathcal{F}(f)(\xi).$$

**Solution (Ex.130 – Transformée de Fourier dans l'espace  $L_1$ , transformée de la dé**

1. Il suffit d'observer que  $|f(x)e^{-2\pi i\xi x}| \leq |f(x)|$  et  $f$  est intégrable.
2. Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
  - (i) Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)e^{-2\pi i\xi x}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .
  - (ii) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \mapsto f(x)e^{-2\pi i\xi x}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
  - (iii) Pour tout  $(\xi, x) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|f(x)e^{-2\pi i\xi x}| \leq |f(x)|$  et  $|f|$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  (et indépendante de  $\xi$ ).
 Par conséquent,  $\mathcal{F}(f)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. Il suffit de le démontrer pour  $n = 1$ . Le résultat se généralise par une récurrence immédiate.

$$\mathcal{F}(f') = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-2\pi i\xi x} dx \text{ incite à tenter une intégration par parties.}$$

Avec  $f$  et  $g : x \mapsto e^{-2\pi i\xi x}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , on sait déjà que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)dx = -2\pi i\xi x\mathcal{F}(f)$$

existe.

Reste à étudier  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x)$ .

Comme  $f'$  est intégrable,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(t)dt$  existe, i.e.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - f(0)$  existe. Donc  $\lim_{+\infty} f$  existe. Soit  $\ell$  cette limite. Si  $\ell \neq 0$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$ ,

or  $\int_0^{+\infty} \ell dx$  diverge, donc  $f$  n'est pas intégrable. C'est absurde, donc  $\ell = 0$ .

Un raisonnement analogue en  $-\infty$  montre aussi que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ .

De plus,  $|f(x)g(x)| = |f(x)|$  donc  $|f(x)g(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ . L'intégration par parties est licite et

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \mathcal{F}(f)(\xi)$$

**Exercice 131**

*Dans l'espace  $\mathcal{S}$ , dérivée de la transformée et transformée de la dérivée*

On note  $\mathcal{S}$  l'espace de Schwartz<sup>1</sup> ou espace des *fonctions à décroissance rapide*.  $\mathcal{S}$  est le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, x \mapsto x^k f^{(n)}(x) \text{ est bornée}\}.$$

Soit  $f \in \mathcal{S}$ .

1. Montrer que pour tout  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $x \mapsto x^k f^{(n)}(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Justifier que  $\mathcal{F}(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  avec, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$(\mathcal{F}(f))^{(n)}(\xi) = (-2\pi i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = (-2\pi i)^n \mathcal{F}(x^n f(x))(\xi).$$

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , montrer que

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\xi) = (2\pi i \xi)^n \mathcal{F}(f)(\xi).$$

**Solution (Ex.131)** – *Dans l'espace  $\mathcal{S}$ , dérivée de la transformée et transformée de la*

1. Soit  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ . Par définition de  $\mathcal{S}$ ,  $x \mapsto x^k f^{(n)}(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et  $x^{k+2} f^{(n)}(x) = \mathcal{O}(1)$ , donc  $x^k f^{(n)}(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , ce qui assure que  $x \mapsto x^k f^{(n)}(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Appliquons le théorème de régularité des intégrales à paramètre. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Soit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(\xi, x) \mapsto f(x) e^{-2\pi i \xi x}$ .  
(i) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \mapsto g(\xi, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}$ .

---

1. Ainsi nommé en hommage à Laurent SCHWARTZ (1915–2002), premier mathématicien français à recevoir la médaille Fields pour ses travaux sur la *théorie des distributions*, en 1950 – il est alors professeur à l'université de Nancy. À ne pas confondre avec Hermann Amandus SCHWARZ (1843–1921), de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

(ii) Pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial \xi^k}(\xi, x) = (-2\pi i x)^k f(x) e^{-2\pi i \xi x}$$

est continue par morceaux et intégrable (toujours  $O(1/x^2)$ ) sur  $\mathbb{R}$ .

(iii) Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{\partial^n g}{\partial \xi^n}(\xi, x) = (-2\pi i x)^n f(x) e^{-2\pi i \xi x}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

(iv)  $\forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\left| \frac{\partial^n g}{\partial \xi^n}(\xi, x) \right| \leq (2\pi)^n |x^n f(x)|$  et  $x \mapsto (2\pi)^n |x^n f(x)|$  est continue par morceaux et intégrable (...toujours  $O(1/x^2)$ ) sur  $\mathbb{R}$ .

Le théorème s'applique et on obtient l'expression voulue.

3. Même raisonnement que dans la propriété précédente (IPP). On peut noter que  $x \mapsto x f^{(n)}(x)$  bornée donne directement  $f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$  puisque  $f^{(n)}(x) = \mathcal{O}(1/x)$ .

### Exercice 132

*Exemples de calculs de transformées Fourier*

Justifier les propriétés suivantes.

1. *Transformée d'une fonction porte et d'une fonction indicatrice*

a) Soit  $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Alors  $\mathcal{F}(\Pi) : \xi \mapsto \text{sinc}(\pi\xi) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$

b) Soit  $a < b$  et  $\chi_{[a; b]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Alors  $\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(\pi(b-a)\xi)}{\pi\xi} e^{-i\pi(a+b)\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b-a & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$

*Remarque* : « sinc » ainsi défini s'appelle le *sinus cardinal*.

2. *Transformée d'une exponentielle*

Soit  $a \in ]0; +\infty[$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Alors  $\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \frac{1}{a + 2\pi i\xi}$ .

**3. Transformée d'une exponentielle symétrisée**

Soit  $a \in ]0; +\infty[$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-a|x|}$ .

Alors  $\mathcal{F}(g) : \xi \mapsto \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$ .

*Remarque* : cette fonction est la fonction lorentzienne de paramètre  $a$ .

**4. Transformée d'une gaussienne**

Soit  $a \in ]0; +\infty[$  et  $\varphi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-a\pi x^2}$ .

En formant une équation différentielle du premier ordre dont  $\widehat{\varphi}_a$  est solution,

on montre, grâce à l'intégrale de GAUSS  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ , que

$$\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\pi\xi^2/a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \varphi_{1/a}(\xi).$$

**Solution (Ex.132 – Exemples de calculs de transformées Fourier)**

$$1. \mathcal{F}(\Pi)(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} 1e^{-2\pi i\xi x} dx = \begin{cases} \left[ \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{-2\pi i\xi} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(\chi_{[a; b]})(\xi) = \int_a^b 1e^{-2\pi i\xi x} dx = \begin{cases} \left[ \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{-2\pi i\xi} \right]_a^b = \frac{\sin(\pi(b-a)\xi)}{\pi\xi} e^{-i\pi(a+b)\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b-a & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

car  $e^{2i\beta} - e^{2i\alpha} = e^{i(\beta+\alpha)} (e^{i(\beta-\alpha)} - e^{i(-\beta+\alpha)}) = 2ie^{i(\beta+\alpha)} \sin(\beta - \alpha)$

$$2. \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+2\pi i\xi)x} dx = \frac{1}{a + 2\pi i\xi}$$

$$3. \text{ En notant } g : x \mapsto \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(g)(\xi) = \int_{-\infty}^0 e^{(a-2\pi i\xi)x} dx = \left[ \frac{e^{(a-2\pi i\xi)x}}{a - 2\pi i\xi} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{a - 2\pi i\xi}$$

Par linéarité de l'intégrale (donc de  $\mathcal{F}$  au passage),

$$\mathcal{F}(h)(\xi) = \mathcal{F}(f + g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) + \mathcal{F}(g)(\xi) = \frac{2a}{a^4 + 4\pi^2\xi^2}$$

$$4. \varphi'_a(x) = -2a\pi x\varphi_a(x) \text{ donc } \varphi'_a(x) + 2a\pi x\varphi_a(x) = 0.$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres,

$$\mathcal{F}(\varphi'_a)(\xi) + 2a\pi\mathcal{F}(x \mapsto x\varphi_a(x))(\xi) = 0$$

Comme  $\varphi_a \in \mathcal{S}$  donc est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et par les liens entre dérivation et transformation de Fourier, on a

$$2\pi i \xi \widehat{\varphi_a}(\xi) - \frac{1}{i} a \widehat{\varphi_a}'(\xi) = 0$$

soit encore

$$\widehat{\varphi_a}'(\xi) + \frac{2\pi}{a} \xi \widehat{\varphi_a}(\xi) = 0$$

Cette équation différentielle du premier ordre s'intègre facilement et il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que

$$\widehat{\varphi_a}(\xi) = K \exp\left(-\frac{\pi}{a} \xi^2\right)$$

De plus

$$\widehat{\varphi_a}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(x) dx \stackrel{u=x\sqrt{a\pi}}{=} \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Donc  $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$ .

### Exercice 133

#### *Transformation inverse*

Soit  $f \in \mathcal{S}$  telle que  $\widehat{f}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

On pose  $\varphi = \varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-\pi x^2)$  de sorte que  $\widehat{\varphi} = \varphi$  d'après la propriété précédente.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) d\xi \quad \text{et} \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) \widehat{\varphi}(x) dx$$

1. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = f(0)$ .

2. À l'aide de la formule de Fubini (admise)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2i\pi\xi x} d\xi \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2i\pi\xi x} dx \right) d\xi$$

montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = J_n$ .

3. Justifier que  $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi$ .

4. Montrer que par translation

$$\forall u \in \mathbb{R}, f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi u \xi} d\xi$$

qui est bien la formule « intuitée » dans l'introduction.

**Solution (Ex.133 – Transformation inverse)**

1. • Appliquons le théorème de convergence dominée de Lebesgue en posant pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$g_n : \xi \mapsto \widehat{f}(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right).$$

(i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $g_n$  est continue par morceaux.

(ii)  $g_n \xrightarrow{\text{CVS}} \widehat{f}$  car  $\varphi$  est continue donc  $\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(0) = 1$ .

(iii) Comme  $|\varphi| \leq 1$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \xi \in \mathbb{R}, |g_n(\xi)| \leq \left| \widehat{f}(\xi) \right| \text{ avec } \widehat{f} \text{ intégrable.}$$

Par le théorème de Lebesgue,

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(\xi) d\xi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

- Rappelons que  $\widehat{\varphi} = \varphi$  et que, par l'intégrale de Gauss,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \stackrel{u=x\sqrt{\pi}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \sqrt{\pi} = 1.$$

Appliquons le théorème de convergence dominée de Lebesgue en posant pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$h_n : x \mapsto f\left(\frac{x}{n}\right) \widehat{\varphi}(x).$$

(i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $h_n$  est continue par morceaux.

(ii)  $h_n \xrightarrow{\text{CVS}} f(0)\varphi$  car  $f$  est continue donc  $f\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$ .

(iii) Comme  $f \in \mathcal{S}$ ,  $f$  est bornée car  $f(t) = t^0 f(t)$ , donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |h_n(x)| \leq \|f\|_{\infty} \varphi(x) \text{ avec } \varphi \text{ intégrable.}$$

Par le théorème de Lebesgue,

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\varphi(x) dx = f(0) \times 1 = f(0)$$

$$\begin{aligned} 2. I_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\xi x} \right) dx \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\xi x} \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) dx d\xi, \text{ et par la formule de Fubini} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\xi x} \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) d\xi dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\xi x} \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) d\xi dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{t=\xi/n}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi ntx} \varphi(t) n dt dx \\
&\stackrel{u=nx}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi tu} \varphi(t) dt du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) \widehat{\varphi}(u) du
\end{aligned}$$

Donc :  $I_n = J_n$ .

3. Par unicité de la limite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ , i.e.  $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi$ .

④ Soit  $u \in \mathbb{R}$ . Posons  $h : x \mapsto f(u+x)$  de sorte que  $h(0) = f(u)$ . On va appliquer ce qui précède à  $h$ .

•  $h$  est clairement dans  $\mathcal{S}$  car  $(x+u)^k \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x^k$  et  $h^{(n)}(x) = f^{(n)}(u+x)$ .

•  $\widehat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+x) e^{-2i\pi\xi x} dx \stackrel{t=u+x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\xi(t-u)} dt = e^{2i\pi\xi u} \widehat{f}(\xi)$ ,

et comme  $\widehat{f}$  est intégrable,  $\widehat{h}$  est intégrable.

Donc par ce qui précède,

$$f(u) = h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{h}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi u} d\xi$$



# Chapitre 41

## Séries entières complexes et grands principes

Dans ce chapitre, nous allons étudier certaines propriétés remarquables des fonctions développables en série entière de la variable complexe.

### Rappels sur la notion de voisinage –

• On rappelle qu'une propriété  $\mathcal{P}(z)$  est dite *vraie au voisinage de  $z_0$*  s'il existe une partie ouverte  $\mathcal{V}$  contenant  $z_0$  telle que, pour tout  $z \in \mathcal{V}$ , la propriété  $\mathcal{P}(z)$  est vérifiée.

Vu la définition d'un ouvert, il revient au même de dire qu'il existe  $r > 0$  tel que la propriété  $\mathcal{P}(z)$  est vraie pour tout  $z \in \overset{\circ}{D}(z_0; r)$ ,  $\overset{\circ}{D}(z_0; r)$  désignant le disque ouvert de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ .

Ainsi par exemple, les propriétés suivantes sont équivalentes :

«  $f$  ne s'annule pas au voisinage de  $z_0$  » ;

«  $\exists r > 0, \quad \forall z \in \overset{\circ}{D}(z_0; r), f(z) \neq 0$  » ;

«  $\exists r > 0, \quad (|z - z_0| < r) \implies (f(z) \neq 0)$  ».

• Pour manipuler les voisinages, et notamment les disques ouverts, il est bon d'avoir à l'esprit que, pour tout  $z_0 \in \mathbb{C}$  et tout  $r > 0$

$$\forall z \in \overset{\circ}{D}(z_0; r), \quad \overset{\circ}{D}(z; r - |z - z_0|) \subset \overset{\circ}{D}(z_0; r).$$

### Exercice 134

*Principe des zéros isolés en 0*

On rappelle que l'expression « le nombre  $x$  est un zéro de la fonction  $f$  » signifie que  $f(x) = 0$ .

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

a) Montrer que  $f$  est continue.

b) Montrer que, pour tout  $r > 0$ , il existe  $x$  tel que  $0 < |x| < r$  et  $f(x) = 0$ .  
Autrement dit, tout voisinage  $] -r ; r[$  de 0 contient au moins un zéro de  $f$  autre que le nombre 0. Le zéro 0 de  $f$  n'est pas isolé : on peut trouver des zéros de  $f$  aussi proche que l'on veut de 0.

2. Soit  $f$  une fonction développable en série entière de rayon de convergence  $R > 0$  (éventuellement  $R = +\infty$ ).

On pose

$$\forall z \text{ tel que } |z| < R, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

On suppose de plus que  $f$  n'est pas la fonction nulle.

a) Justifier l'existence de  $k = \min \{n \in \mathbb{N} \mid c_n \neq 0\}$ .

b) Montrer qu'il existe une fonction  $g$  développable en série entière de rayon  $R$  telle que

$$\begin{cases} |z| < R \implies f(z) = z^k g(z) \\ g(0) \neq 0 \end{cases}$$

c) Justifier qu'il existe  $r \in ]0 ; R[$  tel que

$$|z| < r \implies |g(z) - g(0)| \leq \frac{|c_k|}{2}.$$

d) Justifier finalement que

$$\forall z \text{ tel que } 0 < |z| < r, \text{ on a : } f(z) \neq 0.$$

Autrement dit, il existe un voisinage  $\overset{\circ}{D}(0; r)$  de 0 dans lequel le seul point où  $f$  peut s'annuler est 0.

Si 0 est un zéro de  $f$ , alors  $f$  est isolé...

3. Existe-t-il des fonctions développables en série entière telles qu'à partir d'un certain rang  $n_0$  on ait :

a)  $\forall n \geq n_0, \quad f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n} ?$

b)  $\forall n \geq n_0, \quad f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n} ?$

**Solution** (Ex.134 – Principe des zéros isolés en 0)

1. a) • Par composition de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  continue sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\sin$  continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sin(1/x)$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ . Donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  comme produit de fonctions continues.

•  $\forall x \in \mathbb{R}^*, |f(x)| \leq |x|$  donc par encadrement  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0)$ .  
Donc  $f$  est continue.

b) •  $\sin(1/x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}^*, x = \frac{1}{k\pi}$ .

Or  $\frac{1}{k\pi} < r$  pour  $k > \frac{1}{r\pi}$  : prenons par exemple  $k = \left\lceil \frac{1}{r\pi} \right\rceil + 1$  et  $x = \frac{1}{k\pi}$ .

Alors  $0 < x < r$  et  $f(x) = 0$ . *Cqfd*.

2. a) Si tous les coefficients de  $f$  étaient nuls,  $f$  serait la fonction nulle. Comme  $f$  n'est pas nulle, l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} \mid c_n \neq 0\}$  n'est pas vide. Or toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément.

b) Soit  $z$  tel que  $|z| < R$ .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{j=0}^{+\infty} c_{j+k} z^{j+k} = z^k \sum_{j=0}^{+\infty} c_{j+k} z^j$$

En posant  $g(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_{j+k} z^j$ ,  $g$  est de même rayon que  $R$  et  $g(0) = c_k \neq 0$ .

c)  $g$  est continue en 0 (comme toute fonction DSE de rayon non nul), donc  $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} g(0)$ .

En prenant  $\varepsilon = \frac{|c_k|}{2} > 0$  dans la définition de la limite,

$$\exists r > 0 \text{ tel que } |z| < r \implies |g(z) - g(0)| \leq \frac{|c_k|}{2}.$$

d) Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $0 < |z| < r$ . Comme  $g(0) = c_k$ ,

$$|g(z) - c_k| \leq \frac{|c_k|}{2} \text{ donc } \left| |g(z)| - |c_k| \right| \leq \frac{|c_k|}{2} \text{ donc } -\frac{|c_k|}{2} \leq |g(z)| - |c_k|$$

$$\text{donc } \frac{|c_k|}{2} \leq |g(z)|.$$

Comme  $c_k \neq 0$ ,  $|g(z)| > 0$  donc  $g(z) \neq 0$ .

Comme  $f(z) = z^k g(z)$  avec  $z \neq 0$  et  $g(z) \neq 0$ ,  $f(z) \neq 0$ .

3. a) • *Analyse* -

Supposons  $f$  DSE au voisinage de 0 avec un rayon  $R$  non nul et vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Soit  $g : z \mapsto f(z) - 2z$ . Alors :

$$\forall n \geq n_0, \quad g\left(\frac{1}{2n}\right) = 0.$$

$g$  est DSE (même rayon que  $f$ ) et admet une infinité de zéros non isolés au voisinage de 0.

D'après le principe précédent,  $g$  est la fonction nulle, donc  $f$  est la fonction  $z \mapsto 2z$ .

• *Synthèse* –

Réciproquement,  $f : z \mapsto 2z$  est clairement solution au problème.

• *Conclusion* –

Il existe une unique fonction répondant au problème :  $z \mapsto 2z$ .

- b) S'il existe une solution, elle est solution du problème précédent, donc du type  $z \mapsto 2z$ . Or  $f : z \mapsto 2z$  ne vérifie pas

$$\forall n \geq n_0, \quad f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}.$$

Donc ce problème n'a aucune solution.

**Exercice 135**

*Principe du maximum en 0*

Soit  $f$  une fonction développable en série entière de rayon de convergence  $R > 0$  (éventuellement  $R = +\infty$ ).

On pose

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < R, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

On suppose que la fonction  $z \mapsto |f(z)|$  atteint un maximum local en 0, c'est-à-dire

$$\exists r > 0, \quad \forall z \in \overset{\circ}{D}(0, r), \quad |f(z)| \leq |f(0)|.$$

1. Justifier, à l'aide du principe des zéros isolés du premier exercice, que si  $c_0 = 0$ , alors  $f$  est la fonction nulle.
2. Dans cette question, on suppose  $c_0 \neq 0$ .
  - a) On suppose de plus qu'il existe au moins un coefficient  $c_n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  non nul et on pose

$$k = \min \{n \in \mathbb{N}^* \mid c_n \neq 0\}.$$

Justifier l'existence d'un nombre complexe  $b_k$  et d'une fonction  $g$  développable en série entière de rayon au moins égal à  $r$  tel que

$$\forall z \in \overset{\circ}{D}(0; r), \quad f(z) = c_0(1 + b_k z^k(1 + zg(z))).$$

- b) Justifier l'existence d'un réel  $M \in ]0; +\infty[$  tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (|z| \leq \frac{r}{2}) \implies (|g(z)| \leq M).$$

- c) On pose  $b_k = \rho e^{i\alpha}$  avec  $\rho \in ]0; +\infty[$  et  $\alpha \in [0; 2\pi[$ .

Soit  $m = \min\left(\frac{1}{2M}, \frac{r}{2}\right)$ ,  $\theta = \frac{2\pi - \alpha}{k}$  et  $z = me^{i\theta}$ .

Justifier que

$$\left|1 + b_k z^k (1 + z g(z))\right| \geq \left|1 + b_k z^k\right| - \left|b_k z^{k+1} g(z)\right|$$

et en déduire que

$$|f(z)| > |c_0|.$$

d) En déduire que  $f$  est constante.

3. a) Énoncer une conclusion synthétique des questions 1 & 2. Cette conclusion s'appelle le *principe du maximum*.

b) Donner une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}$ , non constante, telle que  $|f|$  atteigne un maximum en 0.

**Solution (Ex.135 – Principe du maximum en 0)**

1. Si  $c_0 = 0$ , alors  $f(0) = 0$  et pour tout  $z$  tel que  $|z| < r$ ,  $|f(z)| \leq |f(0)|$ , i.e.  $f(z) = 0$ . Donc le zéro 0 de  $f$  n'est pas isolé, et ce n'est possible que si la fonction  $f$  est nulle par le principe des zéros isolés.

2. Dans cette question, on suppose  $c_0 \neq 0$ .

a)  $\forall z \in \overset{\circ}{D}(0; r)$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = c_0 + \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^n = c_0 + c_k z^k + z^{k+1} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{k+1+j} z^j \\ &= c_0 \left( 1 + \frac{c_k}{c_0} z^k \left( 1 + z \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_{k+1+j}}{c_k} z^j \right) \right) \end{aligned}$$

En posant  $b_k = \frac{c_k}{c_0}$  et  $g(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_{k+1+j}}{c_k} z^j$  de rayon au moins  $r$  par le

calcul précédent (en fait de rayon identique à  $f$ , donc  $R$ ), on a

$$\forall z \in \overset{\circ}{D}(0; r), \quad f(z) = c_0 (1 + b_k z^k (1 + z g(z))).$$

b)  $g$  est continue sur le disque fermé de rayon  $r/2$ . Ce disque étant aussi borné,  $g$  est bornée et  $|g|$  atteint un maximum  $M$  sur ce disque. On a alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (|z| \leq \frac{r}{2}) \implies (|g(z)| \leq M).$$

c)  $|1 + b_k z^k (1 + z g(z))| = |1 + b_k z^k + b_k z^{k+1} g(z)|$ , et par l'inégalité triangulaire  $||a| - |b|| \leq |a + b|$ ,

$$(1) \quad |1 + b_k z^k (1 + z g(z))| \geq \left| |1 + b_k z^k| - |b_k z^{k+1} g(z)| \right|.$$

Or :

$$\bullet \quad |1 + b_k z^k| = |1 + \rho e^{i\alpha} m^k e^{i(2\pi - \alpha)}| = |1 + \rho m^k| = 1 + \rho m^k$$

•  $|b_k z^{k+1} g(z)| = \rho m^{k+1} |g(z)| \leq \rho m^{k+1} M$  car  $|z| \leq r/2$ .

Et  $mM \leq \frac{1}{2M} M \leq \frac{1}{2}$  donc  $\rho m^{k+1} M \leq \frac{\rho m^k}{2}$ .

D'où  $|b_k z^{k+1} g(z)| \leq \frac{\rho m^k}{2} \leq 1 + \rho m^k$ .

(1) fournit alors

$$|1 + b_k z^k (1 + z g(z))| \geq 1 + \rho m^k - \frac{\rho m^k}{2} \geq 1 + \frac{\rho m^k}{2} > 1.$$

Par conséquent,  $|f(z)| > |c_0|$ .

d) On a trouvé  $z \in \mathring{D}(0; r)$  (car  $|z| = m \leq \frac{r}{2}$ ) tel que  $|f(z)| > |f(0)|$ , ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Par l'absurde, on doit rejeter l'hypothèse de a), donc :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = 0$  et  $f$  est constante, égale à  $c_0$ .

3. a) *Principe du maximum* : si  $|f|$  atteint un maximum local en 0, alors  $f$  est constante sur tout son domaine de définition.
- b)  $\cos$  de classe  $\mathcal{C}$  et non constante sur  $\mathbb{R}$ , et  $|\cos|$  atteint un maximum local (et même global sur  $\mathbb{R}$ ) en 0.

**Exercice 136**

*Taylor et les trois principes généraux*

*Le principe des zéros isolés et le principe du maximum précédemment étudiés supposent que le zéro ou le maximum est atteint en  $z = 0$ . Nous allons voir que ces principes se transportent en tout point intérieur au disque de convergence. Soit  $f$  une fonction développable en série entière de rayon de convergence  $R > 0$  (éventuellement  $R = +\infty$ ) et on note  $\mathcal{D}$  le disque ouvert de centre 0 et de rayon  $R$  (éventuellement  $\mathcal{D} = \mathbb{C}$ ).*

On pose

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < R, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

1. On admet le théorème de FUBINI de permutation de l'ordre des sommations pour les séries doubles absolument convergentes (théorème régulièrement admis dans les énoncés de concours), dont l'énoncé est le suivant.

**Théorème de FUBINI**

Soit  $(u_{i,j})_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}}$  une suite double de nombres complexes :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

On suppose que :

① pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{j \geq 0} u_{i,j}$  est absolument convergente,

② la série  $\sum_{i \geq 0} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}| \right)$  est convergente.

Alors :

❶ pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{i \geq 0} u_{i,j}$  est absolument convergente,

❷ la série  $\sum_{j \geq 0} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}| \right)$  est convergente,

❸ et  $\sum_{i=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}| \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}| \right)$ .

On dit que la série double  $\sum_{i,j} u_{i,j}$  est absolument convergente, et sa somme est indépendante de l'ordre des sommations :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} \right).$$

a) Soit  $z_0 \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ . On pose  $r_0 = |z_0|$ .

Soit  $r \in [r_0; \mathbb{R}[$ . On pose

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{n,k} \stackrel{\text{déf.}}{=} |a_n| \binom{n}{k} (r - r_0)^k r_0^{n-k}.$$

Montrer que la série double  $\sum_{n,k} u_{n,k}$  converge absolument.

b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Justifier la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n| \binom{n}{k} (r - r_0)^k r_0^{n-k}$  converge absolument et que

$$\left| \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \right| (r - r_0)^k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \binom{n}{k} (r - r_0)^k r_0^{n-k}.$$

c) En déduire que la série entière  $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k$  a un rayon de convergence au moins égal à  $r - r_0$ .

d) En déduire finalement que la série entière  $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k$  a un rayon de convergence au moins égal à  $\mathbb{R} - r_0$ , et, toujours à l'aide du théorème de Fubini, montrer que :

pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z - z_0| < R - r_0$ ,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

*Taylor, quand tu nous tiens...*

e) Cette relation demeure-t-elle si  $z_0 = 0$  ?

**2. Principe du prolongement analytique –**

Soit  $z_0 \in \mathcal{D}$ . L'objectif de cette question est de démontrer le principe du prolongement analytique qui sera énoncé en d).

Dans les sous-questions a) à c), on établit que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(z_0) = 0$ ,

(ii)  $f$  est la fonction nulle sur un voisinage de  $z_0$ ,

(iii)  $f$  est la fonction nulle sur  $\mathcal{D}$  tout entier.

a) Justifier que (i) entraîne (ii).

b) On suppose (ii). On note  $\mathcal{D}'$  l'ensemble des points de  $\mathcal{D}$  au voisinage desquels la fonction  $f$  est nulle :

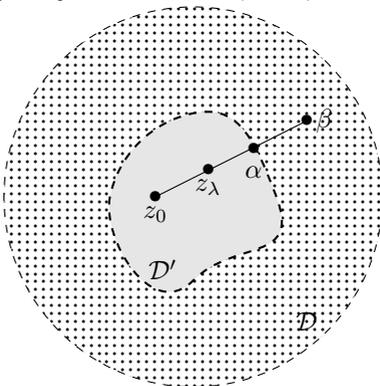
$$\mathcal{D}' = \{z \in \mathcal{D} \mid \exists r_z > 0, f \text{ est nulle sur } \overset{\circ}{\mathbb{D}}(z; r_z)\}$$

i – Justifier que  $\mathcal{D}'$  est un ouvert non vide.

ii – On suppose que  $\mathcal{D}' \neq \mathcal{D}$ , donc il existe au moins un nombre  $\beta \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$ .

On paramètre le segment  $[z_0; \beta]$  en posant

$$\forall \lambda \in [0; 1], \quad z_\lambda = \lambda\beta + (1 - \lambda)z_0.$$



Justifier que l'ensemble  $I = \{\lambda \in [0; 1] \mid z_\lambda \notin \mathcal{D}'\}$  admet une borne inférieure  $\mu$ .

iii – Montrer que  $\mu \geq \frac{r_{z_0}}{|\beta - z_0|} > 0$ .

iv – Soit  $\alpha = z_\mu$ . Justifier que  $\alpha$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}'$ . On pourra raisonner par l'absurde.

v – Soit  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de réels de  $[0; \mu[$  convergente, de limite  $\mu$ .  
En considérant la suite  $(z_{\lambda_k})$ , montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(\alpha) = 0.$$

vi – En déduire une contradiction.

vii – Justifier alors que (iii) est vérifiée.

c) Conclure.

d) Justifier le *principe du prolongement analytique* :

« Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions développables en série entière de rayon  $R > 0$ .

On note  $\mathcal{D} = \overset{\circ}{D}(0; R)$ .

On suppose qu'il existe  $z_0 \in \mathcal{D}$  tel qu'au voisinage de  $z_0$ ,  $f$  et  $g$  coïncident, *i.e.*

$$\exists r > 0 \text{ tel que } |z - z_0| < r \text{ entraîne } f(z) = g(z).$$

Alors  $f = g$  sur  $\mathcal{D}$  tout entier. »

3. *Principe des zéros isolés* –

On suppose que  $f$  n'est pas la fonction nulle. Soit  $z_0 \in \mathcal{D}$  tel que  $f(z_0) = 0$ .

À l'aide de la série entière  $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k$  et du premier exercice,

montrer que  $z_0$  est un zéro isolé de  $f$ , c'est-à-dire qu'il existe  $r > 0$  tel que

$$\forall z \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < r, f(z) \neq 0.$$

4. *Principe du maximum* –

Soit  $z_0 \in \mathcal{D}$ . On suppose que  $z \mapsto |f(z)|$  atteint un maximum local en  $z_0$ .

Montrer, en utilisant le deuxième exercice, que  $f$  est constante sur  $\mathcal{D}$  tout entier.

**Solution (Ex.136 – Taylor et les trois principes généraux)**

1. a) ① Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé.  $\sum_{k \geq 0} u_{n,k}$  converge absolument car ne contient qu'un

nombre fini de termes non nuls puisque  $\binom{n}{k} = 0$  pour  $k > n$ , et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^n |a_n| \binom{n}{k} (r - r_0)^k r_0^{n-k} \stackrel{\text{Newton}}{=} |a_n| r^n$$

② Comme  $0 < r < R$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$  converge absolument, donc

$\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$  converge absolument.

- Par le théorème de Fubini, la série double  $\sum_{n,k} u_{n,k}$  converge absolument.

b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

D'après la conclusion ❶ du théorème de Fubini, la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n| \binom{n}{k} (r - r_0)^k r_0^{n-k}$  converge absolument.

Par dérivation terme à terme de la série entière définissant  $f$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(k+i)!}{i!} a_{k+i} z_0^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{k+i}{k} a_{k+i} z_0^i \\ &\stackrel{n=k+i}{=} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k} \quad \text{car } \binom{n}{k} = 0 \text{ pour } \\ &n < k \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (r - r_0)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n (r - r_0)^k z_0^{n-k}.$$

Comme  $|z_0| = r_0$ , cette série est absolument convergente et par l'inégalité triangulaire

$$\left| \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \right| (r - r_0)^k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \binom{n}{k} (r - r_0)^k r_0^{n-k}.$$

c) • Soit  $z$  tel que  $|z| \leq r - r_0$ . D'après ce qui précède :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k \right| \leq \left| \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \right| (r - r_0)^k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

- D'après la conclusion ❷ du théorème de Fubini, la série  $\sum_{k \geq 0} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right)$  converge.

- Donc la série entière  $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k$  converge, ce qui prouve que le rayon de convergence de cette série vaut au moins  $r - r_0$ .

d) • Soit  $z$  tel  $|z| < R - r_0$ . On a :  $|z| + r_0 < R$ . Prenons  $r \in ]|z| + r_0 ; R[$  de sorte que  $r \in [r_0 ; R[$  et  $|z| < r - r_0$ .

Par le raisonnement précédent, la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k$  converge, donc la

série entière  $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k$  a un rayon de convergence au moins égal à

$R - r_0$ .

- Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z - z_0| < R - r_0$ . Il existe  $r \in [r_0 ; R[$  tel que

$$|z - z_0| \leq r - r_0.$$

Par ce qui précède, la série double  $\sum_{n,k} a_n \binom{n}{k} (z - z_0)^k z_0^{n-k}$  converge absolument puisque le module de son terme général est majorée par  $u_{n,k}$ . Sommons alors cette série double de deux façons.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \\ f(z)}} a_n \binom{n}{k} (z - z_0)^k z_0^{n-k} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} (z - z_0)^k z_0^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \\ \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_n \binom{n}{k} (z - z_0)^k z_0^{n-k} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} (z - z_0)^k z_0^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} \\ &\stackrel{i=n-k}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} (z - z_0)^k \sum_{i=0}^{+\infty} a_{k+i} \binom{k+i}{k} z_0^i \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{k+i} \frac{(k+i)!}{i!} z_0^i \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0) \end{aligned}$$

Par la conclusion ③ du théorème de Fubini, on a

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

- e) Oui, d'après la formule de Taylor en 0 (qui est au programme : si  $R > 0$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \dots$ )

## 2. Principe du prolongement analytique –

Soit  $z_0 \in \mathcal{D}$ . L'objectif de cette question est de démontrer le principe du prolongement analytique qui sera énoncé en d).

Dans les sous-questions a) à c), on établit que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(z_0) = 0$ ,
- (ii)  $f$  est la fonction nulle sur un voisinage de  $z_0$ ,
- (iii)  $f$  est la fonction nulle sur  $\mathcal{D}$  tout entier.

a) Supposons (i).

D'après 1), pour tout  $z \in \overset{\circ}{D}(z_0; R - r_0)$ ,  $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = 0$ .

Ce qui prouve (ii).

**b)** On suppose (ii). On note  $\mathcal{D}'$  l'ensemble des points de  $\mathcal{D}$  au voisinage desquels la fonction  $f$  est nulle :

$$\mathcal{D}' = \{z \in \mathcal{D} \mid \exists r_z > 0, f \text{ est nulle sur } \overset{\circ}{D}(z; r_z)\}$$

**i** – **•** D'après (ii),  $z_0 \in \mathcal{D}'$  donc  $\mathcal{D}' \neq \emptyset$ .

**•** Montrons que  $\mathcal{D}'$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

Soit  $z \in \mathcal{D}'$  quelconque.

Alors il existe  $r_z > 0$  tel que  $f$  est nulle sur  $\overset{\circ}{D}(z; r_z)$ .

Montrons que  $\overset{\circ}{D}(z; r_z) \subset \mathcal{D}'$ , ce qui prouvera que  $\mathcal{D}'$  est ouvert.

Soit  $w \in \overset{\circ}{D}(z; r_z)$  quelconque.

Alors  $|z - w| < r_z$  donc  $\rho = r_z - |z - w| > 0$ .

Et pour tout  $t \in \overset{\circ}{D}(w; \rho)$ ,

$$|t - z| \leq |t - w + w - z| \leq |t - w| + |w - z| < \rho + |w - z|$$

donc  $|t - z| < r_z$  et  $f(t) = 0$ .

Ainsi il existe un voisinage de  $w$  sur lequel  $f$  est nulle, donc  $w \in \mathcal{D}'$ .

Du coup  $\overset{\circ}{D}(z; r_z) \subset \mathcal{D}'$ , ce qui achève de montrer que  $\mathcal{D}'$  est ouvert.

**ii** – **•** I est non vide car  $z_1 = \beta \notin \mathcal{D}'$ .

**•**  $I \subset [0; 1]$  donc I est minoré.

**•** Par conséquent, I possède une borne inférieure.

**iii** – Soit  $\lambda$  tel que :  $0 \leq \lambda < \frac{r_{z_0}}{|\beta - z_0|}$ .

On a :  $|z_\lambda - z_0| = |\lambda\beta + (1 - \lambda)z_0 - z_0| = \lambda|\beta - z_0| < r_{z_0}$ .

Donc :  $z_\lambda \in \overset{\circ}{D}(z_0; r_{z_0})$ .

$\overset{\circ}{D}(z_0; r_{z_0})$  est un voisinage de  $z_\lambda$  sur lequel  $f$  est nulle.

Donc  $z_\lambda \in \mathcal{D}'$  et  $\lambda \in I$ . Par conséquent,  $\mu \geq \lambda$ .

Comme ceci est vrai pour tout  $\lambda$  tel que  $0 \leq \lambda < \frac{r_{z_0}}{|\beta - z_0|}$ , on a

$\mu \geq \frac{r_{z_0}}{|\beta - z_0|}$ , et du coup  $\mu > 0$ .

**iv** – Supposons que  $\alpha \in \mathcal{D}'$ , ce qui induit  $\mu < 1$  car  $\alpha = z_\mu$  et  $z_1 = \beta \notin \mathcal{D}'$ .

$f$  est nulle sur  $\overset{\circ}{D}(\alpha; r_\alpha)$  : du coup, sur le segment  $[z_0; \beta]$ , il va y avoir des  $z_\lambda$  au-delà de  $\alpha$  au voisinage desquels  $f$  est nulle. Étudions cela.

$$|z_\lambda - \alpha| < r_\alpha \iff |\lambda - \mu| < \frac{r_\alpha}{|\beta - z_0|}$$

Prenons alors  $\lambda$  tel que  $\mu \leq \lambda < \mu + \frac{r_\alpha}{|\beta - z_0|}$ .

Alors  $\overset{\circ}{D}(\alpha; r_\alpha)$  est un voisinage de  $z_\lambda$  sur lequel  $f$  est nulle. Du coup  $z_\lambda \in \mathcal{D}'$  et  $\lambda \notin I$ .

J'ai démontré :

$$\forall \lambda \in \left[ \mu; \mu + \frac{r_\alpha}{|\beta - z_0|} \right], \quad \lambda \in I,$$

ce qui contredit que  $\mu = \inf(I)$ .

Donc  $\alpha \notin \mathcal{D}'$ .

- v – • Soit  $k \in \mathbb{N}$ .  $\lambda_k < \mu$  donc  $\lambda_k \notin I$  et  $z_{\lambda_k} \in \mathcal{D}'$ , donc  $f$  est nulle au voisinage de  $z_{\lambda_k}$ .

Du coup :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(z_{\lambda_k}) = 0$ . Et ceci pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

• Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $f^{(n)}$  est continue sur  $\mathcal{D}$  car  $f$  est de classe  $\mathcal{C}$  comme somme de série entière. Par continuité :

$$f^{(n)}(z_{\lambda_k}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} f^{(n)}(\alpha) \text{ car } z_{\lambda_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \alpha.$$

Or

$$f^{(n)}(z_{\lambda_k}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc  $f^{(n)}(\alpha) = 0$ , et ceci pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- vi – D'après a) qui a établi  $(i) \implies (ii)$ , on en déduit que  $f$  est nulle au voisinage de  $\alpha$ . Donc  $\alpha \in \mathcal{D}'$  : ce qui contredit le point précédent.
- vii –  $\mathcal{D}' \neq \mathcal{D}$  conduit à une contradiction. Donc  $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$ , ce qui signifie exactement que  $f$  est nulle au voisinage de tout point de  $\mathcal{D}$ , et  $(iii)$  est vérifiée.

c) Il reste à établir que  $(iii) \implies (i)$ , ce qui est évident car les dérivées successives de la fonction nulle sont toutes nulles.

d) En posant  $h = f - g$ ,  $h$  est DSE sur  $\mathcal{D}$  et nulle sur un voisinage de  $z_0$ , donc par  $(ii) \implies (iii)$ ,  $h$  est nulle sur  $\mathcal{D}$ , donc  $f = g$  sur  $\mathcal{D}$ .

### 3. Principe des zéros isolés –

- $g$  est une fonction DSE autour de 0, de rayon non nul.
- $g$  n'est pas la fonction nulle car si elle l'était, on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0,$$

donc par ce qui précède,  $f$  serait la fonction nulle, hypothèse exclue ici.

- Par 1),

$$\forall z \in \overset{\circ}{D}(z_0; R - |z_0|), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = g(z - z_0).$$

Comme  $f(z_0) = 0$ , on a  $g(0) = 0$ .

On peut appliquer le premier exercice à  $g$  :

$$\exists r > 0 \text{ tel que } (0 < |z| < r) \implies (g(z) \neq 0).$$

Par conséquent,

$$(0 < |z - z_0| < r) \implies (f(z) \neq 0),$$

ce qui signifie exactement que  $z_0$  est un zéro isolé de  $f$  : il existe un voisinage de  $z_0$  dans lequel  $f$  ne s'annule pas, sauf en  $z_0$  évidemment.

4. *Principe du maximum* –

- $\exists r > 0, \forall z \in \overset{\circ}{D}(z_0; r), |f(z)| \leq |f(z_0)|.$

- En définissant  $g$  comme dans la question précédente, on a :

$$\forall z \in \overset{\circ}{D}(0; \min(r, R - |z_0|)), |g(z)| = |f(z + z_0)| \leq |f(z_0)| = |g(0)|$$

car  $z + z_0 \in \overset{\circ}{D}(z_0; r).$

- Par le second exercice, j'en déduis que  $g$  est constante sur  $\overset{\circ}{D}(0; R - |z_0|).$
- Donc  $f$  est constante au voisinage de  $z_0$ , égale à  $f(z_0).$
- Alors  $h = f - f(z_0)$  est nulle au voisinage de  $z_0$ , donc, par 2), est nulle sur  $\mathcal{D}.$
- Donc finalement  $f$  est constante sur  $\mathcal{D}.$

**Exercice 137**

*Fonctions entières et dominations*

Une fonction est dite *entière* si elle est développable en série entière de rayon infini sur  $\mathbb{C}.$

Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

la somme d'une série entière définie sur  $\mathbb{C},$  donc de rayon  $+\infty.$

1. *Une formule de Cauchy* –

Montrer que, pour tout  $r > 0$  et tout  $p \in \mathbb{N},$

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt = 2\pi r^p c_p.$$

2. *Un théorème de Liouville* –

Dans cette question, on suppose que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{C}.$

a) Montrer qu'il existe un réel  $M$  tel que

$$\forall r > 0, \forall p \in \mathbb{N}, |c_p| \leq \frac{M}{r^p}.$$

b) Montrer que tous les coefficients  $c_p$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$  sont nuls.

c) Que peut-on dire de  $f$  ?

d) *Application* - Les fonctions *complexes* sin et cos sont-elles bornées sur  $\mathbb{C}?$

3. Dans cette question, on suppose qu'il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$  tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq \alpha |z|^q + \beta.$$

Montrer que  $f$  est un polynôme.

4. Dans cette question, on suppose quelle

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq e^{\operatorname{Re}(z)}.$$

Montrer qu'il existe une constante complexe  $K$  telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = Ke^z.$$

On pourra s'intéresser à  $g : z \mapsto f(z)e^{-z}$ .

**Solution (Ex.137 – Fonctions entières et dominations)**

1. Une formule de Cauchy –

Soit  $r > 0$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (re^{it})^n e^{-ipt} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n e^{i(n-p)t} dt$$

Or d'après le cours, la convergence est normale donc uniforme sur tout disque de  $\mathbb{C}$  donc en particulier que  $D(0, r)$ . On peut donc permuter  $\int$  et  $\sum$ .

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} c_n r^n e^{i(n-p)t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt$$

$$\text{Or } \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt = \begin{cases} \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi & \text{si } n = p, \\ \left[ \frac{e^{i(n-p)t}}{n-p} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } n \neq p. \end{cases}$$

D'où la formule de Cauchy :

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt = 2\pi r^p c_p.$$

2. Un théorème de Liouville –

a) Puisque  $f$  est bornée sur  $\mathbb{C}$ , il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq M.$$

Alors par l'inégalité triangulaire

$$\forall r > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} M dt \leq 2\pi M,$$

et par la formule précédente,

$$\forall r > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \quad |c_p| \leq \frac{M}{r^p}.$$

b) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Alors :  $\frac{M}{r^p} \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0$ . Et par encadrement :  $|c_p| \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Comme  $|c_p|$  ne dépend pas de  $r$ , cela signifie que  $|c_p| = 0$ , donc  $c_p = 0$ .

c)  $f$  est constante, égale à  $c_0 = f(0)$ .

d) *Application* -

Comme  $\sin$  est DSE de rayon infini, si  $\sin$  était bornée sur  $\mathbb{C}$ , alors elle serait constante. Comme ce n'est pas le cas,  $\sin$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{C}$  et on peut faire le même raisonnement pour  $\cos$ .

On peut aussi noter que  $\sin$  et  $\cos$  ne sont pas bornées sur l'axe imaginaire pur :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad |\sin(ix)| = \left| \frac{e^{-x} - e^x}{2i} \right| \geq \frac{e^x - 1}{2} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad |\cos(ix)| = \left| \frac{e^{-x} + e^x}{2i} \right| \geq \frac{e^x}{2} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

3. Pour tout  $r > 0$  et  $p \in \mathbb{N}$ , on a :

$$2\pi r^p |c_p| = \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \alpha r^q + \beta dt \leq 2\pi(\alpha r^q + \beta),$$

$$\text{d'où } |c_p| \leq \frac{\alpha r^q + \beta}{r^p}.$$

Or pour tout  $p > q$  :  $\alpha r^q + \beta \underset{r \rightarrow +\infty}{=} o(r^p)$ .

Donc, pour tout  $p > q$ , par encadrement,  $|c_p| \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc  $c_p = 0$ .

Par conséquent

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^p c_n z^n,$$

donc  $f$  est bien polynomiale.

4. Soit  $g : z \mapsto f(z)e^{-z}$ . Par le produit de Cauchy de deux fonctions DSE de rayon infini,  $g$  est DSE de rayon infini.

On a alors :  $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |g(z)| \leq e^{\mathcal{R}e(z)} e^{-\mathcal{R}e(z)} \leq 1$ .

Par 3., j'en déduis que  $g$  est constante sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $K$  la valeur de  $g$ . On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = g(z)e^z = Ke^z.$$

# Chapitre 42

## Droites et sous-espaces stables par un endomorphisme

☞[CS-M1 – 2015 – PC – ]

<b>Exercice 138</b>
---------------------

<i>Sous-espaces stables</i>
-----------------------------

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ –espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .  
Justifier les propriétés suivantes.

1. Le sous-espace  $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$  est stable par  $f$  si, et seulement si,  
 $\forall i \in [[1; p]], f(u_i) \in F$ .  
*Autrement dit, si et seulement si, la famille génératrice est stable par  $f$ .*
2. *Corollaire 1 –*  
Si  $u_1, \dots, u_p$  sont  $p$  vecteurs propres de  $f$ , alors  $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$  est stable par  $f$ .
3. *Corollaire 2 –*  
Les sous-espaces propres de  $f$  sont stables par  $f$  ainsi que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$ .

**Solution (Ex.138 – Sous-espaces stables)**

L'implication est immédiate.

La réciproque est une conséquence de la linéarité de  $f$ .

Soit  $x \in F$ . Alors  $x$  s'écrit  $x = x_1 u_1 + \cdots + x_p u_p$ .

$$\text{Ainsi : } f(x) \stackrel{\text{lin.}}{=} x_1 \underbrace{f(u_1)}_{\in F} + \cdots + x_p \underbrace{f(u_p)}_{\in F} \in F$$

**Exercice 139**

*Droites stables*

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $\Delta$  une droite engendrée par un vecteur  $u$ . Démontrer l'équivalence :

$$\Delta = \text{Vect}(u) \text{ est stable par } f \text{ si, et seulement si, } u \text{ est un vecteur propre de } f.$$

**Solution (Ex.139 – Droites stables)** Si  $\Delta = \text{Vect}(u)$  est stable, alors  $f(u) \in \Delta = \text{Vect}(u)$ , donc  $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $f(u) = \lambda u$ .

Si  $u$  est un vecteur propre tel que  $f(u) = \lambda u$ , alors  $\Delta = \text{Vect}(u)$  est stable car  $f(u) \in \Delta$ .

☞ Si un sous-espace est stable, alors...

... il est engendré par des vecteurs propres? **NON**

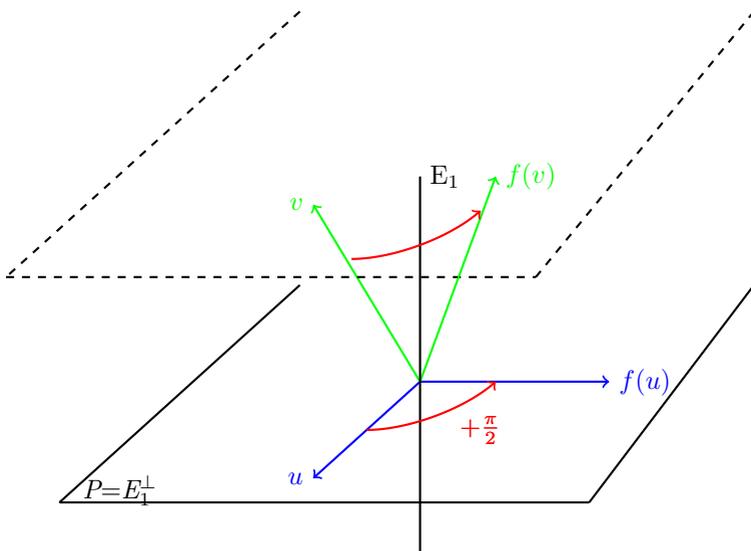
$$\text{Soit } f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \text{ tel que } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

$M$  est diagonale par blocs et  $\Delta = \text{Vect}(e_1)$  et  $P = \text{Vect}(e_2, e_3)$  sont stables par  $f$ .

$\chi_M(X) = (X - 1)(X^2 + 1)$  donc 1 est l'unique valeur propre de  $f$  et  $E_1 = \text{Vect}(e_1)$  : il n'y a aucun vecteur propre dans  $P$  !

D'où vient l'exemple ? En fait, la restriction de  $f$  à  $P$  est une rotation d'angle

$\pi/2$  caractérisée par le bloc  $R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Or une rotation d'angle  $\theta \neq 0[\pi]$  n'a pas de vecteur propre dans  $\mathbb{R}$ .





# Chapitre 43

## Exemples de parties ouvertes, fermées ou denses en algèbre linéaire

☞ [E3A-M1 – 2018 – PSI – Exo 3]

<b>Exercice 140</b>
---------------------

<i>Sous-espaces vectoriels en dimension finie</i>
---

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel est une partie fermée de  $E$ .
2. Quelle est la nature (ouverte ou fermée) des parties suivantes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  (symétriques),  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  (antisymétriques) et  $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  (diagonales) ?
3. Vrai ou faux ? En dimension finie, tout noyau et toute image d'une application linéaire est une partie fermée.

**Solution** (Ex.140 – *Sous-espaces vectoriels en dimension finie*)

2. et 3. sont des conséquences directes de 1..

1. Il s'agit de montrer que toute suite convergente  $(u_k)_{k \geq 0}$  de vecteurs de  $F$  a sa limite dans  $F$ .

Soit  $n = \dim(E)$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel et  $(f_1, \dots, f_p)$  une base de  $F$ . Je complète  $(f_1, \dots, f_p)$  en une base  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$  de  $E$ .

Soit  $(u_k)_{k \geq 0}$  une suite de vecteurs de  $F$  convergente, de limite  $\ell \in E$ .

Je décompose chaque  $u_k$  dans la base  $\mathcal{C}$  de  $E$  :

$$u_k = x_1^{(k)} f_1 + x_2^{(k)} f_2 + \cdots + x_n^{(k)} f_n.$$

i.e.  $x_j^{(k)} f_j$  est la  $j$ -ème coordonnée de  $u_k$  dans  $\mathcal{C}$ .

Comme  $u_k \in \mathbb{F}$ ,  $u_k$  ne s'exprime qu'avec les  $p$  premiers vecteurs de la base (ceux qui engendrent  $\mathbb{F}$ ), donc :

$$\forall j \in [[p+1; n]], \quad x_j^{(k)} = 0$$

Donc :  $x_j^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Or par convergence par coordonnées :

$$\ell = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_1^{(k)} f_1 + \lim_{k \rightarrow +\infty} x_2^{(k)} f_2 + \cdots + \lim_{k \rightarrow +\infty} x_n^{(k)} f_n.$$

$$\ell = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_1^{(k)} f_1 + \lim_{k \rightarrow +\infty} x_2^{(k)} f_2 + \cdots + \lim_{k \rightarrow +\infty} x_p^{(k)} f_p + 0f_{p+1} + \cdots + 0f_n.$$

Donc :  $\ell \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p) = \mathbb{F}, \mathcal{C}qfd$ .

### Exercice 141

*Sous-ensembles remarquables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

1. Montrer que  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  est une partie ouverte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tandis que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  une partie fermée.

*Conséquence : toute suite convergente de matrices non inversibles a une limite non inversible...*

2. Montrer que  $\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

*Conséquence : toute matrice est la limite d'une suite convergente de matrices inversibles. On dit que  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  est **dense** dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  : les matrices inversibles sont suffisamment densément réparties partout dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  pour que toute matrice, même non inversible, ne soit jamais isolée, loin des matrices inversibles.*

3. Montrer que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  sont des parties fermées de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Solution (Ex.141 – Sous-ensembles remarquables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ )**

*Je rappelle que  $\det(\cdot) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est continu, car  $\det(\cdot)$  est un polynôme (produits et sommes) des coefficients de  $M$ . C'est un polynôme de  $n^2$  variables, donc continue. L'addition (linéaire) et la multiplication matricielles (bilinéaire = distributif) matricielles, ainsi que la transposition (linéaire) sont aussi continues.*

*Je rappelle aussi qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (si une suite converge pour une norme, elle converge alors vers la même limite pour toute autre norme) et sont continues.*

1.  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}$  et  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, donc  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  est une partie ouverte.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 0\}$  et  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, donc  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  est une partie fermée.

2.  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est fermé, c'est l'espace tout entier.

3.  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est d'ailleurs à la fois ouvert et fermé, tout comme  $\emptyset$ . Ce sont les seuls à partager cette propriété un peu étrange...

Ainsi  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  qui est le plus petit fermé contenant  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  est inclus dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

*La difficulté est l'inclusion réciproque : il faut montrer que toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dans  $\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})}$ , i.e. est la limite d'une suite de matrices inversibles.*

Soit  $M$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Je vais construire une suite de matrices inversibles très simples qui tend vers  $M$  : je pose

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad M_k \stackrel{\text{déf.}}{=} M + \frac{1}{k} I_n.$$

• On a clairement  $M_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} M$ .

• Les  $M_k$  sont-elles inversibles ?

$$\det(M_k) = \det\left(\frac{1}{k} I_n - (-M)\right) = \chi_{-M}\left(\frac{1}{k}\right), \text{ donc}$$

$M_k$  n'est pas inversible si, et seulement si,  $\frac{1}{k}$  est valeur propre de  $-M$ .

(i) Si  $-M$  n'a pas de valeur propre réelle strictement positive, alors

$$\forall k \geq 1, \det(M_k) \neq 0$$

car  $1/k > 0$  n'est pas valeur propre de  $-M$ .

On posera  $k_0 = 1$  pour la suite du raisonnement.

(ii) Si  $-M$  possède au moins valeur propre réelle strictement positive, alors comme elle n'a qu'un nombre fini de valeurs propres (au maximum  $n$ ), soit  $\lambda$  la plus petite d'entre elles :

$$\lambda = \min(\]0; +\infty[ \cap \text{Sp}(-M)).$$

Comme  $\frac{1}{k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$  et  $\lambda > 0$ ,  $\exists k_0 \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq k_0, \frac{1}{k} < \lambda$  (définition de la limite avec  $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$  par exemple).

Alors  $\forall k \geq k_0, \frac{1}{k} \notin \text{Sp}(-M)$  et  $M_k$  est inversible.

$$\text{Bilan : } \left\{ \begin{array}{l} \forall k \geq k_0, \quad M_k \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ M_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} M \end{array} \right.$$

4.  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^T M = I_n\}$ .

Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (par exemple  $\|M\| = \text{Tr}((M^T M))$ , la norme canonique). Soit

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \|M^T M - I_n\|.$$

$f$  est continue et  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = 0\}$  donc  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est fermé.

$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(M) = 1\}$  est une intersection de deux fermés (car  $M \mapsto \det(M) - 1$  est continue), donc  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  est fermé.

**Exercice 142**

*Et l'ensemble des matrices diagonalisables ?*

Montrer que l'ensemble des matrices  $\mathcal{D}$  diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $n \geq 2$  n'est ni fermé, ni ouvert.

Et si on travaille dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$  ?

**Solution** (Ex.142 – *Et l'ensemble des matrices diagonalisables ?*)

$$\textcircled{1} A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_k$  est diagonalisable pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  car  $\text{Sp}(A_k) = \{0, 1/k\}$  (deux valeurs propres distinctes en dimension 2).

$L$  n'est pas diagonalisable puisque  $\text{Sp}(L) = \{0\}$  et  $L \neq 0 \cdot I_2$ .

Donc  $\mathcal{D}$  n'est pas fermé.

$$\textcircled{2} B_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_k$  n'est pas diagonalisable pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  car  $\text{Sp}(B_k) = \{0\}$  et  $B_k \neq 0$ .

$M$  est diagonalisable car... diagonale!

Donc  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{D}$  n'est pas fermé, donc  $\mathcal{D}$  n'est pas ouvert.

$\textcircled{3}$  Pour  $n = 1$ , toute matrice de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$  est diagonalisable donc  $\mathcal{D} = \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$  est ouvert et fermé, car c'est l'espace tout entier.

# Chapitre 44

## Utilisation des polynômes annulateurs

**Définitions –**

• **Polynôme annulateur d'une matrice carrée**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que le polynôme  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  est annulateur de  $M$  si

$$P(M) = \sum_{k=0}^d a_k M^k = 0_n, \quad \text{matrice nulle.}$$

• **Polynôme annulateur d'un endomorphisme**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On dit que le polynôme  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  est annulateur de  $f$  si

$$P(f) = \sum_{k=0}^d a_k f^k = 0_n, \quad \text{endomorphisme nul.}$$

• Le terme « *racine* » est réservé aux **scalaires** de  $\mathbb{K}$ . Ainsi on ne dit pas que  $M$  ou  $f$  sont des racines de  $P$ .

**Exemple –**

<b>Exercice 143</b>
---------------------

<i>Exploitation d'un polynôme annulateur</i>
--

Soit  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  un polynôme annulateur d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Montrer que si le terme constant  $a_0$  de  $P$  est non nul, alors  $M$  est inversible et

$$M^{-1} = \frac{-1}{a_0} \left( \sum_{k=1}^d a_k M^{k-1} \right)$$

2. a) Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $M$  alors  $P(\lambda) = 0$ .

*Autrement dit, les valeurs propres parmi les racines de  $P$ .*

- b) ☞ **Réciproque fautive!!!**

Vérifier que  $P = X^2 - X$  est annulateur de  $I_2$ . Ces racines sont-elles toutes des valeurs propres de  $I_2$  ?

3. Par division euclidienne, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\exists!(Q_m, R_m) \in \mathbb{K}_n[X]^2 \text{ avec } \deg(R_m) < \deg(P), \quad X^m = PQ_m + R_m.$$

Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad M^m = R_m(M).$$

*Autrement dit chaque puissance  $m$ -ème de  $M$  est un polynôme de degré au plus  $d - 1$  de  $M$ .*

4. *Application* – Vérifier que  $P = X^3 - 3X - 2$  est un polynôme annulateur de

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 2 \\ 7 & -6 & 1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exploiter les propriétés précédentes pour calculer l'inverse, les valeurs propres et les puissances de  $M$ .

**Solution (Ex.143 – Exploitation d'un polynôme annulateur)**

1.  $M \times \left[ \frac{-1}{a_0} \left( \sum_{k=1}^d a_k M^{k-1} \right) \right] = \frac{-1}{a_0} \left( \sum_{k=1}^d a_k M^k \right) = \frac{-1}{a_0} (P(M) - a_0 I_n),$

$$\text{or } P(M) = 0 \text{ donc } M \times \left[ \frac{-1}{a_0} \left( \sum_{k=1}^d a_k M^{k-1} \right) \right] = I_n, \text{ Cqfd.}$$

2. a) En fait, tout provient de

$$MU = \lambda U \implies M^k U = \lambda^k U$$

*par récurrence immédiate.*

Et tout aussi immédiatement

$$MU = \lambda U \implies P(M)U = P(\lambda)U \quad (\heartsuit).$$

Du coup, si de plus  $P(M) = 0$  et  $U \neq 0$ , alors  $P(\lambda) = 0$ .

Détail de ( $\heartsuit$ ) :

$$P(M)U = \left( \sum_{k=0}^d a_k M^k \right) U = \sum_{k=0}^d a_k M^k U = \sum_{k=0}^d a_k \lambda^k U = P(\lambda)U.$$

b)  $I_2^2 - I_2 = 0$  donc  $P(I_2) = 0_2$  :  $P$  est un polynôme annulateur de  $I_2$ .

Cependant, 0 est une racine de  $P$  mais n'est pas valeur propre de  $I_2$  puisque  $\text{Sp}(I_2) = \{1\}$ .

3.  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $M^m = P(M)Q_m(M) + R_m(M) = 0 \times Q_m(M) + R_m(M) = R_m(M)$ .

4. • On vérifie que  $P(M) = 0_3$  :

$$\begin{pmatrix} 23 & -21 & 6 \\ 21 & -16 & 3 \\ 18 & -9 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 7 & -7 & 2 \\ 7 & -6 & 1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\bullet M^3 - 3M - 2I_3 = 0 \implies M(M^2 - 3I_3) = 2I_3 \implies M \times \left[ \frac{1}{2}(M^2 - 3I_3) \right] = I_3,$$

$$\text{donc } M^{-1} = \frac{1}{2}(M^2 - 3I_3)$$

• Et comme  $P(X) = (X + 1)^2(X - 2)$ ,  $\text{Sp}(M) \subset \{-1, 2\}$ .

$$\text{rg}(M + I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 8 & -7 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad (C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0), \text{ donc } -1 \in \text{Sp}(M).$$

$$\text{rg}(M - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 7 & -8 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = 2 \quad (C_1 + C_2 + C_3 = 0), \text{ donc } 2 \in \text{Sp}(M).$$

Ainsi  $\text{Sp}(M) = \{-1, 2\}$ . Cependant  $M$  n'est pas diagonalisable car  $\dim(E_{-1}) = 1 < 2 = \omega(-1)$ .

• Comment trouver le reste de la division de  $X^m$  par  $P$  ? Tout est là.

Sur l'exemple, voyons ce que ça donne.

$X^m = P(X)Q_m(X) + R_m(X)$  avec  $\deg(R_m) < 3$ .

Soit  $R_m(X) = a_m X^2 + b_m X + c_m$ . Exploitions les racines  $-1$  et  $2$  de  $P$ .

$$X^m = P(X)Q_m(X) + a_m X^2 + b_m X + c_m \quad (\heartsuit).$$

( $\heartsuit$ ) en  $X = -1$  donne  $(-1)^m = a_m - b_m + c_m$ .

( $\heartsuit$ ) en  $X = 2$  donne  $2^m = 4a_m + 2b_m + c_m$ .

Il nous faudrait une troisième relation. Exploitions le fait que  $-1$  est racine double, donc annule  $P$  et  $P'$ . Je dérive ( $\heartsuit$ ).

$$mX^{m-1} = P'(X)Q_m(X) + P(X)Q'_m(X) + 2a_mX + b_m \quad (\heartsuit').$$

( $\heartsuit'$ ) en  $X = -1$  donne  $m(-1)^{m-1} = -2a_m + b_m$ .

$$(a_m, b_m, c_m) \text{ est solution de } \begin{cases} a_m - b_m + c_m & = (-1)^m \\ 4a_m + 2b_m + c_m & = 2^m \\ -2a_m + b_m & = m(-1)^{m-1} \end{cases}$$

Après un peu de sueur :

$$\begin{cases} a_m = \frac{1}{9}((3m-1)(-1)^m + 2^m) \\ b_m = \frac{1}{9}((3m+2)(-1)^{m+1} + 2^{m+1}) \\ c_m = \frac{1}{9}((8-6m)(-1)^m + 2^m) \end{cases} \quad \text{et } M^m = a_m M^2 + b_m M + c_m I_2.$$

**Exercice 144**

*Polynôme minimal et crochets de Lie*

**1. Polynôme minimal**

Soit  $n \geq 2$ . Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

a) Justifier que la famille  $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$  est liée.

b) En déduire l'existence d'un polynôme  $P$  non nul tel que  $P(A) = 0$ .

*Donc toute matrice possède au moins un polynôme annulateur non nul.*

c) Soit  $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N} / \exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \text{ tel que } P(A) = 0 \text{ et } \deg(P) = n\}$ .

Justifier qu'il existe  $d \stackrel{\text{df.}}{=} \min(\mathcal{D})$ , et qu'il existe un polynôme  $\mu_A$  unitaire de degré  $d$  tel que  $\mu_A(A) = 0$ .

d) Montrer que, si  $P$  est un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  annulateur de  $A$ , alors il existe  $Q$  dans  $\mathbb{K}[X]$  tel que  $P = Q\mu_A$ .

e) Montrer que  $\mu_A$ , défini en 1.c), est unique.

f) En déduire que l'ensemble  $\mathcal{Z}(A)$  des polynômes annulateurs de  $A$  est :

$$\mathcal{Z}(A) = \{Q\mu_A, Q \in \mathbb{K}[X]\}.$$

*Ce polynôme est qualifié de « polynôme minimal de  $A$  ».*

**2. Un polynôme divisible par son dérivé**

Soit  $P$  un polynôme unitaire (donc non nul) de  $\mathbb{K}[X]$  tel qu'il existe  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$  vérifiant :

$$XP' = \alpha P.$$

- a) Montrer que  $\alpha = \deg P$ .
- b) On suppose que  $P'$  possède une racine  $\beta$  non nulle d'ordre de multiplicité  $\mu$ .
- i – Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine  $\beta$  de  $XP'$  ?
  - ii – Justifier que  $\beta$  est racine de  $P$ . Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine  $\beta$  de  $P$  ?
  - iii – En déduire que  $P = X^\alpha$ .

**3. Application à une équation matricielle**

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifiant :

$$AB - BA = A.$$

- a) Que peut-on dire de  $\text{Tr}(A)$  ?
- b) Montrer que, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ ,
- $$A^k B - B A^k = k A^k.$$
- c) Justifier que, pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,
- $$P(A)B - B P(A) = A P'(A).$$
- d) En déduire que  $\mu_A = X^d$ . Que peut-on dire de  $A$  ?
- e) Donner un exemple de deux matrices non nulles  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  vérifiant  $AB - BA = A$ .

**Solution (Ex.144 – Polynôme minimal et crochets de Lie)**

**1. Polynôme minimal**

- a) La famille  $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$  est liée car elle compte  $n^2 + 1$  vecteurs d'un espace vectoriel de dimension  $n^2$ .
- b) Par conséquent, il existe  $n^2 + 1$  coefficients  $(a_k)_{0 \leq a_k \leq n^2}$  non tous nuls tels que  $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0$ . Avec  $P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ , on a  $P(A) = 0$ .
- c)  $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{K}[X]/P(A) \text{ et } \deg(P) = n\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , donc elle admet un plus petit élément  $d \stackrel{df.}{=} \min(\mathcal{D})$ .  
Il existe donc (au moins) un polynôme  $\Pi$  de degré  $d$  tel que  $\Pi(A) = 0$ .  
Soit  $a_d$  le coefficient dominant de  $\Pi$ . Alors  $\mu_A \stackrel{df.}{=} \frac{1}{a_d} \Pi$  convient.
- d) Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  annulateur de  $A$ . Effectuons la division euclidienne de  $P$  par  $\mu_A$  :  $P = Q\mu_A + R$  avec  $\deg(R) < d$ .  
Alors  $R(A) = P(A) - Q(A)\mu_A(A) = 0$ . Donc  $R$  est un polynôme annulateur de  $A$  de degré strictement inférieur à  $d$ . Par définition de  $d$ ,  $R = 0$ .  
Donc il existe bien  $Q$  dans  $\mathbb{K}[X]$  tel que  $P = Q\mu_A$ .
- e) Réciproquement, si  $P = Q\mu_A$ , alors  $P(A) = 0$ .  
On en déduit bien que :  $\mathcal{Z}(A) = \{Q\mu_A, Q \in \mathbb{K}[X]\}$ .

2. *Un polynôme divisible par son dérivé*

Soit  $P$  un polynôme non nul de  $\mathbb{K}[X]$  tel qu'il existe  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$  vérifiant :

$$XP' = \alpha P.$$

- a) Soit  $d$  le degré de  $P$ . Le coefficient dominant de  $XP'$  est  $d$  et celui de  $\alpha P$  est  $\alpha$  donc  $\alpha = d = \deg(P)$ .
- b) On suppose que  $P'$  possède une racine  $\beta$  non nulle d'ordre de multiplicité  $\mu$ .
- i – L'ordre de multiplicité de la racine  $\beta$  de  $XP'$  est encore  $\mu$  ( $\beta$  n'étant pas racine de  $X$ ).
  - ii –  $P(\beta) = \beta P'(\beta) = 0$  :  $\beta$  est racine de  $P$ . L'ordre de multiplicité de la racine  $\beta$  de  $P$  est :
    - $\mu + 1$  par la propriété liant multiplicité et dérivation,
    - $\mu$  par l'égalité  $P = XP'$  ...
 d'où PROBLÈME!!!  
 Donc  $P'$  ne possède pas de racine non nulle.
  - iii – L'unique racine de  $P'$  est 0, et de multiplicité  $d - 1 = \alpha - 1$ . Donc  $P' = \alpha X^{\alpha-1}$ . Donc  $P = X^\alpha + c$ . Or  $P(0) = 0P'(0) = 0$ . Donc  $c = 0$  et  $P = X^\alpha$ .

3. *Application à une équation matricielle*

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifiant :

$$AB - BA = A.$$

- a)  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0$ .
- b) La propriété est vraie au rang  $k = 0$  (et  $k = 1$ ).  
 Supposons-la vraie à un rang  $k$  quelconque. Alors :  
 $A^{k+1}B - BA^{k+1} = AA^k B - ABA^k + ABA^k - BAA^k = A(A^k B - BA^k) + (AB - BA)A^k = A^k A^k + AA^k = (k+1)A^{k+1}$ .  
 Par récurrence, la propriété est vraie pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ .
- c) Soit  $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ .  

$$P(A)B - BP(A) = \sum_{k \geq 0} a_k A^k B - B \sum_{k \geq 0} a_k A^k = \sum_{k \geq 0} a_k (A^k B - BA^k) = \sum_{k \geq 0} k a_k A^k = A \sum_{k \geq 1} k a_k A^{k-1} = AP'(A).$$
- d) Appliquons c) à  $\mu_A : 0 = A\mu'_A(A)$ . Donc  $X\mu'_A \in \mathcal{Z}(A)$ . Donc :  $\exists Q \in \mathbb{K}[X], X\mu'_A = Q\mu_A$ . En raison des degrés,  $Q$  est un polynôme constant, disons  $Q = \alpha$ .  
 Alors  $X\mu'_A = \alpha\mu_A$  avec  $\mu_A$  non nul et unitaire. Par 2.,  $\mu_A = X^d$ .

Ainsi A est nilpotente (d'ordre de nilpotence  $d$ ).

e) Partons de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , nilpotente et de trace nulle et  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

$$AB - BA = A \iff \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} d-a = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ convient.}$$

### Exercice 145

*Polynôme annulateur scindé à racines simples*

Dans cet exercice, on démontre dans le cas de deux racines un résultat valable en toute généralité<sup>1</sup> :

*Si l'endomorphisme  $f$  admet un polynôme annulateur non nul scindé à racines simples, alors  $f$  est diagonalisable.*

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

On suppose que  $f$  admet un polynôme annulateur  $P$  s'écrivant

$$P = (X - \lambda)(X - \mu) \text{ avec } \lambda \neq \mu.$$

1. Histoire de se familiariser avec les polynômes d'endomorphismes, justifier que

$$(f - \lambda \text{id}_E) \circ (f - \mu \text{id}_E) = (f - \mu \text{id}_E) \circ (f - \lambda \text{id}_E) = 0.$$

2. Montrer que  $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \cap \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E) = \{0\}$ .

3. a) Vérifier que, pour tout  $x$  de  $E$ ,

$$x = \frac{1}{\mu - \lambda} ((f - \lambda \text{id}_E)(x) - (f - \mu \text{id}_E)(x))$$

- b) En déduire que

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E) = E.$$

- c) Conclure.

4. Démontrer rapidement que toute projection et toute symétrie de  $E$  est diagonalisable.

**Solution** (Ex.145 – *Polynôme annulateur scindé à racines simples*)

1. ... et au programme en filières MP et PSI.

1.  $(f - \lambda id_E) \circ (f - \mu id_E) = f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda \mu id_E = P(f) = 0$ , et de même  $(f - \mu id_E) \circ (f - \lambda id_E) = f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda \mu id_E = P(f) = 0$ .

*Tout repose sur le fait que les puissances de  $f$  commutent entre elles...*

2. •  $0 \in \text{Ker}(f - \lambda id_E) \cap \text{Ker}(f - \mu id_E)$  puisque  $\text{Ker}(f - \lambda id_E) \cap \text{Ker}(f - \mu id_E)$  est un sous-espace vectoriel.  
 • Si  $u \in \text{Ker}(f - \lambda id_E) \cap \text{Ker}(f - \mu id_E)$  alors  $f(u) = \lambda u$  et  $f(u) = \mu u$  donc  $(\lambda - \mu)u = 0$ , et comme  $\lambda \neq \mu$ ,  $u = 0$ .  
 • Ainsi  $\text{Ker}(f - \lambda id_E) \cap \text{Ker}(f - \mu id_E) = \{0\}$ .

3. a) Le calcul du second membre donne directement, pour tout  $x$  de  $E$ ,

$$x = \frac{1}{\mu - \lambda} ((f - \lambda id_E)(x) - (f - \mu id_E)(x))$$

- b) Soit  $x \in E$ . Posons

$$y = \frac{1}{\mu - \lambda} (f - \lambda id_E)(x) \text{ et } z = \frac{-1}{\mu - \lambda} (f - \mu id_E)(x).$$

D'après la première question,  $(f - \mu id_E)(y) = 0$  donc  $y \in \text{Ker}(f - \mu)$  et de même  $(f - \lambda id_E)(z) = 0$  donc  $z \in \text{Ker}(f - \lambda)$ .

Ainsi  $x \in \text{Ker}(f - \lambda id_E) + \text{Ker}(f - \mu id_E)$ .

Donc  $E = \text{Ker}(f - \lambda id_E) + \text{Ker}(f - \mu id_E)$ .

Et comme ces deux sous-espaces sont en somme directe, ils sont supplémentaires :

$$\text{Ker}(f - \lambda id_E) \oplus \text{Ker}(f - \mu id_E) = E.$$

- c) • Si  $\lambda \notin \text{Sp}(f)$  alors  $\text{Ker}(f - \lambda id_E) = \{0\}$  donc  $\text{Ker}(f - \mu id_E) = E$ , autrement dit  $f = \mu id_E$  et  $f$  est diagonalisable.  
 • De même si  $\mu \notin \text{Sp}(f)$ ,  $f = \lambda id_E$  et  $f$  est diagonalisable.  
 • Enfin, si  $\{\lambda, \mu\} \subset \text{Sp}(f)$ , alors  $E_\lambda \oplus E_\mu = E$  donc  $f$  est diagonalisable.
4. • Si  $p$  est une projection,  $p^2 = p$  et  $X^2 - X = (X - 0)(X - 1)$  est un polynôme annulateur de  $p$ . Par ce qui précède,  $p$  est diagonalisable.  
 • Si  $s$  est une projection,  $s^2 = id_E$  et  $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$  est un polynôme annulateur de  $s$ . Par ce qui précède,  $s$  est diagonalisable.

# Chapitre 45

## Normes matricielles et quotient de RAYLEIGH

☞[CCP-M1 – 2014 – PC – Partie II]☞[E3A-MA – 2013 – MP – Partie II]  
☞[CCP-M1 – 2002 – PC – ]

### Définition – Norme vectorielle (cours)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ –espace vectoriel. On dit que  $\|\cdot\|$  est une norme (vectorielle) sur  $E$  si

- |  |                        |
|--|------------------------|
| (i) $\forall u \in E, \quad \ u\  \geq 0$  | positivité             |
| (ii) $\forall u \in E, \quad \ u\  = 0 \implies u = 0$   | séparation             |
| (iii) $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \ \lambda u\  =  \lambda  \ u\ $ | homogénéité            |
| (iv) $\forall (u, v) \in E^2, \quad \ u + v\  \leq \ u\  + \ v\ $                              | inégalité triangulaire |

### Notations pour toute cette partie

- $n$  désigne un entier naturel non nul.
- $E$  désigne  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , espace des colonnes.
- Pour toute colonne  $U, V, \dots$  de  $E$ , on note  $u_i, v_i, \dots$  la  $i$ –ème composante de  $U, V, \dots$
- $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $E$ , les colonnes  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  étant caractérisées par

$$e_{i,j} = \delta_{i,j} \quad (\delta : \text{symbole de Kronecker})$$

- Lorsqu'un indice  $i$  apparaît seul sous un symbole de sommation ou de maximum, il s'agit de le faire varier de 1 à  $n$  :

$$\sum_i \text{truc}_i = \sum_{i=1}^n \text{truc}_i \text{ et } \max_i \{\text{truc}_i\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{\text{truc}_i\}$$

• Le produit scalaire canonique de deux colonnes  $U$  et  $V$  de  $E$  sera noté  $\langle U, V \rangle$  ou plus directement  ${}^tUV$ . On s'affranchit d'écrire  $\text{Tr}({}^tUV)$  car on assimile  $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$  à  $\mathbb{K}$ .

**Exercice 146**

*Normes usuelles sur  $E$*

Rappeler les définitions des normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  définies sur  $E$ .

**Solution** (**Ex.146** – *Normes usuelles sur  $E$* )

$$\|U\|_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_i |u_i|, \|U\|_2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{\sum_i |u_i|^2} \text{ et } \|U\|_\infty \stackrel{\text{déf.}}{=} \max_i |u_i|.$$

**Définition – Norme matricielle**

Dans le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , il existe deux lois internes

$$+ : (A, B) \mapsto A + B \text{ et } \times : (A, B) \mapsto A \times B = AB.$$

L'inégalité triangulaire impose une condition sur  $\|A + B\|$ . Lorsqu'on veut travailler avec une norme sur les matrices carrées, il peut être pratique d'imposer aussi une condition sur le produit matriciel : la sous-multiplicativité.

Une norme vérifiant cette propriété est qualifiée de norme matricielle et on la notera avec des triples barres  $||| \cdot |||$ .

Une application  $||| \cdot ||| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une **norme matricielle** si elle vérifie

- (i)  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad |||A||| \geq 0$  positivité
- (ii)  $\forall A \in E, \quad |||A||| = 0 \implies A = 0$  séparation
- (iii)  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad |||\lambda A||| = |\lambda| |||A|||$  homogénéité
- (iv)  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad |||A + B||| \leq |||A||| + |||B|||$  inégalité triangulaire
- (v)  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad |||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$  sous-multiplicativité

**Exercice 147**

*Norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle*

Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$ . Soit

$$\mathcal{S} = \{V \in E, \|V\| = 1\} \text{ la sphère unité.}$$

On pose, pour toute  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$\| \|A\| \| \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \sup_{V \in \mathcal{S}} \|AV\|.$$

On dit que  $\| \|.\| \|$  est la **norme matricielle subordonn\u00e9e** \u00e0 la norme vectorielle  $E$ .

Notez que :

- $\|.\|$  est une norme vectorielle sur  $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  ;
- $\| \|.\| \|$  est une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
  - a) Justifier que la borne sup\u00e9rieure d\u00e9finissant  $\| \|.\| \|$  existe.
  - b) Justifier qu'il existe au moins un vecteur  $V \in \mathcal{S}$  tel que  $\| \|A\| \| = \|AV\|$ .
2. Que vaut  $\| \|I_n\| \|$  ?
3. a) Montrer que :  $\forall V \in E, \|AV\| \leq \| \|A\| \| \cdot \|V\|$ .  
 b) Montrer que :  $\| \|A\| \| = \sup_{V \in E, V \neq 0} \frac{\|AV\|}{\|V\|}$ .
4. Montrer que  $\| \|.\| \|$  est une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
5. Cas des normes subordonn\u00e9es \u00e0  $\|.\|_1$  et  $\|.\|_\infty$

a) Montrer que :

$$\| \|A\| \|_1 \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \sup_{V \in E, \|V\|_1=1} \|AV\|_1 = \max_j \left\{ \sum_i |a_{i,j}| \right\}$$

b) Montrer que :

$$\| \|A\| \|_\infty \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \sup_{V \in E, \|V\|_\infty=1} \|AV\|_\infty = \max_i \left\{ \sum_j |a_{i,j}| \right\}$$

**Solution (Ex.147 – Norme matricielle subordonn\u00e9e \u00e0 une norme vectorielle)**

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
  - a)  $\mathcal{S} = \{V \in E, \|V\| = 1\}$  est une partie ferm\u00e9e car  $\|.\|$  est continue et born\u00e9e (par 1!).  
 $f_A : V \mapsto \|AV\|$  est continue sur  $E$  par continuit\u00e9 du produit et de la norme.  
 Par un th\u00e9or\u00e8me du cours,  $f_A$  est continue sur une partie ferm\u00e9e et born\u00e9e de  $E$  donc est born\u00e9e et atteint ses bornes. Donc  $\sup_{V \in \mathcal{S}} \|AV\|$  existe.
  - b) Comme  $f_A$  atteint ses bornes :  $\exists V \in \mathcal{S}, \|AV\| = \sup_{U \in \mathcal{S}} \|AU\| = \| \|A\| \|$ .
2.  $\| \|I_n\| \| = \sup_{V \in E, \|V\|=1} \|I_n V\| = \sup_{V \in E, \|V\|=1} \|V\| = 1$ .

3. a) • Si  $V$  est unitaire :  $\|AV\| \leq \sup_{V \in \mathcal{S}} \|AV\| \leq \|A\| \leq \|A\| \cdot \|V\|$ .  
 • Si  $V = 0$ , alors  $0 = \|AV\|$  et  $\|A\| \|V\| = 0$  donc l'inégalité est vérifiée.  
 • Si  $V$  n'est ni nul, ni unitaire, je pose  $V' = \frac{1}{\|V\|} V$ .

$V'$  est unitaire donc  $\|AV'\| \leq \|A\| \cdot \|V'\|$ , donc  $\frac{\|AV\|}{\|V\|} \leq \|A\| \frac{\|V\|}{\|V\|}$ ,  
 d'où :

$$\|AV\| \leq \|A\| \cdot \|V\|.$$

- b) • La question précédente entraîne :  $\|A\| \geq \sup_{V \neq 0} \frac{\|AV\|}{\|V\|}$ .

- De plus :  $\sup_{V \neq 0} \frac{\|AV\|}{\|V\|} \geq \sup_{\|V\|=1} \frac{\|AV\|}{\|V\|}$  (borne supérieure prise sur un ensemble plus grand). Donc  $\sup_{V \neq 0} \frac{\|AV\|}{\|V\|} \geq \|A\|$ .

Finalement :  $\|A\| = \sup_{V \in E, V \neq 0} \frac{\|AV\|}{\|V\|}$ .

4. •  $\|\cdot\|$  est positive.  
 •  $\|A\| = 0 \implies \forall V \in E, \|AV\| = 0$  car  $\|AV\| \leq \|A\| \|V\|$ . Donc  $\text{Ker}(A) = E$ , d'où  $\text{rg}(A) = 0$  et  $A = 0$ .  
 •  $\|\lambda A\| = \sup_{V \in \mathcal{S}} \|\lambda AV\| = \sup_{V \in \mathcal{S}} (|\lambda| \|AV\|) = |\lambda| \sup_{V \in \mathcal{S}} \|AV\| = |\lambda| \|A\|$   
 •  $\|A + B\| = \sup_{V \in \mathcal{S}} \|(A + B)V\| = \sup_{V \in \mathcal{S}} \|AV + BV\|$ , or  $\|AV + BV\| \leq \|AV\| + \|BV\|$ , donc  $\sup_{V \in \mathcal{S}} \|AV + BV\| \leq \sup_{V \in \mathcal{S}} \|AV\| + \sup_{V \in \mathcal{S}} \|BV\| \leq \|A\| + \|B\|$ .  
 •  $\|AB\| = \sup_{V \in \mathcal{S}} \|ABV\| \leq \|A\| \sup_{V \in \mathcal{S}} \|BV\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \sup_{V \in \mathcal{S}} \|V\|$  or  $\sup_{V \in \mathcal{S}} \|V\| = 1$  par définition de  $\mathcal{S}$ .

5. Cas des normes subordonnées à  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$

- a) • Soit  $V \in \mathcal{S}_1$ , i.e.  $\sum_j |v_j| = 1$ .

$$\begin{aligned} \|AV\|_1 &= \sum_i \left| \sum_j a_{i,j} v_j \right| \leq \sum_i \sum_j |a_{i,j}| |v_j| \leq \sum_j \left( |v_j| \sum_i |a_{i,j}| \right) \\ &\leq \sum_j \left( |v_j| \max_k \left\{ \sum_i |a_{i,k}| \right\} \right) \leq \max_k \left\{ \sum_i |a_{i,k}| \right\} \sum_j |v_j| \\ &\leq \max_k \left\{ \sum_i |a_{i,k}| \right\} \text{ car } \|V\|_1 = 1. \end{aligned}$$

• Pour montrer l'égalité, on crée un vecteur  $V$  de  $\mathcal{S}_1$  tel qu'il y ait égalité, *i.e.* tel que  $\|AV\|_1 = \max_j \left\{ \sum_i |a_{i,j}| \right\}$ .

Soit  $j_0$  un indice tel que  $\sum_i |a_{i,j_0}| = \max_j \left\{ \sum_i |a_{i,j}| \right\}$ .

Soit  $V$  défini par  $v_{j_0} = 1$  et  $\forall j \neq j_0, v_j = 0$ .

On a bien  $\|V\|_1 = 1$  et

$$\|AV\|_1 = \sum_i \left| \sum_j a_{i,j} v_j \right| = \sum_i |a_{i,j_0}| = \max_j \left\{ \sum_i |a_{i,j}| \right\}.$$

b) • Soit  $V \in \mathcal{S}_\infty$ , *i.e.*  $\max_j |v_j| = 1$ .

$$\|AV\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{i,j} v_j \right| \leq \max_i \left( \sum_j |a_{i,j}| |v_j| \right) \leq \max_i \left( \sum_j |a_{i,j}| \right)$$

• Pour montrer l'égalité, on crée un vecteur  $V$  de  $\mathcal{S}_\infty$  tel qu'il y ait égalité, *i.e.* tel que  $\|AV\|_\infty = \max_i \left\{ \sum_j |a_{i,j}| \right\}$ . Si  $A$  est la matrice nulle, tout vecteur de  $\mathcal{S}_\infty$  convient. Supposons maintenant  $A \neq 0$ .

Soit  $i_0$  un indice tel que  $\sum_j |a_{i_0,j}| = \max_i \left\{ \sum_j |a_{i,j}| \right\} (> 0)$ .

Soit  $V$  défini par  $v_j = \begin{cases} \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} & \text{si } a_{i_0,j} \neq 0 \\ 0 & \text{si } a_{i_0,j} = 0 \end{cases}$  de sorte que, pour tout

$j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $a_{i_0,j} v_j = |a_{i_0,j}|$ .

On a bien  $\|V\|_\infty = 1$  (car l'un au moins des  $v_j$  vaut  $\pm 1$ ) et

$$\|AV\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{i,j} v_j \right| \geq \left| \sum_j a_{i_0,j} v_j \right| = \sum_j |a_{i_0,j}| = \max_i \left\{ \sum_j |a_{i,j}| \right\}.$$

### Exercice 148

*Normes subordonnées et inversibilité*

On suppose que  $\|\cdot\|$  est une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , subordonnée à une norme vectorielle  $\|\cdot\|$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $\|A\| < 1$

1. Montrer que  $I + A$  est inversible. On pourra montrer par l'absurde que  $(I + A)U = 0$  entraîne  $U = 0$ .
2. Justifier que  $|||(I + A)^{-1}||| \leq \frac{1}{1 - |||A|||}$ . On pourra commencer par calculer  $(I - A(I + A)^{-1})(I + A)$ .

**Solution (Ex.148 – Normes subordonnées et inversibilité)**

1. Soit  $U \in E$  tel que  $(I + A)U = 0$ . Alors  $\|U\| = \|-AU\| = \|AU\|$ .  
Supposons  $\|U\| \neq 0$ . Alors :  

$$\|U\| = \|AU\| \leq \|A\| \|U\| < \|U\|$$
ce qui est absurde. Ainsi  $(I + A)U = 0 \implies U = 0$ .  
Donc  $\text{Ker}(I + A) = \{0\}$ , i.e.  $\text{rg}(I + A) = n$ , donc  $(I + A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ .
2. On a :  $(I - A(I + A)^{-1})(I + A) = I$ , d'où  $(I + A)^{-1} = I - A(I + A)^{-1}$ .  
Par l'inégalité triangulaire :  $|||(I + A)^{-1}||| \leq |||I||| + |||A(I + A)^{-1}|||$ .  
Et comme  $|||\cdot|||$  est une norme matricielle subordonnée  

$$|||I||| = 1 \text{ et } |||A(I + A)^{-1}||| \leq \|A\| |||(I + A)^{-1}|||.$$
D'où  $|||(I + A)^{-1}||| \leq 1 + \|A\| |||(I + A)^{-1}|||$ , donc  

$$|||(I + A)^{-1}||| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

**Définition – Rayon spectral d'une matrice**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $\rho(A)$  le rayon spectral de  $A$ , défini par

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A) \}.$$

**Remarque importante :** même si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , son rayon spectral  $\rho(A)$  est égal au plus grand module de ses valeurs propres complexes. Notons que comme  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  n'est jamais vide et compte aux plus  $n$  valeurs distinctes,  $\rho(A)$  est parfaitement défini.

**Définition – Quotient de Rayleigh**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On appelle quotient de Rayleigh l'application  $R_A$  définie par

$$R_A : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, V \mapsto \frac{\langle AV, V \rangle}{\langle V, V \rangle} = \frac{{}^tV {}^tAV}{{}^tVV}$$

**Exercice 149**  
*Quotient de Rayleigh*

Dans tout l'exercice, on suppose que  $A$  est une matrice symétrique réelle :  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

- Justifier qu'il existe une matrice orthogonale  $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  telles que  ${}^tQAQ = D$ .

On note  $U_i$  les colonnes de  $Q$  de sorte que  $Q = (U_1 : U_2 : \dots : U_n)$ .

On pose  $F_0 = \{0_E\}$  et, pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $F_k = \text{Vect}(U_1, \dots, U_k)$ .

- Montrer que :  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $R_A(U_k) = \lambda_k$ .
- Soit  $V \in E$ . On note  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$  les coordonnées de  $V$  dans  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  et on pose  $W = {}^tQV$ .
  - Justifier que :  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $w_i = \alpha_i$ .
  - Montrer que :  $R_A(V) = R_D(W)$ .
  - Montrer que :  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\lambda_k = \max_{V \in F_k} R_A(V)$ .
  - Montrer que :  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\lambda_k = \min_{V \in F_{k-1}^\perp} R_A(V)$ .
- Justifier que :  $\forall V \in E \setminus \{0\}$ ,  $\lambda_1 \leq R_A(V) \leq \lambda_n$ .
- On suppose de plus que les valeurs propres de  $A$  sont toutes positives. Justifier que :  $\max_{V \neq 0} R_A(V) = \rho(A)$ .

**Solution (Ex.149 – Quotient de Rayleigh)**

- Puisque  $A$  est symétrique réelle, le théorème spectral assure qu'il existe une matrice orthogonale  $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  telles que  ${}^tQAQ = D$ .

Au passage, les colonnes  $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $Q$  forment une base orthonormale de  $E$  formée de vecteurs propres de  $A$ .

- Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .  ${}^tU_kAU_k = {}^tU_k\lambda_kU_k = \lambda_k {}^tU_kU_k$ , donc  $R_A(U_k) = \lambda_k$ .
- Soit  $V \in E$ . On note  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$  les coordonnées de  $V$  dans  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  et on pose  $W = {}^tQV$ .
  - $V = \sum_i \alpha_i U_i$ , or  ${}^tQU_i = E_i$  ( $i$ -ème vecteur de la base canonique), donc  $W = {}^tQV = \sum_i \alpha_i E_i$ , autrement dit  $w_i = \alpha_i$ .
  - $R_A(V) = \frac{{}^tVAV}{{}^tVV} = \frac{{}^tVQD{}^tQV}{{}^tVQ{}^tQV} = \frac{{}^tWDW}{{}^tWW} = R_D(W)$ .
  - Comme  $V \in F_k$ ,  $V = \sum_{i=1}^k \alpha_i U_i$ , autrement dit, pour  $i > k$ ,  $w_i = \alpha_i = 0$ .

$$\bullet R_D(W) = \frac{{}^t\text{WDW}}{{}^t\text{WW}} = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} \leq \frac{\lambda_k \sum_{i=1}^k \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} \leq \lambda_k,$$

d'où  $\max_{V \in F_k} R_A(V) \leq \lambda_k$ .

$$\bullet U_k \in F_k \text{ et } R_A(U_k) = \lambda_k \text{ donc } \max_{V \in F_k} R_A(V) \geq \lambda_k.$$

Ainsi

$$\lambda_k = \max_{V \in F_k} R_A(V).$$

d) Le raisonnement est analogue car  $V \in F_{k-1}^\perp$  signifie que  $V = \sum_{i=k}^n \alpha_i U_i$ , autrement dit  $w_i = \alpha_i = 0$  pour  $i < k$ .

$$\bullet R_D(W) = \frac{{}^t\text{WDW}}{{}^t\text{WW}} = \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} \geq \frac{\lambda_k \sum_{i=k}^n \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} \geq \lambda_k,$$

d'où  $\min_{V \in F_{k-1}^\perp} R_A(V) \geq \lambda_k$ .

$$\bullet U_k \in F_{k-1}^\perp \text{ et } R_A(U_k) = \lambda_k \text{ donc } \min_{V \in F_{k-1}^\perp} R_A(V) \leq \lambda_k.$$

Ainsi

$$\lambda_k = \min_{V \in F_{k-1}^\perp} R_A(V).$$

4. Soit  $V \in E \setminus \{0\}$ .

$$\bullet \text{ Comme } F_0 = \{0\}, F_0^\perp = E \text{ donc } V \in F_0^\perp \text{ et } R_A(V) \geq \min_{V \in F_0^\perp} R_A(V), \text{ i.e.}$$

$$R_A(V) \geq \lambda_1.$$

$$\bullet \text{ Comme } F_n = E, V \in F_n \text{ et } R_A(V) \leq \max_{V \in F_n} R_A(V), \text{ i.e. } R_A(V) \leq \lambda_n.$$

$$\text{Ainsi } \lambda_1 \leq R_A(V) \leq \lambda_n.$$

5. On suppose de plus que les valeurs propres de  $A$  sont toutes positives. On savait déjà que toutes les valeurs propres de  $A$  sont réelles (théorème spectral). Donc  $\rho(A) = \lambda_n$ . Donc  $\max_{V \neq 0} R_A(V) \leq \rho(A)$ .

Et comme  $R_A(U_n) = \lambda_n$ , il y a en fait égalité.

**Exercice 150**

*Norme subordonnée à la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$*

On rappelle que la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  sur  $E$  est définie par  $\|U\|_2 = \sqrt{{}^tUU}$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  quelconque.

1. Justifier que  ${}^tAA$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que ses valeurs propres sont toutes positives.
2. Montrer que

$$\|A\|_2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{V \in E, \|V\|_2=1} \|AV\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}.$$

3. Montrer que  $\rho({}^tAA) = \rho(A{}^tA)$  et en déduire  $\|{}^tA\|_2 = \|A\|_2$ .

**Solution (Ex.150 – Norme subordonnée à la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$ )**

1.  ${}^t({}^tAA) = {}^tAA$  donc  ${}^tAA$  est symétrique réelle donc diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  d'après le théorème spectral.

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $U$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ .

$$0 \leq \|AU\|^2 = {}^tU{}^tAAU = {}^tU\lambda U = \lambda \|U\|^2, \text{ avec } \|U\| > 0 \text{ car } U \neq 0.$$

Donc  $\lambda \geq 0$ , et du coup  $\text{Sp}(A) \subset [0; +\infty[$ .

2.  $\|A\|_2 = \sup_{V \in E, \|V\|_2=1} \|AV\|_2 = \sup_{V \neq 0} \frac{\|AV\|_2}{\|V\|_2}$   
 $= \sup_{V \neq 0} \sqrt{\frac{{}^tV{}^tAAV}{{}^tVV}} = \sup_{V \neq 0} \sqrt{R_{{}^tAA}(V)} = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

d'après l'exercice précédent, puisque  ${}^tAA$  est symétrique réelle à valeurs propres positives.

3. • Supposons  $\rho({}^tAA) > 0$ . Soit  $U \neq 0$  tel que  ${}^tAAU = \rho({}^tAA)U$ . Alors  $AU \neq 0$  et  $A{}^tA(AU) = \rho({}^tAA)(AU)$ , donc  $\rho({}^tAA)$  est une valeur propre de  $A{}^tA$ , donc  $\rho(A{}^tA) \geq \rho({}^tAA)$ .

Et on démontre alors de même que  $\rho({}^tAA) \geq \rho(A{}^tA)$ , d'où finalement  $\rho(A{}^tA) = \rho({}^tAA)$ .

- Supposons  $\rho({}^tAA) = 0$ . Si  $\rho(A{}^tA) > 0$ , le raisonnement précédent donne  $\rho({}^tAA) \geq \rho(A{}^tA) > 0$ , ce qui est absurde. Donc  $\rho(A{}^tA) = 0 = \rho({}^tAA)$ .
- On a alors par 2.  $\|{}^tA\|_2 = \sqrt{\rho(A{}^tA)} = \sqrt{\rho({}^tAA)} = \|A\|_2$ .

**Exercice 151**

*Et la norme euclidienne canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?*

1. Cours – Justifier que

$$(\cdot | \cdot) : (A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$$

est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On notera  $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$  la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

2. Montrer que  $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$  est une norme matricielle, *i.e.* qu'elle vérifie la sous-additivité.
3. Justifier que  $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$  n'est subordonnée à aucune norme vectorielle de E. On pourra s'intéresser à la matrice identité.
4. Justifier que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\|_2 \leq \|A\|_{\mathbb{E}} \leq \sqrt{n} \|A\|_2$$

et donner, pour chaque inégalité, un exemple de matrice A réalisant l'égalité.

**Solution (Ex.151 – Et la norme euclidienne canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?)**

1. À savoir faire –

En particulier, savoir montrer que

$$(A | B) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j} \quad \text{et} \quad \|A\|_{\mathbb{E}}^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2.$$

2. Il s'agit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left( \sum_k u_k v_k \right)^2 \leq \left( \sum_k u_k^2 \right) \left( \sum_k v_k^2 \right).$$

$$\|AB\|_{\mathbb{E}}^2 = \sum_{i,j} \left( \sum_k a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \leq \sum_{i,j} \left\{ \left( \sum_k a_{i,k}^2 \right) \left( \sum_k b_{k,j}^2 \right) \right\}$$

En factorisant à chaque fois qu'un facteur ne dépend pas de l'indice de sommation :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \left\{ \left( \sum_k a_{i,k}^2 \right) \left( \sum_k b_{k,j}^2 \right) \right\} &= \sum_i \left[ \sum_j \left\{ \left( \sum_k a_{i,k}^2 \right) \left( \sum_k b_{k,j}^2 \right) \right\} \right] \\ &= \sum_i \left[ \left( \sum_k a_{i,k}^2 \right) \sum_j \left\{ \sum_k b_{k,j}^2 \right\} \right] \\ &= \sum_i \left[ \left( \sum_k a_{i,k}^2 \right) \sum_{j,\ell} b_{\ell,j}^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{j,\ell} b_{\ell,j}^2 \right) \sum_i \left[ \sum_k a_{i,k}^2 \right] \\
&= \left( \sum_{j,\ell} b_{\ell,j}^2 \right) \sum_{i,k} a_{i,k}^2
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\| \|AB\| \|_E^2 \leq \left( \sum_{i,k} a_{i,k}^2 \right) \left( \sum_{j,\ell} b_{\ell,j}^2 \right) = \| \|A\| \|_E^2 \| \|B\| \|_E^2$$

3.  $\| \|I_n\| \|_E = \sqrt{n}$ , or pour une norme subordonnée,  $\| \|I_n\| \| = 1$ , donc  $\| \| \cdot \| \|_E$  n'est subordonnée à aucune norme vectorielle de E.
4. • On s'appuie toujours sur l'exercice précédent. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
Soit  $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  les valeurs propres de  ${}^tAA$ .  
On a :  $\lambda_n \leq \sum_i \lambda_i \leq n\lambda_n$ , donc  $\rho({}^tAA) \leq \text{Tr}({}^tAA) \leq n\rho({}^tAA)$ , donc

$$\| \|A\| \|_2 \leq \| \|A\| \|_E \leq \sqrt{n} \| \|A\| \|_2$$

- Pour  $A = E_{1,1}$ ,  ${}^tE_{1,1}E_{1,1} = E_{1,1}$ , donc  $\| \|E_{1,1}\| \|_2 = 1$  et  $\| \|E_{1,1}\| \|_E = 1$  donc la première inégalité est une égalité.
- Pour  $A = I_n$ ,  ${}^tAA = I_n$ , donc  $\| \|I_n\| \|_2 = 1$  et  $\| \|I_n\| \|_E = \sqrt{n}$  donc la seconde inégalité est une égalité.

### Exercice 152

*Norme matricielle et rayon spectral*

1. Soit  $\| \| \cdot \| \|$  une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $\text{Sp}(A)$  l'ensemble des valeurs propres de A.  
Montrer que :  $\lambda \in \text{Sp}(A) \implies |\lambda| \leq \| \|A\| \|$ .

On pourra prendre un vecteur propre U associé à la valeur propre  $\lambda$ ,  $V =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et s'intéresser à la matrice } UV^T.$$

2. Application – Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $I + A$  ne soit pas inversible.  
Montrer que  $\| \|A\| \| \geq 1$ .

**Solution** (Ex.152 – Norme matricielle et rayon spectral)

1. Soit  $U \neq 0$  tel que  $AU = \lambda U$ . Soit  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Alors :

$$|\lambda| \cdot |||UV^T||| = |||\lambda UV^T||| = |||AUV^T||| \leq |||A||| \cdot |||UV^T|||$$

Or  $UV^T = (u_i)_{1 \leq i, j \leq n}$  (et il ne manque pas d'indice... à méditer) n'est pas la matrice nulle donc on peut diviser par  $|||UV^T|||$ , donc  $|\lambda| \leq |||A|||$ .

2.  $I+A$  n'est pas inversible, donc  $-1$  est une valeur propre de  $A$ . Donc  $|||A||| \geq 1$ .

**Exercice 153**

*Rayon spectral et limite de la suite des puissances*

Dans cet exercice, on établit précisément ce que l'intuition peut laisser deviner lorsqu'on a digéré la réduction des matrices carrées : si les valeurs propres de  $A$  sont toutes de module strictement plus petit que 1, alors  $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ .

À l'issue de l'exercice, on obtient même une caractérisation, i.e. des propriétés équivalentes.

1. Lorsque  $A$  est diagonalisable.

a) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonalisable.

Montrer que, si  $\rho(A) < 1$ , alors  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$ .

b) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $\rho(A) \geq 1$ . Montrer que la suite  $(A^k)$  ne converge pas vers  $0_n$ .

La suite  $(A^k)$  diverge-t-elle nécessairement ?

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\varepsilon > 0$ . Dans cette question, on démontre qu'il existe au moins une norme matricielle subordonnée  $|||\cdot|||$  telle que

$$|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

a) Justifier l'existence d'une matrice  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  et d'une matrice  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire telle que  $P^{-1}AP = T$ . On notera

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & t_{1,3} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & t_{2,3} & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_{n-1} & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

b) Justifier qu'il existe un réel  $\delta > 0$  tel que

$$\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \quad \sum_{j=i+1}^n |\delta^{j-i} t_{i,j}| \leq \varepsilon.$$

c) On note D la matrice diagonale  $\text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1})$ .

Vérifier que

$$(PD)^{-1}APD = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta t_{1,2} & \delta^2 t_{1,3} & \dots & \delta^{n-1} t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \delta t_{2,3} & \dots & \delta^{n-2} t_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_{n-1} & \delta t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} T_\delta$$

d) Montrer que l'application

$$\|\cdot\| : V \mapsto \|(PD)^{-1}V\|_\infty$$

est une norme vectorielle sur E.

e) On note  $\|\cdot\|$  la norme matricielle subordonnée à  $\|\cdot\|$ .

On pourra utiliser (*cf.* exercice 2) que, pour la norme matricielle  $\|\cdot\|_\infty$  subordonnée à la norme vectorielle  $\|\cdot\|_\infty$ , on a

$$\forall B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}), \quad \|B\|_\infty = \max_i \left\{ \sum_j |b_{i,j}| \right\}$$

Montrer que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

3. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$$

$$(2) \quad \forall V \in E, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k V = 0_{n,1}$$

$$(3) \quad \rho(A) < 1$$

$$(4) \quad \|B\| < 1 \text{ pour au moins une norme matricielle subordonnée } \|\cdot\|$$

4. Soit  $|||\cdot|||$  une norme matricielle quelconque sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

a) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho(A^k)^{1/k} = \rho(A)$ .

b) On admet (vu dans un exercice précédent) que pour toute matrice carrée  $M$ ,  $\rho(M) \leq |||M|||$ .

Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho(A) \leq |||A^k|||^{1/k}$ .

c) Soit  $\varepsilon > 0$ . On pose  $A_\varepsilon = \frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$ . Justifier que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_\varepsilon^k = 0$ .

d) Montrer finalement que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |||A^k|||^{1/k} = \rho(A).$$

**Solution (Ex.153 – Rayon spectral et limite de la suite des puissances)**

1. a) Il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_i, 1 \leq i \leq n)$ . Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PD^kP^{-1}.$$

$$\text{Or } D^k = \text{diag}(\lambda_i^k, 1 \leq i \leq n) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0_n \text{ car } \forall i, |\lambda_i| \leq \rho(A) < 1.$$

Par continuité du produit matriciel,  $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0_n$ .

b) •  $\rho(A) \geq 1$  donc :  $\exists \lambda \in \text{Sp}(A)$  telle que  $|\lambda| \geq 1$ .

Soit  $U$  un vecteur propre associé à  $\lambda$  :  $U \neq 0$  et  $AU = \lambda U$ .

$\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $||A^k U|| = |\lambda|^k ||U|| \geq ||U|| > 0$ , donc  $A^k U$  ne tend pas vers 0.

Or si  $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0_n$ , alors  $A^k U \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Donc  $A^k$  ne tend pas vers  $0_n$ .

• Ceci n'entraîne pas que  $(A^k)$  diverge. Par exemple :  $\rho(I_n) = 1$  et  $(I_n^k)_k$  converge, vers  $I_n$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\varepsilon > 0$ . Dans cette question, on démontre qu'il existe au moins une norme matricielle subordonnée  $|||\cdot|||$  telle que

$$|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

a) Dans  $\mathbb{C}$ ,  $\chi_A$  est toujours scindé donc  $A$  est trigonalisable (c'est dans le cours).

b) Soit  $M = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ \sum_{j=i+1}^n |t_{i,j}| \right\}$ .

• Si  $M = 0$ , alors  $\delta = 1$  convient.

• Si  $M > 0$ , soit  $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{M})$ .

Alors pour tout  $i \in [[1; n-1]]$ , on a :  $\forall j \geq i+1, |\delta^{j-i}| \leq \delta$  donc

$$\sum_{j=i+1}^n |\delta^{j-i} t_{i,j}| \leq \delta \sum_{j=i+1}^n |t_{i,j}| \leq \delta M \leq \varepsilon.$$

c)  $(PD)^{-1}APD = P^{-1}D^{-1}APD$

D est la matrice diagonale  $diag(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1})$ ,

donc  $D^{-1} = diag(1, \delta^{-1}, \delta^{-2}, \dots, \delta^{-n+1})$ .

Or multiplier à gauche une matrice B par une matrice diagonale  $\Delta$  revient à multiplier chaque ligne de B par le coefficient diagonal correspondant de  $\Delta$ , et le produit à droite multiplie de façon analogue les colonnes de B. Ainsi :

$$(PD)^{-1}APD = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta t_{1,2} & \delta^2 t_{1,3} & \dots & \delta^{n-1} t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \delta t_{2,3} & \dots & \delta^{n-2} t_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_{n-1} & \delta t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

d) En s'appuyant sur le fait que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme, on montre que l'application  $\|\cdot\| : U \mapsto \|(PD)^{-1}V\|_\infty$  est une norme vectorielle sur E.

$$e) \| \|A\| \| = \sup_{V, \|V\|=1} \|AV\| = \sup_{V, \|(PD)^{-1}V\|_\infty=1} \|(PD)^{-1}AV\|_\infty$$

Posons  $U = (PD)^{-1}V$ ,

$$\| \|A\| \| = \sup_{U, \|U\|_\infty=1} \|(PD)^{-1}APDU\|_\infty = \sup_{U, \|U\|_\infty=1} \|T_\delta U\|_\infty = \| \|T_\delta\| \|_\infty.$$

Par la propriété de  $\|\cdot\|_\infty$  rappelée :

$$\| \|A\| \| = \| \|T_\delta\| \|_\infty = \max_i \left( \lambda_j + \sum_{j=i+1}^n \delta^{j-i} t_{i,j} \right) \leq \max_j |\lambda_j| + \varepsilon \text{ par choix}$$

de  $\delta$ .

Donc  $\| \|A\| \| \leq \rho(A) + \varepsilon$ .

3. Rappelons que la convergence ne dépend pas de la norme choisie car  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  sont de dimension finie.

(1)  $\implies$  (2) : soit  $\|\cdot\|$  une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle  $\|\cdot\|$ .

Pour tout V de E, on a  $\| \|A^k V\| \| \leq \| \|A^k\| \| \|V\|$ , d'où l'implication.

(2)  $\implies$  (3) : si  $\rho(A) \geq 1$ , alors d'après 1.b),  $(A^k)$  ne tend pas vers  $0_n$ . Par contrapositive, (2)  $\implies$  (3).

(3)  $\implies$  (4) : d'après le résultat de la question 2. avec  $\varepsilon = \frac{1 - \rho(A)}{2}$  par exemple.

(4)  $\implies$  (1) : appliquons la sous-multiplicativité pour la norme subordonnée de (4), on a :

$\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $|||B^k||| \leq |||B|||^k$ , or  $|||B||| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ . Donc  $|||B^k||| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$  par encadrement, et  $B^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ .

4. a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $A$  est trigonalisable et il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors

$$P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Par conséquent,  $\max_{\lambda \in \text{Sp}(A^k)} \{|\lambda|\} = \left( \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \{|\lambda|\} \right)^k$ .

Autrement dit :  $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$ .

b)  $\rho(A) = (\rho(A^k))^{1/k} \leq |||A^k|||^{1/k}$ .

- c) Comme  $A_\varepsilon U = \lambda U \iff AU = \lambda(\rho(A) + \varepsilon)U$ , on a :

$$\text{Sp}(A_\varepsilon) = \left\{ \frac{\lambda}{\rho(A) + \varepsilon}, \lambda \in \text{Sp}(A) \right\},$$

donc  $\rho(A_\varepsilon) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1$ .

Par la question 3., on en déduit :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_\varepsilon^k = 0$ .

- d) Par définition de la limite, il existe  $\ell_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\forall k \geq \ell_\varepsilon, \quad |||A_\varepsilon^k||| \leq 1, \text{ i.e. } |||A^k||| \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k$$

donc :  $\forall k \geq \ell_\varepsilon, \quad |||A^k|||^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$ .

Finalement, on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ell_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq \ell_\varepsilon, \quad \rho(A) \leq |||A^k|||^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Autrement dit :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |||A^k|||^{1/k} = \rho(A).$$

# Chapitre 46

## Hyperplans et formes linéaires

### Définition – Hyperplan en dimension quelconque

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle **forme linéaire**  $\varphi$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

On dit que  $H$  est un **hyperplan** de  $E$  s'il existe une forme linéaire  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$  non nulle telle que

$$H = \text{Ker}(\varphi).$$

### Exemples –

① Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ . Soit  $H = \{u \in E, u_0 = 0\}$ .

Alors  $H$  est un hyperplan de  $E$  car

$$H = \text{ker}(\varphi) \text{ où } \varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto u_0.$$

② Soit  $E = \mathbb{C}[X]$  et  $H = \{P \in E, 1 \text{ est racine de } P\}$ .

Alors  $H$  est un hyperplan de  $E$  car

$$H = \text{ker}(\varphi) \text{ où } \varphi : E \rightarrow \mathbb{C}, P \mapsto P(1).$$

③ Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et  $H = \{(x, y, z) \in E, x + 2y = 3z\}$ .

Alors  $H$  est un hyperplan de  $E$  car

$$H = \text{ker}(\varphi) \text{ où } \varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x + 2y - 3z.$$

### Définition – Espace dual

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'ensemble des formes linéaires sur  $E$  est appelé *espace dual* de  $E$  et noté  $E^*$ .

**Exercice 154**

*Caractérisation en dimension finie*

Supposons  $E$  de dimension finie. Alors le sous-espace  $H$  de  $E$  est un hyperplan de  $E$  si, et seulement si,  $\dim(H) = \dim(E) - 1$ .

**Solution (Ex.154 – Caractérisation en dimension finie)**

Soit  $n$  la dimension de  $E$ .

① Soit  $\varphi$  une forme linéaire non nulle.

Alors  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ , donc  $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}$ , donc  $\dim(\text{Im}(\varphi)) \leq \dim \mathbb{K}^1 = 1$ .

$\varphi$  n'est pas la forme nulle, donc  $\dim(\text{Im}(\varphi)) \geq 1$ , donc  $\dim \text{Im}(\varphi) = 1$ .

La formule du rang donne alors :  $\dim \text{Ker}(\varphi) = n - \text{rg} \varphi = n - 1$ .

Donc tout hyperplan est bien de dimension  $n - 1$ .

② Soit  $H$  un espace de dimension  $n - 1$ ,  $(h_1, \dots, h_{n-1})$  une base de  $H$ .

Je la complète en une base  $\mathcal{B} = (h_1, \dots, h_{n-1}, h_n)$  de  $E$ , et je considère l'application  $\varphi$  :

$$u = x_1 h_1 + \dots + x_{n-1} h_{n-1} + x_n h_n \mapsto x_n$$

$\varphi$  est une forme linéaire, non nulle car  $\varphi(h_n) = 1 \neq 0$ .

De plus :  $u \in H \iff x_n = 0 \iff \varphi(u) = 0$ .

Donc  $H = \text{Ker}(\varphi)$  est un hyperplan.

**Remarque sur les exemples précédents**

Dans les exemples ① et ②, ceci n'a pas de sens puisque  $E$  est dimension infinie. Mais pour ③, on peut constater que  $\dim(H) = 2 = \dim(E) - 1$ , et on retrouve très classiquement que  $x + 2y - 3z = 0$  est l'équation d'un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

Vous avez déjà pu remarquer que fréquemment, dans les espaces euclidiens, on passe des équations linéaires à des relations d'orthogonalité, et réciproquement.

Par exemple :

$$x + 2y - 3z = 0 \iff (x, y, z) \perp (1, 2, -3).$$

**Exercice 155**

*Théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien*

Soit  $E$  un espace euclidien et  $\varphi$  une forme linéaire sur  $E$ .

1. Montrer qu'il existe un vecteur  $u_\varphi \in E$  tel que

$$\forall v \in E, \quad \varphi(v) = \langle u_\varphi, v \rangle.$$

Sur l'exemple précédent,  $\varphi : v = (x, y, z) \mapsto x + 2y - 3z = \langle (1, 2, -3), v \rangle$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$   $n + 1$  réels deux à deux distincts de  $[0; 1]$ .

Montrer qu'il existent  $n + 1$  réels  $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$  tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(x)dx = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(x_k).$$

**Solution (Ex.155 – Théorème de représentation des formes linéaires dans un espace)**

1. *Premier cas* : Si  $\varphi$  est la forme nulle, il suffit de prendre  $u_\varphi = \vec{0}$ .

*Second cas* : Supposons que  $\varphi$  n'est pas la forme nulle. Alors  $H = \text{Ker}(\varphi)$  est un hyperplan, donc de dimension  $\dim(E) - 1$ .

*Analyse* : pour tout  $v \in H$ ,  $\varphi(v) = 0 = \langle u_\varphi, v \rangle$  montre que  $u_\varphi \in H^\perp$ . Soit  $\Delta = H^\perp$ ,  $\dim(\Delta) = 1$  (c'est un supplémentaire de  $H$ ).

*Comment choisir cet  $u_\varphi$  ?*

Prenons un vecteur  $u$  engendrant  $\Delta$  tel que  $\varphi(u) = 1$  pour fixer les idées (si  $\varphi(u) \neq 1$ , on pourra poser  $u' = \frac{1}{\varphi(u)}u$  et on aura  $\varphi(u') = 1$ ).

Il faut en particulier que  $\varphi(u_\varphi) = \|u_\varphi\|^2$

Il existe  $k \in \mathbb{R}$ ,  $u_\varphi = ku$ ,  $k\varphi(u) = k^2 \|u\|^2$  donc on prend  $k = \frac{1}{\|u\|}$ .

Finalement tentons  $u_\varphi = \frac{1}{\|u\|^2}u$ .

Synthèse :

Soit  $u \in \Delta = H^\perp$  tel que  $\varphi(u) = 1$ . Soit  $u_\varphi = \frac{1}{\|u\|^2}u$ .

- Pour tout  $v \in H = \text{Ker}(\varphi)$ ,  $\varphi(v) = 0 = \langle u_\varphi, v \rangle$ .

- Pour tout  $v \in \Delta$ ,  $\exists k \in \mathbb{R}$ ,  $v = ku$ .

$$\varphi(v) = k\varphi(u) = k \text{ et } \langle u_\varphi, v \rangle = \left\langle \frac{1}{\|u\|^2}u, ku \right\rangle = \frac{k}{\|u\|^2} \|u\|^2 = k.$$

- Et comme  $H \oplus \Delta = E$ , pour tout  $v = v_H + v_\Delta$ ,

$$\varphi(v) = \varphi(v_H) + \varphi(v_\Delta) = \langle u_\varphi, v_H \rangle + \langle u_\varphi, v_\Delta \rangle = \langle u_\varphi, v \rangle : \text{gagné!}$$

2. Tout d'abord,  $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P \mapsto \int_0^1 P(x)dx$  est une forme linéaire.

Ensuite,  $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k)$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$  : clairement bilinéaire, symétrique et positif. Et positif car  $\langle P, P \rangle = 0$  entraîne

que les  $n + 1$  nombres  $x_k$  sont racines de  $P$ , donc  $P$  a strictement plus de racines que son degré, donc est nul.

Ainsi il existe un polynôme  $Q$  tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = \langle Q, P \rangle = \sum_{k=0}^n Q(x_k)P(x_k).$$

En posant  $\lambda_k = Q(x_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on a

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(x)dx = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(x_k).$$

**Exercice 156**

*Espace dual et base duale*

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $E^*$  son dual.

1. Justifier que  $E^*$  est un espace vectoriel.
2. On suppose que  $E$  est de dimension finie.
  - a) Justifier que  $E^*$  est de dimension finie et que  $\dim(E^*) = \dim(E)$ .
  - b) Soit  $n = \dim(E)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Soit pour, tout  $i$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $e_i^* : E \rightarrow \mathbb{K}, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto x_i$ .

Montrer que  $\mathcal{B}^* \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} (e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E^*$ .

*On l'appelle base duale de  $\mathcal{B}$ .*

- c) Interpréter, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $e_i^*$  en terme de projection.
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $E = \mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne canonique et on note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $E$ .  
Exprimer, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $e_i^*$  à l'aide du produit scalaire.

**Solution (Ex.156 – Espace dual et base duale)**

1. Il suffit d'observer que  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ , qui est d'après le cours un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^E$ .
2. a) Toujours par le cours, puisque  $E$  et  $\mathbb{K}$  sont de dimension finie,  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  est de dimension finie et  $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{K}) = \dim(E)$ .
  - b) • Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $e_i^*$  est bien une forme linéaire (linéarité banale :  $e_i^*(x + y) = x_i + y_i = e_i^*(x) + e_i^*(y)$ ).
    - Supposons que  $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq n}$  sont  $n$  scalaires tels que

---


$$\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j^* = 0_{E^*} \quad (\#).$$

Soit  $i$  dans  $[[1; n]]$ .  $(\#)$  évaluée en  $e_i$  donne  $\alpha_i = 0$  car  $e_j^*(e_i) = \delta_{i,j}$ .

Donc  $\mathcal{B}^*$  est une famille libre de  $E^*$ .

• Comme  $\text{Card}(\mathcal{B}^*) = n = \dim(E^*)$ ,  $\mathcal{B}^*$  est une base de  $E^*$ .

c) Soit  $i \in [[1; n]]$ .

Soit  $p_i$  la projection de  $E$  sur  $\text{Vect}(e_i)$  parallèlement à  $\text{Vect}(\{e_j | j \in [[1; n]] \setminus \{i\}\})$ . Alors

$$\forall x \in E, \quad p_i(x) = e_i^*(x)e_i.$$

3. Pour tout  $i$  de  $[[1; n]]$ ,

$$\forall x \in E, \quad e_i^*(x) = \langle x, e_i \rangle.$$



# Chapitre 47

## Bases adaptées à l'étude des endomorphismes nilpotents

☞[MP-M1 – 2020 – PC – ] ☞[E3A-M2 – 2017 – PSI – ] ☞[CS-M2 – 2019 – PSI – ]

### Définition – Endomorphisme nilpotent et indice de nilpotence

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ –espace vectoriel.

Un endomorphisme  $f$  de  $E$  est dit nilpotent s'il existe un entier naturel  $k$  tel que  $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

Si  $f$  est nilpotent, on appelle indice de nilpotence de  $f$  l'entier

$$i = \min\{k \in \mathbb{N}, f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}\}.$$

Comme  $\{k \in \mathbb{N}, f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$  est non vide car  $f$  est nilpotent, et comme toute partie non vide minorée de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément,  $i$  est bien défini.

### Exercice 157

*Propriété des noyaux et images itérés*

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ –espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$  et  $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$
2. On suppose :  $\exists k_0 \in \mathbb{N}, \text{Ker}(f^{k_0+1}) = \text{Ker}(f^{k_0})$ .  
Montrer que :  $\forall k \geq k_0, \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k_0})$ .
3. On suppose :  $\exists k_0 \in \mathbb{N}, \text{Im}(f^{k_0+1}) = \text{Im}(f^{k_0})$ .  
Montrer que :  $\forall k \geq k_0, \text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k_0})$ .

*Autrement dit, les suites des noyaux et des images sont croissante et décroissante respectivement.*

4. Justifier que, si de plus  $E$  est de dimension finie, les suites  $(\text{Ker}(f^k))$  et  $(\text{Im}(f^k))$  sont stationnaires, i.e. constantes à partir d'un certain rang  $k_0$ .

**Solution (Ex.157 – Propriété des noyaux et images itérés)**

1. *Savoir traduire les appartenances au noyau et à l'image.*

- $u \in \text{Ker}(f^k) \implies f^k(u) = 0 \implies f^{k+1}(u) = f(0) = 0 \implies u \in \text{Ker}(f^{k+1})$ .
- $u \in \text{Im}(f^{k+1}) \implies \exists v \in E, u = f^{k+1}(v)$   
 $\implies \exists v \in E, u = f^k(f(v)) \implies u \in \text{Im}(f^k)$ .

2. Par récurrence sur  $k \geq k_0$ .

$$\boxed{\text{I}} \quad \text{Ker}(f^{k_0}) = \text{Ker}(f^{k_0}).$$

$$\boxed{\text{H}} \quad \bullet \quad \text{Ker}(f^{k_0}) = \text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$$

- Soit  $x \in \text{Ker}(f^{k+1})$ .  $f^{k+1}(x) = 0 \implies f^{k-k_0}(x) \in \text{Ker}(f^{k_0+1})$   
 $\implies f^{k-k_0}(x) \in \text{Ker}(f^{k_0}) \implies x \in \text{Ker}(f^k) \implies x \in \text{Ker}(f^{k_0})$ .

Donc  $\text{Ker}(f^{k+1}) = \text{Ker}(f^{k_0})$ .

$$\boxed{\text{C}} \quad \forall k \geq k_0, \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k_0}).$$

3. La suite  $(\dim(\text{Ker}(f^k)))$  est une suite croissante, majorée par  $\dim(E)$ , donc convergente. Et comme c'est une suite d'entiers, elle est constante à partir d'un certain rang.

Ainsi il existe un rang  $k_0$  tel que  $\dim(\text{Ker}(f^{k_0+1})) = \dim(\text{Ker}(f^{k_0}))$ , et comme  $\dim(\text{Ker}(f^{k_0}) \subset \dim(\text{Ker}(f^{k_0+1}))$ ,  $\dim(\text{Ker}(f^{k_0})) = \dim(\text{Ker}(f^{k_0+1}))$   
 Même raisonnement pour les images.

### Exercice 158

*Base adaptée à l'étude d'un endomorphisme nilpotent*

Justifier les propriétés suivantes.

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$  nilpotent de  $E$  d'indice de nilpotence  $i$ .

Alors pour tout  $x \in E$  tel que  $f^{i-1}(x) \neq 0$ , la famille  $(f^{i-1}(x), \dots, f(x), x)$  est libre.

2. On suppose de plus que  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et que l'indice de nilpotence de  $f$  vaut  $n$ .

Alors pour tout  $x \in E$  tel que  $f^{n-1}(x) \neq 0$ , la famille  
 $\mathcal{C} = (f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$

est une base de  $E$  et

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & (0) & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{I}_{n-1} \\ \hline 0_1 & 0 \end{array} \right).$$

**Solution (Ex.158 – Base adaptée à l'étude d'un endomorphisme nilpotent)**

*Simplement traduire qu'une famille est libre.*

1. Soit  $(a_j)_{0 \leq j \leq i-1} \in \mathbb{K}^i$  tel que

$$\sum_{j=0}^{i-1} a_j f^{(j)}(x) = 0 \quad (\heartsuit).$$

En composant  $(\heartsuit)$  par  $f^{i-1}$ , on a pour  $j \geq 1$ ,  $f^{j+i-1}(x) = 0$  car  $j+i-1 \geq i$ .  
Donc il reste :  $a_0 f^{i-1}(x) = 0$ , et comme  $f^{i-1}(x) \neq 0$ ,  $a_0 = 0$ .

Du coup

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_j f^{(j)}(x) = 0 \quad (\heartsuit_1).$$

En composant par  $f^{i-2}$ , on obtient  $a_1 f^{i-1}(x) = 0$ , donc  $a_1 = 0$ .

Et ainsi de suite...

2. Notons qu'il existe (au moins un)  $x \in E$  tel que  $f^{n-1}(x) \neq 0$ , car sinon cela signifierait que l'indice de nilpotence de  $f$  est au plus  $n-1$ .

Comme  $\text{Card}(\mathcal{C}) = n = \dim(E)$  et  $\mathcal{C}$  est libre,  $\mathcal{C}$  est une base de  $E$ .

- $f(f^{n-1}(x)) = f^n(x) = 0$  donc la première colonne de  $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$  est nulle.
- Pour  $i \in [[2; n]]$ ,  $f(f^{n-i}(x)) = f^{n-i+1}(x) = \ll$  le vecteur précédent dans la base  $\mathcal{C}$ ,  $\gg$  ce qui explique la matrice obtenue.



# Chapitre 48

## Matrices circulantes et racines n-èmes de l'unité

☞[E3A-M2 – 2019 – PSI – Partie 2] ☞[CS-M1 – 2016 – PSI – Partie III]  
☞[CS-M1 – 2018 – PSI – Partie II] ☞[CS-M1 – 2019 – PC – Partie II]

**Définition – Matrice circulante élémentaire d'ordre  $n$**

Soit  $n$  un entier naturel au moins égal à 2. On note  $C_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par

$$C_n \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Chaque ligne est obtenue en circulant la ligne précédente d'un cran vers la droite.

### Exercice 159

*Propriétés des matrices circulantes élémentaires*

1. Montrer que  $C_n$  est orthogonale.  $C_n$  est-elle inversible? Si oui, que vaut

$C_n^{-1}$  ?

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $C_n \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ .

3. Justifier que pour tout  $k \in [[0; n]]$ ,  $C_n^k = \left( \begin{array}{c|c} 0 & I_{n-k} \\ \hline I_k & 0 \end{array} \right)$

*J'aurais pu exclure  $k = 0$  et  $k = n$ , mais j'y vois  $C_n^0 = C_n^n = I_n \dots$*

4. Justifier successivement que  $\chi_{C_n} = X^n - 1$ ,  $C_n$  est diagonalisable, ses valeurs propres sont les racines  $n$ -èmes de l'unité :

$\text{Sp}(C_n) = \mathbb{U}_n = \{\omega^k, k \in [[0; n-1]]\}$  où  $\omega = e^{2i\pi/n}$ ,  
 ses sous-espaces propres sont, pour tout  $k \in [[0; n-1]]$ ,

$$E_{\omega^k} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix} \right).$$

Justifier en particulier que  $C_n$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  si, et seulement si,  $n = 2$ .

**Solution (Ex.159 – Propriétés des matrices circulantes élémentaires)**

1. Il suffit d'observer que les colonnes de  $C_n$  forment une base orthonormale de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Toute matrice orthogonale est inversible d'inverse sa transposée.

2. En développant suivant la première colonne,  $\det(C_n) = (-1)^{n+1}$  :

$$C_n \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \iff n \text{ impair.}$$

3. Il peut être intéressant d'étudier l'endomorphisme  $\varphi_n$  canoniquement associé à  $C_n$ . En notant  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\varphi_n(\mathcal{B}) = (e_n, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}).$$

Comme  $\varphi_n$  effectue une permutation circulaire sur les vecteurs de la base canonique  $\mathcal{B}$ , on a, pour tout  $k \in [[1; n]]$ ,

$$\varphi_n^k(\mathcal{B}) = (e_{n+1-k}, e_{n+2-k}, \dots, e_n, e_1, e_2, \dots, e_{n-k}).$$

$$\forall k \in [[1; n-1]], \quad C_n^k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi_n^k) = \left( \begin{array}{c|c} 0_{n-k,k} & I_{n-k} \\ \hline I_k & 0_{k,n-k} \end{array} \right).$$

4. Notez que  $C_n^n = I_n$  donc  $X^n - 1$  est un polynôme annulateur de  $C_n$ , donc les valeurs propres de  $C_n$  sont parmi les racines de  $X^n - 1$ , i.e. parmi les racines  $n$ -èmes de l'unité.

- En développant suivant la première colonne :

$$\chi_{C_n}(X) = X \times X^{n-1} - (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = X^n - 1.$$

$C_n$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, les  $n$  racines  $n$ -èmes de 1, donc

$C_n$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(C_n) = \mathbb{U}_n = \{\omega^k, k \in [[0; n-1]]\}$ .

• Sur ce cas particulier, il est plus direct de résoudre le système que de rechercher le noyau.

Pour  $\lambda \in \text{Sp}(C_n)$  :

$$C_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ x_1 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Comme  $\exists k \in [[0; n-1]]$  tq  $\lambda = \omega^k$ , on a

$$\forall k \in [[0; n-1]], \quad E_{\omega^k} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix} \right).$$

Dès que  $n \geq 3$ ,  $\omega \notin \mathbb{R}$  et  $\chi_{C_n}$  n'est pas scindé, donc  $C_n$  n'est pas diagonalisable. Seule  $C_2$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  avec  $\text{Sp}(C_2) = \{-1, 1\}$ .

**Définition – Matrices circulantes d'ordre  $n$**

Pour tout  $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ , on définit la matrice circulante  $M_a$  par

$$M_a = M_{(a_0, \dots, a_{n-1})} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

On note de plus  $\Gamma$  l'ensemble de toutes les matrices circulantes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\Gamma = \{M_a / a \in \mathbb{C}^n\}.$$

### Exercice 160

*Propriétés des matrices circulantes*

Justifier les propriétés suivantes.

1.  $\Gamma$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

En particulier,  $M_a = \sum_{k=0}^{n-1} a_k C_n^k$  est un polynôme en  $C_n$ .

2.  $\Gamma$  est stable pour le produit matriciel :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}_n^2, \quad M_a M_b \in \Gamma.$$

*Le produit de deux matrices circulantes est encore une matrice circulante.*

3. Le produit de deux matrices circulantes commute :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}_n^2, \quad M_a M_b = M_b M_a.$$

4. Soit  $a \in \mathbb{C}^n$ .

Les vecteurs propres de  $C_n$  sont des vecteurs propres de  $M_a$ .

Par conséquent  $M_a$  est diagonalisable.

**Solution (Ex.160 – Propriétés des matrices circulantes)**

1. Remarquons que  $M_a = a_0 I_n + a_1 C_n + \dots + a_{n-1} C_n^{n-1}$  donc

$$\Gamma = \text{Vect}(I_n, C_n, \dots, C_n^{n-1}),$$

ce qui prouve que  $\Gamma$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

De plus,  $(I_n, C_n, \dots, C_n^{n-1})$  est libre :

$$a_0 I_n + a_1 C_n + \dots + a_{n-1} C_n^{n-1} = 0 \implies \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = 0 \implies$$

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$$

$\Gamma$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n$ .

2. Soit  $(M_a, M_b) \in \Gamma^2$ .

Alors  $M_a$  et  $M_b$  sont combinaisons linéaires de  $(I_n, C_n, \dots, C_n^{n-1})$ , donc  $M_a M_b$  est combinaison linéaire de  $(I_n, C_n, \dots, C_n^{2n-2})$ , mais comme  $C_n^n = I_n$ , on a  $C_n^{n-1+k} = C_n^{k-1}$  pour tout  $k \in [[0; n-1]]$ , donc  $M_a M_b$  est combinaison linéaire de  $(I_n, C_n, \dots, C_n^{n-1})$ , donc  $M_a M_b \in \Gamma$ .

3. Comme les puissances de  $C_n$  commutent entre elles ( $C_n^i C_n^j = C_n^j C_n^i = C_n^{i+j}$ ) et le produit des polynômes est commutatif,

$$M_a M_b = Q_a(C_n) Q_b(C_n) = (Q_a \times Q_b)(C_n) = (Q_b \times Q_a)(C_n) = Q_b(C_n) Q_a(C_n) \\ M_a M_b = M_b M_a.$$

4. Soit  $U$  un vecteur propre de  $C_n$  et  $\lambda$  la valeur propre associée.

$$M_a U = \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k C_n^k \right) U = \sum_{k=0}^{n-1} a_k C_n^k U \text{ or (récurrence) } C_n^k U = \lambda^k U, \text{ donc}$$

---

$M_a U = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k U = \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k \right) U$  ce qui prouve que  $U$  est un vecteur propre de  $M_a$ .

Donc tout vecteur propre de  $C_n$  est vecteurs propres de  $M_a$ .

Or  $C_n$  est diagonalisable : il existe une base formée de vecteurs propres de  $C_n$ , donc de  $M_a$ .

$M_a$  est diagonalisable, et même

$$\text{Sp}(M_a) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k, \lambda \in \text{Sp}(C_n) \right\} \stackrel{\lambda = \omega^j}{=} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}, j \in [[0; n-1]] \right\}.$$



## Chapitre 49

# Matrices compagnons, suites récurrentes, E.D.L. & localisation des racines d'un polynôme

☞[E3A-M1 – 2016 – PC – Exo 3] ☞[E3A-M2 – 2019 – PSI – Partie 3]  
☞[CS-M1 – 2018 – PSI – Partie III]

### Définition – Matrice compagnon d'un polynôme

Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ . On appelle matrice compagnon du polynôme  $P$  la matrice

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

*Parfois,  $C_P$  est définie comme la transposée de cette matrice, ce qui ne modifie les propriétés essentielles des matrices compagnons.*

**Exercice 161**

*Éléments propres*

Soit  $C_P$  la matrice compagnon du polynôme  $P$ .

1. Montrer que

$$C_P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff a_0 \neq 0 \iff P(0) \neq 0.$$

2. Montrer que  $\chi_{C_P}(X) = P(X)$ . Que dire des valeurs propres de  $C$  ?

*Au passage, étant donné un polynôme unitaire  $P$ , cela permet de construire une matrice dont  $P$  est la polynôme caractéristique.*

3. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(C_P)$  i.e.  $\lambda$  une racine de  $P$ . Montrer que

$$\text{SEP}(C_P, \lambda) = \text{Ker}(C_P - \lambda I_n) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right).$$

*En particulier, tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.*

4. À quelle condition nécessaire et suffisante  $C_P$  est-elle diagonalisable ?
5. En utilisant une matrice compagnon, montrer que si les  $n$  scalaires  $\lambda_i$  pour  $1 \leq i \leq n$  sont deux à deux distincts, alors le déterminant de VANDER-MONDE suivant n'est pas nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

**Solution (Ex.161 – Éléments propres)**

1. En développant suivant la première colonne,  $\det({}) C_P) = (-1)^{n+2} a_0$  donne la conclusion.

$$2. \chi_{C_P}(X) = \det (X I_n - C_P) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & X & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Une astuce :

- multiplier la dernière colonne par  $X^{n-1}$ , l'avant-dernière par  $X^{n-2}$ , jusque la deuxième par  $X$ , donc on calcule  $X^{1+2+\dots+(n-1)}\chi_{C_P}(X)$ ,
- sommer toutes les colonnes sur la dernière, celle-ci devient nulle, sauf son dernier coefficient qui vaut  $P(X)$ ,
- développer suivant cette colonne pour obtenir :  

$$X^{1+2+\dots+(n-1)}\chi_{C_P}(X) = X^{1+2+\dots+(n-1)}P(X) \quad \text{Cqfd.}$$

Donc  $\chi_{C_P}(X) = P(X)$ , et  $\text{Sp}(C_P) = \{\alpha \in \mathbb{K}, P(\alpha) = 0\}$ .

Autrement dit, les valeurs propres de  $C_P$  sont les racines de  $P$ .

$$3. \text{ Soit } \lambda \in \text{Sp}(C_P). \text{ Soit } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

$$X \in \text{SEP}(C_P, \lambda) \iff C_P X = \lambda X$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-2} x_{n-1} - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ P(\lambda)x_1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{P(\lambda)=0} \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \end{cases}$$

$$\text{SEP}(C_P, \lambda) = \text{Ker}(C_P - \lambda I_n) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right).$$

4. En particulier, on a :  $\forall \lambda \in \text{Sp}(C_P), \quad \dim(\text{SEP}(C_P, \lambda)) = 1.$

Donc par le cours,  $C_P$  est diagonalisable si, et seulement si, pour toute valeur propre  $\lambda$ ,  $\omega(\lambda) = \dim(\text{SEP}(C_P, \lambda)) = 1$ , donc si, et seulement si,  $P$  est à racines simples.

5. Prenons  $P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_n)$  et  $C_P$  la matrice compagnon de  $P$ . Alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage vers une base de vecteurs propres de  $C_P$ , donc est inversible et de déterminant non nul.

**Exercice 162**

*Lien avec les suites récurrentes linéaires d'ordre  $n$*

Soit  $(a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \in \mathbb{K}^n$ . Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre  $n$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+n} + a_{n-1}u_{k+n-1} + a_{n-2}u_{k+n-2} + \dots + a_0u_k = 0 \quad (\mathcal{R}).$$

Justifier les propriétés suivantes.

- ① Posons  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ .

Avec  $U_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+n-1} \end{pmatrix}$ , on a :  $\forall k \in \mathbb{N}, U_{k+1} = C_P U_k$ .

② Donc :  $\forall k \in \mathbb{N}, U_k = (C_P)^k U_0$ .

③ Si l'équation caractéristique

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \quad (\mathcal{E})$$

admet exactement  $n$  solutions distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \alpha_1 \lambda_1^k + \dots + \alpha_n \lambda_n^k.$$

*Ceci généralise le théorème sur les récurrences linéaires d'ordre 2, dans le cas où il y a 2 solutions distinctes à l'équation caractéristique.*

**Solution (Ex.162 – Lien avec les suites récurrentes linéaires d'ordre  $n$ )**

1. Il n'y a qu'à écrire ( $\mathcal{R}$ ) sous la forme

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+n} = -a_{n-1}u_{k+n-1} - a_{n-2}u_{k+n-2} - \dots - a_0u_n.$$

2. Par récurrence immédiate.

3. Si ( $\mathcal{E}$ ) a  $n$  solutions distinctes,  $P$  est scindé à racines simples car ( $\mathcal{E}$ ) équivaut à  $P(x) = 0$ , donc  $C_P$  est diagonalisable, et admet  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  pour valeurs propres.

Il existe  $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $C_P = Q \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Q^{-1}$ , donc

$$C_P^k = Q \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) Q^{-1}.$$

*Surtout, je ne cherche pas à développer, même si on peut expliciter  $Q$  puisqu'on connaît les sous-espaces propres par la propriété précédente.*

Les coefficients de  $C_P^k$  sont tous combinaisons linéaires (à coefficients constants, ceux de  $Q$  et  $Q^{-1}$  qui ne dépendent pas de  $k$ ) des  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ .

Comme  $U_k = \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \end{pmatrix} = (C_P)^k U_0$ ,  $u_k$  est combinaison linéaire de  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ ,

à coefficients constants.

### Exercice 163

*Lien avec les équations différentielles linéaires scalaires homogènes d'ordre  $n$*

Soit  $(a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \in \mathbb{K}^n$ . On s'intéresse à l'équation différentielle d'ordre  $n$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (\text{EDL}).$$

Justifier les propriétés suivantes.

1. Posons  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ .

$$\text{Avec } Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \text{ on a : } Y' = C_P Y.$$

2. Si l'équation caractéristique

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \quad (\mathcal{E})$$

admet exactement  $n$  solutions distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors

$$\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad y = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n x}.$$

Autrement, l'ensemble des solutions de (EDL) est

$$\text{Vect}(x \mapsto e^{\lambda_1 x}, \dots, x \mapsto e^{\lambda_n x}).$$

*Ceci généralise le théorème sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2, dans le cas où il y a 2 solutions distinctes à l'équation caractéristique.*

**Solution (Ex.163 – Lien avec les équations différentielles linéaires scalaires homogènes)**

1. Il n'y a qu'à écrire (EDL) sous la forme

$$y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots - a_1y' - a_0y.$$

2. Si  $(\mathcal{E})$  a  $n$  solutions distinctes,  $P$  est scindé à racines simples car  $(\mathcal{E})$  équivaut à  $P(x) = 0$ , donc  $C_P$  est diagonalisable, et admet  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  pour valeurs propres.

Il existe  $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $C_P = Q \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Q^{-1} = QDQ^{-1}$ .

$$Y' = C_P Y \iff Y' = QDQ^{-1} \stackrel{Z=Q^{-1}Y}{\iff} Z' = DZ \iff \begin{pmatrix} z'_1(x) = \lambda_1 z_1(x) \\ \vdots \\ z'_n(x) = \lambda_n z_n(x) \end{pmatrix}$$

Ce qui ramène à  $n$  EDL d'ordre 1 indépendantes :

$$\exists(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n, \quad Z(x) = \begin{pmatrix} \beta_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ \beta_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}.$$

*Surtout, je ne cherche pas à développer, même si on peut expliciter  $Q$  puisqu'on connaît les sous-espaces propres par la propriété précédente. Je n'inverse pas non plus  $Q$ !!!*

Or  $Y = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \end{pmatrix} = QZ$ , donc  $y$  est combinaison linéaire à coefficients ne dépendant pas de  $x$  ( $Q$  ne dépend pas de  $x$ ) des  $n$  fonctions  
 $x \mapsto e^{\lambda_1 x}, \dots, x \mapsto e^{\lambda_n x}$ .

### Exercice 164

*Localisation des racines d'un polynôme*

Peut-on trouver un lien entre les racines d'un polynôme et ses coefficients ? Où chercher les racines d'un polynôme ? Si ses coefficients sont petits, ses racines sont-elles petites ?

Les matrices compagnons apportent une réponse à ces questions. Justifier les propriétés suivantes.

1. *Petite considération générale*

Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , soit pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$r_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \|\text{ligne } n^{\circ}i \text{ de } A\|_1.$$

Alors :  $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \quad |\lambda| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |r_i|$ .

*Si les coefficients de  $A$  ne sont pas grands, ses valeurs propres non plus.*

2. Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ . Alors toute racine  $\lambda$  de  $P$  vérifie

$$|\lambda| \leq \max\{|a_0|, |a_1| + 1, \dots, |a_{n-1}| + 1\}.$$

*Autrement dit, les racines de  $P$  sont toutes situées dans les disques fermé de centre 0 et de rayon*

$$R = \max\{|a_0|, |a_1| + 1, \dots, |a_{n-1}| + 1\}.$$

3. Ainsi, je peux affirmer que les 1789 racines complexes de

$$X^{1789} - 2X^{1515} + 3X^{1492} - \pi$$

sont toutes dans le disque de centre 0 et de rayon 4. Étonnant, non ?

**Solution** (Ex.164 – Localisation des racines d'un polynôme)

1. Soit  $X$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ . De  $AX = \lambda X$ , on tire :  $\forall i \in$

$$[[1; n]], \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i, \text{ puis}$$

$$|\lambda| |x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq r_i \|X\|_{\infty}.$$

En particulier pour l'indice  $i_0$  tel que  $|x_{i_0}| = \|X\|_{\infty}$ , on a

$$|\lambda| \|X\|_{\infty} = |\lambda| |x_{i_0}| \leq r_{i_0} \|X\|_{\infty}.$$

Comme  $\|X\|_{\infty} > 0$ ,

$$|\lambda| \leq r_{i_0} \leq \max_{1 \leq i \leq n} |r_i|.$$

2. On va appliquer la propriété précédente à  ${}^t C_P$  dont les normes des lignes sont simples.

Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ . Soit  $C_P$  la matrice compagnon de  $P$ . Toute racine  $\lambda$  est valeur propre de  $C_P$  donc de  ${}^t C_P$ . Or pour  ${}^t C_P$ , on a

$$r_1 = |a_0|, \text{ et } \forall i \in [[2; n]], \quad r_i = |a_i| + 1.$$

Donc par 1.,  $|\lambda| \leq \max\{|a_0|, |a_1| + 1, \dots, |a_{n-1}| + 1\}$

# Chapitre 50

## Matrices stochastiques

☞[CCP – 2016 – PSI – ] ☞[MP-M1 – 2017 – PC-PSI – ]

### Définition – Matrices stochastiques

Une matrice  $M = (m_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite stochastique si ses coefficients sont positifs et si, sur chacune de ses lignes, la somme des coefficients vaut 1. Notons  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des matrices stochastiques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Autrement dit :

$$M \in \mathcal{S}_n \text{ si, et seulement si, } \begin{cases} \forall (i, j) \in [[1; n]]^2, & m_{i,j} \geq 0 \quad (\Pi) \\ \forall i \in [[1; n]], & \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1 \quad (\Sigma) \end{cases}$$

### Exercice 165

*Propriétés générales des matrices stochastiques*

1. Très utile pour caractériser la propriété  $(\Sigma)$ .

Soit  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  la colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  ne contenant que des 1.

Montrer que

$M$  vérifie  $(\Sigma)$  si, et seulement si,  $MU = U$ .

2. Justifier que  $\mathcal{S}_n$  n'est pas un espace vectoriel.
3. Montrer que  $\mathcal{S}_n$  est stable pour la multiplication :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{S}_n^2, \quad MN \in \mathcal{S}_n.$$

4. Montrer que  $\mathcal{S}_n$  est une partie fermée et convexe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

5. Justifier que si  $M$  est stochastique et la suite de ses puissances  $(M^k)$  converge, alors  $\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k$  est stochastique.

**Solution (Ex.165 – Propriétés générales des matrices stochastiques)**

*Maîtriser le produit matriciel...*

1.  $\forall i \in [[1; n]]$ ,  $(MU)_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j}u_j = \sum_{j=1}^n m_{i,j}$ , donc  $M$  vérifie  $(\Sigma)$  si, et seulement si,  $MU = U$ .

2.  $\mathcal{S}_n$  a la fâcheuse manie de ne pas contenir  $0_n$ ...

3. Soit  $(M, N) \in \mathcal{S}_n^2$ .

$$\forall (i, j) \in [[1; n]]^2, \quad (MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k}n_{k,j} \geq 0 \text{ donc } MN \text{ vérifie (II).}$$

$$MNU = M(NU) = MU = U \text{ donc } MN \text{ vérifie } (\Sigma).$$

4. • L'ensemble  $\mathcal{M}^+$  des matrices à coefficients positifs est fermé, car c'est l'intersection des  $n^2$  ensembles fermés (par continuité de  $M \mapsto m_{i,j}$ )

$$\mathcal{M}_{i,j}^+ = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), m_{i,j} \geq 0\}.$$

De plus  $\mathcal{L} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|MU - U\| = 0\}$  est fermé car  $M \mapsto \|MU - U\|$  est continue.

Donc  $\mathcal{S}_n = \mathcal{L} \cap \mathcal{M}^+$  est fermé.

*On pouvait aussi raisonner par coordonnées, et expliquer que si une suite de matrices stochastiques converge, alors la limite de chaque coordonnée est la limite d'une suite positive, donc est positive, et la limite des sommes par lignes est 1 puisque ces sommes valent toujours 1.*

- Soit  $(M, N) \in \mathcal{S}_n$ . Soit  $\lambda \in [0; 1]$ .

(i)  $\forall (i, j) \in [[1; n]]^2, \quad ((1 - \lambda)M + \lambda N)_{i,j} = (1 - \lambda)m_{i,j} + \lambda n_{i,j} \geq 0$

(ii)  $((1 - \lambda)M + \lambda N)U = (1 - \lambda)MU + \lambda NU = (1 - \lambda + \lambda)U = U$

donc :  $\forall \lambda \in [0; 1], \quad (1 - \lambda)M + \lambda N \in \mathcal{S}_n$ , i.e.  $[MN] \subset \mathcal{S}_n$ .

5. 5., 3. et 4 entraînent que si  $M$  est stochastique et la suite de ses puissances  $(M^k)$  converge, alors  $\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k$  est stochastique, car toutes les puissances sont stochastiques...

**Exercice 166**

*Du côté des éléments propres*

Soit  $M$  une matrice stochastique d'ordre  $n$ .

---

1. Justifier que  $1 \in \text{Sp}(M)$  et  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{SEP}(M, 1)$  puisque  $MU = U$ .

2. Montrer que si  $\lambda \in \text{Sp}(M)$  alors  $|\lambda| \leq 1$ .

3. Montrer que si pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $m_{k,k} \neq 0$ , alors la seule valeur propre de  $M$  de module 1 est 1.

4. On peut démontrer que si tous les coefficients de  $M$  sont strictement positifs, la dimension de  $\text{SEP}(M, 1)$  vaut 1 (théorème de Perron-Frobenius).

Montrer que si on suppose de plus  $M$  diagonalisable, alors la suite  $(M^k)$  converge vers une matrice de rang 1 de la forme

$$M^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \text{ où } p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

5. Soit

$$M = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Vérifier que  $M$  est stochastique et non-diagonalisable.

*Moralité : toute matrice stochastique même à coefficients strictement positifs n'est pas nécessairement diagonalisable*

**Solution (Ex.166 – Du côté des éléments propres)**

1. ... car  $MU = 1 \times U$ .

2. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(M)$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$  tel que  $. Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel$

que  $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| > 0$ . La  $i$ -ème ligne de  $MX = \lambda X$  fournit

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j = \lambda x_i \quad (\mathcal{P})$$

Et par l'inégalité triangulaire

$$|\lambda| |x_i| \leq \sum_{j=i}^n m_{i,j} |x_j| \leq \sum_{j=i}^n m_{i,j} |x_i| \leq 1 \times |x_i|$$

donc  $|\lambda| \leq 1$  puisque  $|x_i| > 0$ .

3. Je continue avec les mêmes notations, en supposant de plus  $|\lambda| = 1$ . ( $\mathcal{P}$ ) fournit

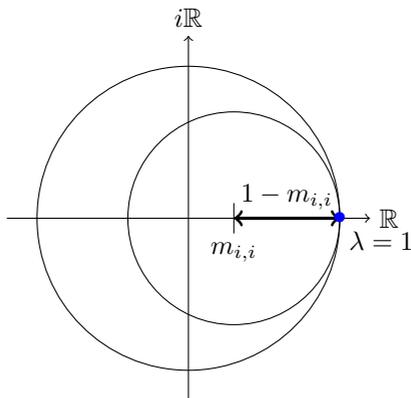
$$(\lambda - m_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} m_{i,j} x_j \text{ donc } \lambda - m_{i,i} = \sum_{j \neq i} m_{i,j} \frac{x_j}{x_i}$$

L'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$1 - m_{i,i} = |\lambda| - m_{i,i} \leq |\lambda - m_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} m_{i,j} \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} m_{i,j} = 1 - m_{i,i}.$$

Puisque les membres extrêmes sont égaux, ces inégalités sont toutes des égalités et en particulier  $1 - m_{i,i} = |\lambda - m_{i,i}|$ .

Donc  $\lambda$  est sur le cercle de centre  $m_{i,i}$  et de rayon  $1 - m_{i,i}$ , et comme  $|\lambda| = 1$ ,  $\lambda$  est aussi sur le cercle unité, et il n'y a qu'une possibilité car ces deux cercles sont tangents en 1 :



. Donc  $\lambda = 1$ , *Cqfd*.

④ Si on suppose de plus  $M$  diagonalisable, alors  $M$  est semblable à  $D = \text{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  avec  $\forall i \in [[2; n]], |\lambda_i| < 1$  d'après ③.

Du coup,  $D^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \Delta = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ .

Écrivons  $M = PDP^{-1}$ . Alors  $M^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} L = P\Delta P^{-1}$ .

Ce qui prouve déjà que la suite  $(M^k)$ .

De plus  $L$  est semblable à  $\Delta$ , de rang 1, donc  $L$  est de rang 1. Donc toutes ses lignes sont proportionnelles, mais  $L$  est stochastique car limite d'une suite de matrices stochastiques ( $\mathcal{S}_n$  est fermé et stable par produit, ça peut

---

servir!). Donc ses lignes sont toutes égales entre elles, car leur somme vaut toujours 1. Donc

$$M^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} L = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \text{ où } p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

4. M admet pour polynôme caractéristique  $\chi_M = X^2(X - 1)$  avec  $\dim(E_0) = \dim(\ker(M)) = 3 - \text{rg}(M) = 1 \neq \omega(0) = 2$ .



# Chapitre 51

## Formes bilinéaires & formes quadratiques

☞[CCP – 2020 – PC – Exo no2]

*Bien que les formes bilinéaires ou quadratiques ne fassent pas l'objet d'une étude systématique dans le programme de P.C. – à l'exception notable des formes bilinéaires symétriques définies positives, alias produits scalaires, on les retrouve dans de nombreux sujets et les petits exercices suivants constituent une entrée en matière incontournable.*

### Définitions –

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Soit  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ .

On dit que :

1.  $\varphi$  est *linéaire à gauche* si

$$\forall v \in E, \quad \varphi_g : E \rightarrow E, u \mapsto \varphi(u, v)$$

est linéaire.

Autrement dit, si, et seulement si,

$$\forall (u, u', v) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \varphi(u + \lambda u', v) = \varphi(u, v) + \lambda \varphi(u', v).$$

2.  $\varphi$  est *linéaire à droite* si

$$\forall u \in E, \quad \varphi_d : E \rightarrow E, v \mapsto \varphi(u, v)$$

est linéaire.

Autrement dit, si, et seulement si,

$$\forall (u, v, v') \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \varphi(u, v + \lambda v') = \varphi(u, v) + \lambda \varphi(u, v').$$

3.  $\varphi$  est *bilinéaire* si  $\varphi$  est à la fois linéaire à gauche et linéaire à droite.

Opératoirement parlant, la *bilinéarité induit la distributivité* :

$$\forall (u, u', v, v') \in E^4,$$

$$\varphi(u + u', v + v') = \varphi(u, v) + \varphi(u, v') + \varphi(u', v) + \varphi(u', v').$$

4.  $\varphi$  est *symétrique* si

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \varphi(u, v) = \varphi(v, u).$$

Opéatoirement parlant, la *bilinéarité est la commutativité*.

5.  $\varphi$  est *antisymétrique* si

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \varphi(u, v) = -\varphi(v, u).$$

6.  $\varphi$  est *alternée* si

$$\forall u \in E, \quad \varphi(u, u) = 0.$$

7.  $\varphi$  est *positive* (respectivement *négative*) si

$$\forall u \in E, \quad \varphi(u, u) \geq 0 \quad (\text{resp. } \varphi(u, u) \leq 0).$$

8.  $\varphi$  est *définie positive* (respectivement *définie négative*) si

$$\forall u \in E \setminus \{0\}, \quad \varphi(u, u) > 0 \quad (\text{resp. } \varphi(u, u) < 0).$$

9. On appelle *forme quadratique* toute application

$$q : E \rightarrow \mathbb{K}$$

pour laquelle il existe une forme bilinéaire  $\varphi$  telle que

$$\forall u \in E, \quad q(u) = \varphi(u, u).$$

Dans ce cas, on dit que  $q$  est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire  $\varphi$ . Voir le premier exercice pour la non-unicité de  $\varphi$ .

**Exercice 167**

*Quelques généralités*

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\varphi$  une forme bilinéaire sur  $E$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est alternée si, et seulement si, elle est antisymétrique.
2. Soit  $q$  la forme quadratique associée à  $\varphi$ .
  - a) On suppose dans cette sous-question uniquement que  $\varphi$  est symétrique. Montrer que, pour tout  $(u, v)$  de  $E^2$ ,

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{4}(q(u+v) - q(u-v)).$$

Cette identité s'appelle l'*identité du parallélogramme*.

- b) On ne suppose plus  $\varphi$  symétrique. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire *symétrique*  $\psi$  telle que

$$\forall u \in E, \quad q(u) = \psi(u, u).$$

On pourra s'intéresser à  $(u, v) \mapsto \frac{1}{2}(\varphi(u, v) + \varphi(v, u))$ .

**Solution** (Ex.167 – *Quelques généralités*)

1. • Supposons  $\varphi$  alternée. Alors pour tout  $(u, v) \in E^2$ , par bilinéarité,

$$\varphi(u + v, u + v) = \varphi(u, u) + \varphi(u, v) + \varphi(v, u) + \varphi(v, v)$$

donc  $0 = \varphi(u, v) + \varphi(v, u)$  i.e.  $\varphi(v, u) = -\varphi(u, v)$ .

Donc  $\varphi$  est antisymétrique.

- Supposons  $\varphi$  antisymétrique. Alors pour tout  $u \in E$ , en permutant  $u$  et  $u$  (si !)

$$\varphi(u, u) = -\varphi(u, u)$$

donc  $2\varphi(u, u) = 0$  i.e.  $\varphi(u, u) = 0$ .

Donc  $\varphi$  est alternée.

2. a) On remarque que, par bilinéarité,

$$q(u \pm v) = \varphi(u, u) \pm 2\varphi(u, v) + \varphi(v, v)$$

d'où

$$q(u + v) - q(u - v) = 4\varphi(u, v).$$

- b) Soit  $\psi : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(u, v) \mapsto \frac{1}{2}(\varphi(u, v) + \varphi(v, u))$ .

- $\psi$  est clairement symétrique.

- $\psi$  est linéaire à gauche :

$$\begin{aligned} \psi(\lambda u + u', v) &= \frac{1}{2}(\lambda\varphi(u, v) + \varphi(u', v) + \lambda\varphi(v, u) + \varphi(v, u')) \\ &= \lambda\frac{1}{2}(\varphi(u, v) + \varphi(v, u)) + \frac{1}{2}(\varphi(u', v) + \varphi(v, u')) \\ &= \lambda\psi(u, v) + \psi(u', v) \end{aligned}$$

- Par conséquent  $\psi$  est bilinéaire car linéaire à gauche et symétrique (plutôt que de recommencer ce qui précède) :

$$\begin{aligned} \psi(u, \lambda v + v') &\stackrel{sym.}{=} \psi(\lambda v + v', u) \stackrel{lin. \text{ gauche}}{=} \lambda\psi(v, u) + \psi(v', u) \\ &\stackrel{sym.}{=} \lambda\psi(u, v) + \psi(u, v') \end{aligned}$$

- $\forall u \in E$ ,  $\psi(u, u) = \frac{1}{2}(\varphi(u, u) + \varphi(u, u)) = \varphi(u, u) = q(u)$ .

À ce stade, on a montré qu'il existe une forme bilinéaire symétrique dont  $q$  est la forme quadratique associée.

- L'identité du parallélogramme précédente montre l'unicité d'une telle forme bilinéaire symétrique.

### Exercice 168

#### Représentation matricielle

On suppose que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , on note  $X$  la colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  représentant  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que
 
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = {}^tXAY = X^TAY.$$
2. Caractériser sur la matrice  $A$  le fait que  $\varphi$  est symétrique, respectivement antisymétrique.
3. On suppose dans cette question que  $E = \mathbb{K}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et que  $q$  est la forme quadratique associée à  $\varphi$ .
  - a) Quelle est l'écriture matricielle de  $q(x)$  pour  $x \in \mathbb{K}^n$  ?
  - b) Montrer que  $q$  est un polynôme homogène de degré 2 en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , *i.e.* il existe  $n$  coefficients scalaires  $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  et  $\frac{n(n-1)}{2}$  coefficients scalaires  $(\beta_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$  tels que
 
$$\forall (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n, \quad q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{i,j} x_i x_j.$$
4. Dans cette question, on suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et que  $\varphi$  est symétrique.
  - a) Justifier que  $A$  est diagonalisable.
  - b) Justifier que  $\varphi$  est positive, respectivement définie positive, si, et seulement si,  $\text{Sp}(A) \subset [0; +\infty[$ , respectivement  $\text{Sp}(A) \subset ]0; +\infty[$ .
  - c) Caractériser de façon analogue le fait que  $\varphi$  est négative, respectivement définie négative.

**Solution (Ex.168 – Représentation matricielle)**

1. Montrer qu'il existe une unique matrice  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que
 
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = {}^tXAY = X^TAY.$$
  - *Analyse* – Supposons que  $A$  conviennent. En prenant des vecteurs de la base, on a :

$$\varphi(e_i, e_j) = {}^tE_iAE_j = a_{i,j}$$

Le seul candidat est la matrice  $A = (\varphi(e_i, e_j))$ , ce qui prouve déjà l'unicité en cas d'existence.

- *Synthèse* – Soit  $A = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$ .

Par le calcul précédent,  $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket, \varphi(e_i, e_j) = {}^tE_iAE_j$ .

On a alors pour  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j {}^tE_iAE_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i {}^tE_iAY = {}^tXAY \end{aligned}$$

• *Bilan* – Il existe bel et bien une unique matrice A vérifiant la propriété voulue.

2. • Comme  $\forall(i, j), a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$ , A est symétrique si  $\varphi$  est symétrique et antisymétrique si  $\varphi$  est antisymétrique.

• Réciproquement, si A est symétrique alors

$\forall(x, y) \in E^2, \varphi(y, x) = {}^tYAX = {}^tY{}^tAX = {}^t(AY)X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ , or une matrice d'ordre 1 est égale sa transposée ( $;-$ ),

$\varphi(x, y) = {}^tX{}^t({}^t(AY)) = {}^tXAY = \varphi(x, y)$ .

Donc  $\varphi$  est symétrique.

Le même calcul montre que si A est antisymétrique alors  $\varphi$  est antisymétrique.

• Donc  $\varphi$  est symétrique si, et seulement si, A est symétrique, et antisymétrique si, et seulement si, A est antisymétrique.

3. a)  $\forall x \in E, \quad q(x) = {}^tXAX$ .

b) Le calcul explicite de  ${}^tXAX$  donne

$q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} + a_{j,i})x_ix_j$ , qui fournit l'expression voulue en posant  $\alpha_i = a_{i,i}$  et  $\beta_{i,j} = a_{i,j} + a_{j,i}$ .

4. a) Par la question 2, A est symétrique réelle donc diagonalisable.

b) • Si A admet une valeur propre  $\lambda$  négative strictement avec U vecteur propre associé,

$\varphi(u, u) = {}^tUAU = \lambda{}^tUU = \lambda\|U\|^2 < 0$  donc  $\varphi$  n'est pas positive.

De même si A admet une valeur propre négative,  $\varphi$  n'est pas définie négative.

• Soit P une matrice orthogonale et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  telles que  ${}^tPAP = D$ . On a :

$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = {}^tXAX = {}^tX{}^tPD{}^tPX = {}^tYDY$  en posant  $Y = {}^tPX$ . Ainsi :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \text{ où } Y = {}^tPX.$$

Donc si  $\text{Sp}(A) \subset [0; +\infty[$ ,  $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$ .

Et si  $\text{Sp}(A) \subset ]0; +\infty[$ , non seulement  $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$ , mais en plus  $\varphi(x, x) = 0 \implies Y = 0 \implies X = 0 \implies x = 0$  puisque  $X = PY$ .

• Finalement,  $\varphi$  est positive, respectivement définie positive, si, et seulement si,  $\text{Sp}(A) \subset [0; +\infty[$ , respectivement  $\text{Sp}(A) \subset ]0; +\infty[$ .

c)  $\varphi$  est négative, respectivement définie négative, si, et seulement si,  $\text{Sp}(A) \subset ]-\infty; 0]$ , respectivement  $\text{Sp}(A) \subset ]-\infty; 0[$ .

**Exercice 169**

*Éléments de géométrie symplectique*

Et d'abord, pourquoi s'intéresser aux formes symplectiques ?

Au début du XIX-ème siècle, Lagrange a développé les méthodes dites de « variation des constantes » dans le cadre de l'étude du mouvement des planètes - il avait à la fin du siècle précédent largement contribué à l'étude des équations et systèmes différentiels par sa 'théorie générale de la variation des constantes' (1775). Si les lois de Kepler conjuguées aux principes de la mécanique de Newton permettent une détermination explicite du mouvement des planètes connaissant soit les 6 données de ses conditions initiales<sup>1</sup> soit ses 6 éléments keplériens<sup>2</sup>, le problème se corse dès que l'on souhaite tenir compte des perturbations (interactions) engendrées par la présence des autres planètes. Lagrange propose de raisonner comme si la présence d'un troisième corps (voire plus) ne remettait pas en cause le modèle général de résolution mais modifiait continuellement chacune des 6 constantes précédentes, l'expression « variation des constantes » prenant à nouveau tout son sens.

Dans ses travaux de 1808 à 1811, il observe que l'application

$$\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_{n+i} - y_i x_{n+1}$$

joue un rôle important dans la description l'étude du mouvement des planètes (avec  $n = 3$  dans ce cas particulier). Ces travaux marquent le début de l'étude des formes symplectiques et de la géométrie symplectique.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On note, pour tout  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq 2n} \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$  la colonne

représentant  $x$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

1. a) Déterminer une matrice  $J_n \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{2n})^2, \quad \omega(x, y) = X^T J_n Y.$$

b) Montrer que  $\omega$  est une forme bilinéaire antisymétrique.

c) On appelle *noyau* de  $\omega$  l'ensemble

1. Les position et vitesse initiales étant décrites chacune par 3 coordonnées nécessitent un ensemble de 6 données.

2. Lagrange retient le demi-grand axe  $a$ , la paramètre de l'ellipse  $b$ , l'époque  $c$ , l'inclinaison du plan de l'orbite  $i$  sur un plan de référence, la longitude des nœuds  $h$  et la longitude du périhélie  $k$ , autant d'éléments familiers à l'astronome... que la consultation d'un ouvrage *ad hoc* pourra expliquer.

$$\text{Ker}(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid \forall y \in \mathbb{R}^{2n}, \omega(x, y) = 0\}.$$

Montrer que  $\text{Ker}(\omega) = \{0\}$ .

On dit que  $\omega$  est *non dégénérée*.

*Une forme bilinéaire antisymétrique et non dégénérée est dite symplectique.*

2. On dit que deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  sont orthogonaux pour  $\omega$  si  $\omega(x, y) = 0$ .

Pour tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ , on appelle orthogonal pour  $\omega$  de  $F$ , ou  $\omega$ -orthogonal de  $F$ , l'ensemble noté  $F^\omega$  défini par

$$F^\omega = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}.$$

- a) Montrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{2n}$ , alors  $F^\omega$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{2n}$ .  
 b) Montrer que si  $F$  est une droite vectorielle, alors  $F \subset F^\omega$ .

*Voici qui constitue une sérieuse différence avec la notion d'orthogonalité euclidienne, i.e. pour un produit scalaire.*

3. On se propose d'établir que pour tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ ,

$$\dim(F) + \dim(F^\omega) = \dim(\mathbb{R}^{2n}) = 2n.$$

*Ce qui n'induit pas que  $F$  et  $F^\omega$  soient orthogonaux, vu l'exemple 2.b).*

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

On note  $E^*$  l'espace des formes linéaires de  $\mathbb{R}^{2n}$  :

$$E^* \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \text{ linéaire}\}$$

Cet espace vectoriel s'appelle le *dual* de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

- a) Justifier que  $\dim(E^*) = 2n$ .  
 b) On note  $F^0$  l'ensemble

$$F^0 \stackrel{\text{déf.}}{=} \{f \in E^* \mid \forall x \in F, f(x) = 0\}.$$

Justifier que  $F^0$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$ .

- c) Soit  $(u_1, \dots, u_r)$  une base de  $F$  orthonormale pour le produit scalaire canonique.

Montrer que

$$f \in F^0 \text{ si, et seulement si, } \forall i \in [[1; r]], f(u_i) = 0.$$

- d) Montrer que

$$\varphi : E^* \rightarrow \mathbb{R}^r, f \mapsto (f(u_1), \dots, f(u_r))$$

est linéaire et surjective. *On pourra s'intéresser aux applications  $f_i : u \mapsto \langle u, u_i \rangle$  par exemple...*

- e) En déduire que  $\dim(F^0) = 2n - r$ .  
 f) Montrer que l'application linéaire

$$\Omega : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow E^*, x \mapsto \Omega(x) : y \mapsto \omega(x, y)$$

est un isomorphisme.

- g) Vérifier que  $F^\omega = \Omega^{-1}(F^0)$ .  
 h) En déduire que  $\dim(F^\omega) = 2n - \dim(F)$ .
4. On appelle isométrie pour  $\omega$ , ou  $\omega$ -isométrie, tout endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  conservant  $\omega$ , *i.e.* tel que
- $$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{2n})^2, \quad \omega(f(x), f(y)) = \omega(x, y).$$
- Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $M$  la matrice représentant  $f$  dans la base canonique.  
 Montrer que  $f$  est une  $\omega$ -isométrie si, et seulement si,  $M^T J_n M = J_n$ .  
 On dit alors que  $M$  est une matrice symplectique.  
 On pourra étudier le § relatif aux « matrices symplectiques » pour étudier quelques propriétés de ces matrices.

**Solution (Ex.169 – Éléments de géométrie symplectique)**

1. a) La bilinéarité de  $\omega$  ne posant pas de problème, les calculs menés dans l'exercice précédent montrent que  $J_n = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  convient.
- b) Toujours par l'exercice précédent,  $\omega$  est une forme bilinéaire antisymétrique car  $J_n$  est antisymétrique.
- c) Supposons que  $\text{Ker}(\omega) \neq \{0\}$  et soit  $x$  un vecteur non nul de  $\text{Ker}(\omega)$ . Soit  $i \in [[1; 2n]]$  un indice tel que  $x_i \neq 0$ .  
 Si  $i \in [[1; n]]$ , alors  $\omega(x, e_{n+i}) = 1$ , ce qui est absurde.  
 Si  $i \in [[n+1; 2n]]$ , alors  $\omega(x, e_{i-n}) = -1$ , ce qui est absurde.  
 Dans tous les cas, ceci est impossible, donc  $\text{Ker}(\omega) = \{0\}$ .
2. On dit que deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  sont orthogonaux pour  $\omega$  si  $\omega(x, y) = 0$ .  
 Pour tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ , on appelle orthogonal pour  $\omega$  de  $F$ , ou  $\omega$ -orthogonal de  $F$ , l'ensemble noté  $F^\omega$  défini par
- $$F^\omega = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}.$$
- a) •  $F^\omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ .  
 •  $0 \in F^\omega$  donc  $F^\omega \neq \emptyset$ .  
 • Si  $(x, x') \in (F^\omega)^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors par bilinéarité,  $\forall y \in F$ ,  

$$\omega(x + \lambda x', y) = \omega(x, y) + \lambda \omega(x', y) = 0$$
 donc  $x + \lambda x' \in F^\omega$ .  
 • Donc  $F^\omega$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{2n}$ .
- b) Soit  $u \neq 0$  et  $F = \text{Vect}(u)$ . Soit  $x \in F$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $x = \lambda u$ .  
 Alors  $\forall \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\omega(x, \mu u) = \lambda \mu \omega(u, u) = 0$ , donc  $\forall y \in F$ ,  $\omega(x, y) = 0$ . Donc  $x \in F^\omega$ .  
 Ainsi  $F \subset F^\omega$ .

3. a)  $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}) = \dim(\mathbb{R}^{2n}) \dim(\mathbb{R}) = 2n \times 1 = 2n$ .  
 b)  $F^0$  contient la forme linéaire nulle, et si  $f$  et  $g$  sont dans  $F^0$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$ , alors

$$\forall x \in F, (\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = 0.$$

Donc  $\lambda f + g$  est dans  $F^0$ .

$F^0$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E^*$ .

- c) • L'implication provient de la définition de  $F^0$  puisque  $(\forall i), u_i \in F$ .  
 • La réciproque provient de la linéarité de  $f$  et du fait que  $(u_i)_{1 \leq i \leq r}$  est une base de  $F$  (tout vecteur de  $F$  est combinaison linéaire des  $u_i \dots$ ).  
 d) La linéarité de  $\varphi$  est banale.

Pour tout  $i$  dans  $[[1; r]]$ ,  $f_i : u \mapsto \langle u, u_i \rangle$  est une forme linéaire telle que  $\varphi(f_i) = b_i$ ,  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^r$  car  $f_i(u_j) = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$  (de l'intérêt de prendre une base orthonormale...).

Donc :  $\forall i \in [[1; r]], b_i \in \text{Im}(\varphi)$  et  $\text{Vect}((b_i)_{1 \leq i \leq r}) = \mathbb{R}^r$ , donc  $\mathbb{R}^r \subset \text{Im}(\varphi)$ , donc  $\varphi$  est surjective.

- e) Par la formule du rang,

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2n - \dim(\text{Im}(\varphi)) = 2n - r.$$

Or par c),  $\text{Ker}(\varphi) = F^0$ . Donc  $\dim(F^0) = 2n - r$ .

- f) •  $\dim(E) = \dim(E^*)$ .

• Supposons  $\Omega(x) = 0$ . Alors :  $\forall y \in \mathbb{R}^{2n}, \omega(x, y) = 0$ . Donc  $x = 0$  car  $\omega$  est non dégénérée (voir question 1).

Donc  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$  et  $\varphi$  est injective.

• Par l'égalité des dimensions,  $\varphi$  est bijective : c'est un isomorphisme.

- g)  $F^\omega = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}$   
 $= \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid \forall y \in F, \Omega(x)(y) = 0\}$   
 $= \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid \Omega(x) \in F^0\}$   
 $= \Omega^{-1}(F^0)$

- h) Comme  $\Omega^{-1}$  est un isomorphisme (réciproque de l'isomorphisme  $\Omega$ ), il conserve la dimension.

Donc  $\dim(F^\omega) = \dim(F^0) = 2n - r = 2n - \dim(F)$ .

4. • Si  $M^T J_n M = J_n$  alors  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{2n})^2$

$$\omega(f(x), f(y)) = (MX)^T J_n MY = X^T M^T J_n MY = X^T J_n Y = \omega(x, y).$$

Donc  $f$  est une  $\omega$ -isométrie.

• Si  $f$  est une  $\omega$ -isométrie. Alors pour tout  $(i, j)$  dans  $[[1; 2n]]^2$ ,

$$\omega(e_i, e_j) = E_i^T J_n E_j = (J_n)_{i,j} \text{ et par isométrie}$$

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f(e_i), f(e_j)) = E_i^T (M^T J_n M) E_j = (M^T J_n M)_{i,j},$$

donc  $M^T J_n M = J_n$ .

• Ainsi,  $f$  est une  $\omega$ -isométrie si, et seulement si,  $M^T J_n M = J_n$ .



# Chapitre 52

## Matrices symétriques positives et strictement positives

☞[CCP – 2020 – PC – Exo no2]☞[E3A-M1 – 2018 – PSI – Exo no1]

**Définition – Matrices symétriques positives & strictement positives, et racines carrées**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On note  $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $E$ . On munit  $E$  du produit scalaire canonique :

$$\forall (X, Y) \in E, \quad (X | Y) = {}^tXY.$$

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques  $S$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que :

$$\forall X \in E, \quad {}^tXSX \geq 0.$$

On note  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques  $S$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que :

$$\forall X \in E \setminus \{0\}, \quad {}^tXSX > 0.$$

### Exercice 170

*Quelques observations*

Justifier les propriétés suivantes.

1. Si  $S$  est symétrique,  $\forall X \in E$ ,  ${}^tXSX = (SX | X) = (X | SX)$ .
2. *Sur un excellent moyen de récupérer les coefficients d'une matrice par un produit matriciel.*  
Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  quelconque.  $\forall (i, j) \in [[1; n]]^2$ ,  ${}^tE_iME_j = m_{i,j}$ .
3. Si  $P$  est une matrice de projecteur orthogonal distincte de  $I_n$ , alors  $P \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  mais  $P \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .
4. Si  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  n'est pas inversible, alors  $S \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .
5. **Fake news** –  
Si  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , voire  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors les coefficients de  $S$  sont tous positifs, voire strictement positifs ... **NON!**

Par exemple, soit  $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ . Alors :  $\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$${}^tXSX = (x \ y) \begin{pmatrix} x - y \\ -x + 5y \end{pmatrix} = x^2 - 2xy + 5y^2 = (x - y)^2 + 4y^2 > 0 \dots$$

**Solution (Ex.170 – Quelques observations)**

1.  $(SX | X) = {}^t(SX)X = {}^tX {}^tSX = {}^tXSX = (X | SX)$
2.  $ME_j$  donne la  $j$ -ème colonne de  $M$ , et en multipliant à gauche par  $E_i$ , on récupère son  $i$ -ème coefficient.
3. •  $P$  vérifie  $P^2 = P$  (projecteur) et  ${}^tP = P$  (projecteur orthogonal donc endomorphisme symétrique).

$$\forall X \in E, \quad {}^tXPX \stackrel{{}^tPP=P^2=P}{{}^tPP=P^2=P} {}^tX({}^tPP)X = {}^t(PX)(PX) = \|PX\|^2 \geq 0.$$

Donc  $X \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

• Mais si je prends  $X \in \ker(P)$  avec  $X \neq 0$ ,

$${}^tXPX = {}^tX \times 0 = 0 \text{ bien que } X \neq 0.$$

Donc  $X \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

4. D'ailleurs plus généralement, si  $S$  n'est pas inversible, alors en prenant  $X \in \ker(S) \setminus \{0\}$ , on a :  ${}^tXSX = {}^tX \times 0 = 0$ , donc  $S \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

### Exercice 171

*Fabriquer des matrices symétriques positives et strictement positives pour pas cher*

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $S = {}^tAA$ .

1. Montrer que  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

2. Montre que, si de plus A est inversible, alors  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Solution (Ex.171 – Fabriquer des matrices symétriques positives et strictement positives)**

1.  ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA {}^t({}^tA) = {}^tAA = S$  donc  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .  
 $\forall X \in E, \quad {}^tXSX = {}^tX {}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2 \geq 0$  donc  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .
2. Si de plus A est inversible, alors  
 ${}^tXSX = 0 \implies \|AX\|^2 = 0 \implies AX = 0 \xrightarrow{A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})} X = 0$ , donc  
 $\forall X \in E, (X \neq 0) \implies {}^tXSX > 0$  donc  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

### Exercice 172

*Caractérisation par les valeurs propres*

Où on apprend que le signe (strict) des valeurs propres est primordial dans cette histoire.

Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On sait déjà que S est diagonalisable. Démontrer les équivalences suivantes :

1.  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  si, et seulement si,  $\text{Sp}(S) \subset [0; +\infty[$ .
2.  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  si, et seulement si,  $\text{Sp}(S) \subset ]0; +\infty[$ .

**Observation** – Sur l'exemple « fake news »,  $\chi_S = X^2 - 6X + 4$ , le produit des valeurs propres vaut 4 donc elles sont de même signe, et la somme vaut 6 donc elles sont strictement positives, donc  $S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ . Notez que je n'ai pas déterminé les valeurs propres pour conclure (pour info  $\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = 3 \pm \sqrt{5} > 0$ ).

**Solution (Ex.172 – Caractérisation par les valeurs propres)**

Par le théorème spectral, il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  (orthogonale, dit le théorème spectral) telle que  ${}^tPSP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Soit  $X \in E$ . On a :  ${}^tXSX = {}^tXPD {}^tPX = {}^t({}^tPX)D({}^tPX)$

Posons alors  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tPX$  (on va jusqu'au bout du changement de

base...) Alors

$${}^tXSX = {}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Voilà qui nous donne déjà le sens indirect :-)

1. Si les  $\lambda_i$  sont tous positifs, alors  ${}^tXSX \geq 0$ .
2. Si les  $\lambda_i$  sont tous strictement positifs, alors si  $X \neq 0$ , on a aussi  $Y \neq 0$  car  $X = PY$ , et du coup l'un des  $y_i$  au moins est non nul, donc  ${}^tXSX > 0$ .

*Et pour le sens direct ?*

Soit  $i \in [[1; n]]$ . Prenons  $Y = E_i$  et  $X = PY$ , de sorte que

$${}^tXSX = {}^tYDY = {}^tE_iDE_i = D_{i,i} = \lambda_i$$

3. Si  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , alors  ${}^tXSX \geq 0$  donc  $\lambda_i \geq 0$ .
4. Si  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors comme  $Y \neq 0$  entraîne  $X = {}^tPY \neq 0$ , on a :  ${}^tXSX > 0$  donc  $\lambda_i > 0$ .

*Pour le sens direct, il y a une variante accessible et assez immédiate, qui montre bien aussi le lien avec le signe des valeurs propres.*

Soit  $X$  un vecteur propre associé à une valeur propre  $\lambda$  de  $S$ .

$${}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2 \text{ avec } \|X\| \neq 0.$$

Ce qui induit :

5.  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \implies {}^tXSX \geq 0 \implies \lambda \geq 0$ .
6.  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \implies {}^tXSX > 0 \implies \lambda > 0$ .

**Exercice 173**

*Application à la recherche de racines carrées*

Justifier les propriétés suivantes.

1. *Existence* –  
Pour toute matrice  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , il existe une matrice  $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $R^2 = S$ .
2. *Unicité dans  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$*  –  
Pour toute matrice  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , il existe une unique matrice  $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $R^2 = S$ .

**Solution** (**Ex.173** – *Application à la recherche de racines carrées*)

1. *Cette propriété est en fait vraie pour toute matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont positives.*

Puisque  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}SP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ avec } \forall i, \lambda_i \geq 0.$$

Prenons

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

de sorte que  $\Delta^2 = D$ . En posant  $R = P\Delta P^{-1}$ , on a

$$R^2 = P\Delta^2P^{-1} = PDP^{-1} = S$$

donc  $R$  est une racine carrée de  $S$ .

2. Dans ce qui précède, il n'y a pas unicité car toutes les

$$\Delta = \text{diag}(\pm\sqrt{\lambda_1}, \dots, \pm\sqrt{\lambda_n})$$

conviennent. De plus,  $R = P\Delta P^{-1}$  est à valeurs propres positives (les  $\sqrt{\lambda_i}$ ) mais pas nécessairement symétrique.

Au lieu de prendre  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  quelconque, je prends  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  en appliquant le théorème spectral, et je choisis encore  $R = P\Delta^t P$ . Ainsi :

- ${}^t R = {}^t(P\Delta^t P) = P^t \Delta^t P = R$  ( $\Delta$  est diagonale!) donc  $R$  est symétrique ;
- $\text{Sp}(R) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset ]0; +\infty[$  donc finalement  $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .
- Montrons maintenant l'unicité.

(i) *Commençons par l'unicité pour les matrices diagonales.*

Soit  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ . Montrons que  $\Delta$  est l'unique matrice de  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $\Delta^2 = D$ .

Soit  $N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $N^2 = D$ .

(a) Soit  $\mu \in \text{Sp}(N)$  et  $Y$  un vecteur propre de  $N$  associé à  $\mu$ .

Alors  $DY = N^2Y$  donc :  $\forall i \in [[1; n]], \lambda_i y_i = \mu^2 y_i$ . Comme  $D$  et  $N$  sont dans  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ,  $\lambda_i \geq 0$  et  $\mu \geq 0$ , donc  $\sqrt{\lambda_i} y_i = \mu y_i$ .

Donc  $\mu Y = \Delta Y$ , donc  $NY = \Delta Y$ .

(b) Soit maintenant une base  $(Y_1, \dots, Y_n)$  de vecteurs propres de  $N$ , alors :  $\forall j \in [[1; n]], NY_j = \Delta Y_j$ . Les endomorphismes représentés par  $N$  et  $D$  coïncident sur une base, donc sont égaux. Donc  $N = \Delta$ .

(ii) *Montrons alors l'unicité de la racine  $R$  de  $S$ .*

Supposons que  $U \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  vérifie  $U^2 = S$ . Soit  $N = {}^t P U P$ .

Alors :  $N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et  $N^2 = {}^t P S P = D$ , donc  $N = \Delta$ .

Donc  $U = P N {}^t P = P \Delta {}^t P = R$ . *Cqfd.*



# Chapitre 53

## Commutant et racines carrées d'une matrice carrée

☞[CS-M1 – 2018 – PSI – Partie III] ☞[CS-M2 – 2019 – PSI – ]

**Définition – Commutant et racine carrée d'une matrice**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On appelle commutant de  $A$ , noté ici  $\mathcal{C}(A)$ , l'ensemble

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}.$$

On appelle racine carrée de  $A$  toute matrice  $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$R^2 = A.$$

### Exercice 174

*Propriétés générales*

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Montrer que  $\mathcal{C}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
2. Montrer que si  $R$  est une racine carrée de  $A$ , alors  $R \in \mathcal{C}(A)$ .

**Solution (Ex.174 – Propriétés générales)**

1.  $0 \in \mathcal{C}(A)$  et  $(M, N) \in \mathcal{C}(A)^2 \implies A(\lambda M + N) = (\lambda M + N)A$ .
2.  $RA = R.R^2 = R^3 = R^2.R = AR$

### Exercice 175

*Cas des matrices diagonalisables*

On suppose que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable et on choisit  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonale telles que  $P^{-1}AP = D$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Justifier les équivalences suivantes :

1.  $M \in \mathcal{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D),$
2.  $M^2 = A \iff (P^{-1}MP)^2 = D.$

*Autrement dit, la recherche du commutant de A ou des racines carrées se ramène à la recherche du commutant de D ou des racines carrées de D.*

**Solution (Ex.175 – Cas des matrices diagonalisables)**

1.  $MA = AM \iff P^{-1}MPP^{-1}AP = P^{-1}APP^{-1}MP \iff P^{-1}MPD = DP^{-1}MP.$
2.  $M^2 = A \iff P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \iff (P^{-1}MP)^2 = D.$

**Exercice 176**

*Cas des matrices diagonales*

Soit  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  une matrice diagonale (ses valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont ses coefficients diagonaux!).

1. a) Montrer que si ses coefficients diagonaux sont **deux à deux distinctes** alors

(i)  $\Delta$  commute avec D si, et seulement si,  $\Delta$  est diagonale, *i.e.*

$$\mathcal{C}(D) = \{\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n), (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n\} = \text{Vect}\{E_{i,i}, i \in [[1; n]]\}.$$

(ii) R est une racine carrée de D si, et seulement si,

$$R = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \text{ avec } \forall i \in [[1; n]], \mu_i^2 = \lambda_i.$$

- b) Dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , à quelle condition nécessaire et suffisante D admet-elle au moins une racine carrée ?

Dans ce cas, décrire ces racines carrées et les dénombrer.

La suite est entre l'exercice et la méditation...

*... présentation non académique...*

2. **MAIS** si deux coefficients diagonaux sont égaux, alors ces résultats sont faux, **exemples à méditer**

(i)  $\mathcal{C}(I_2) = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ... *évidence,*

$$\forall a \in \mathbb{K}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \textit{nilpotentisme},$$

(ii) Dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,

$\forall \theta \in ]-\pi; \pi], S = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$  vérifie  $S^2 = I_2$ ...symétries orthogonales.

Et ce ne sont pas les seules possibilités, par exemple :

$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $S_a \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a+1 & 2a \\ -2 & -a-1 \end{pmatrix}$  vérifie  $S_a^2 = I_2$ .

(iii) Et les coefficients strictement négatifs ne sont plus rédhibitoires, y compris dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\left( \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

3. S'il y a deux coefficients diagonaux identiques (au moins), on peut raisonner par blocs.

Par exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ admet par exemple pour racines carrées}$$

(i) les  $R_\theta = \left( \begin{array}{cc|c} \sqrt{2} \cos \theta & \sqrt{2} \sin \theta & 0 \\ \sqrt{2} \sin \theta & -\sqrt{2} \cos \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm\sqrt{3} \end{array} \right)$  avec  $\theta \in ]-\pi; \pi]$ ,

(ii) les  $T_a = \left( \begin{array}{c|c} \sqrt{2}S_a & 0 \\ \hline 0 & \pm\sqrt{3} \end{array} \right)$  avec  $a \neq 1$ .

**Solution (Ex.176 – Cas des matrices diagonales)**

1. a) (i) Soit  $M = (m_{i,j})$ . Alors  $MD = (\lambda_j m_{i,j})$  et  $DM = (\lambda_i m_{i,j})$ , donc  $MD = DM \iff \forall i, j, \lambda_j m_{i,j} = \lambda_i m_{i,j} \iff \forall i, j, (\lambda_j - \lambda_i) m_{i,j} = 0$   
 or :  $\forall i \neq j, \lambda_j - \lambda_i \neq 0$ , donc  $MD = DM \iff \forall i \neq j, m_{i,j} = 0$

*Cqfd.*

(ii) On sait que  $R^2 = D$  entraîne que  $R \in \mathcal{C}(D)$  donc  $R$  est diagonale :  $R = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ . Alors  $R^2 = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$  amène aux conclusions.

- b) En particulier si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $D$  admet des racines carrées si, et seulement si, ses  $n$  valeurs propres sont positives ou nulles, et dans ce cas

$$R^2 = D \iff R = \text{diag}(\pm\sqrt{\lambda_1}, \dots, \pm\sqrt{\lambda_n}).$$

Ce qui donne  $2^{(\text{nombre de } \lambda \text{ strictement positives})}$  racines carrées.

2. (ii) Soit  $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $S^2 = I_2$ . Alors  $S$  est une matrice de symétrie et toute matrice de symétrie convient. Donc les symétries orthogonales conviennent.

Mais pas seulement : voici<sup>1</sup> la matrice de la symétrie d'axe  $(1, a)$  et de direction  $(1, 1)$  (pourvu que  $a \neq 1$ )

$$S_a = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a+1 & 2a \\ -2 & -a-1 \end{pmatrix}.$$

(iii) L'idée n'est pas artificielle si je vois  $-I_2$  comme la matrice  $R_\pi$  de la rotation d'angle  $\pi$ .

On sait que  $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ , donc

$$-I_2 = R(\pi) = R_{\pi/2}^2 = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2.$$

---

1. Exercice : vérifier cette affirmation.

# Chapitre 54

## Matrices symplectiques

☞[CS-M1 – 2020 – PC – ]☞[MP-M2 – 2015 – PSI – ]

Pour comprendre l'origine des questions posées par les exercices suivants, on pourra travailler l'exercice « éléments de géométrie symplectique » du paragraphe « formes bilinéaires et formes quadratiques ».

Dans toute cette partie,  $n$  désigne un entier de  $\mathbb{N}^*$  et le corps des scalaires est  $\mathbb{R}$ .

**Définition** –

On note  $J_n$  ou plus simplement  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  définie par

$$J_n = J \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  est dite **symplectique** si, et seulement si,

$${}^tMJM = J.$$

L'ensemble des matrices symplectiques est noté  $\mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$  :

$$\mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), {}^tMJM = J\}.$$

<b>Exercice 177</b>
---------------------

<i>Matrices symplectiques de <math>\mathcal{M}_2(\mathbb{R})</math></i>
---

Dans cet exercice uniquement,  $n = 1$ .

1. Montrer que  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  appartient à  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  si, et seulement si, son déterminant vaut 1.
2. Soit  $M$  une matrice orthogonale de taille  $2 \times 2$ . On note  $C_1, C_2 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  les deux colonnes de  $M$ . Montrer l'équivalence :  
 $M$  est symplectique si, et seulement si,  $C_2 = -JC_1$ .
3. Soit  $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  de norme 1. Montrer que la matrice constituée des colonnes  $X_1$  et  $-J_1X_1$  est à la fois orthogonale et symplectique.
4. Soit  $M$  une matrice de taille  $2 \times 2$  symétrique et symplectique.
  - a) Montrer que  $M$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont inverses l'une de l'autre.
  - b) Montrer qu'il existe une matrice  $P$  à la fois orthogonale et symplectique telle que  $P^{-1}MP$  soit diagonale.
5. Déterminer les matrices de taille  $2 \times 2$  à la fois antisymétriques et symplectiques et montrer qu'elles ne sont pas diagonalisables dans  $\mathbb{R}$ .

**Solution (Ex.177 – Matrices symplectiques de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ )**

1.  ${}^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ad + bc \\ ad - bc & 0 \end{pmatrix}$  donc  $M$  est symplectique si, et seulement si,  $\det(M) = 1$ .

2. Soit  $C_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . La question précédente et la structure de  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  permettent d'écrire

$$M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \iff M \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \iff C_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \iff C_2 = -JC_1.$$

3. Soit  $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  de norme 1, disons  $X_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  avec  $a^2 + b^2 = 1$ .

$$M = (X_1 | -JX_1) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \text{ donc } M \text{ est à la fois orthogonale et symplectique.}$$

4. Soit  $M$  une matrice de taille  $2 \times 2$  symétrique et symplectique.
  - a)  $M$  est symétrique réelle donc diagonalisable. Écrivons  $\chi_M = (X - \lambda)(X - \mu) = X^2 - (\lambda + \mu)X + \lambda\mu = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M)$ . Par unicité des coefficients d'un polynôme,  $\lambda\mu = \det(M)$ . Et comme  $M$  est symplec-

tique,  $\det (M) = 1$  donc les deux valeurs propres de  $M$  sont inverses l'une de l'autre.

- b) Par le cours, il existe une matrice  $P$  orthogonale dont les colonnes sont des vecteurs propres de  $M$ . Comme  $P$  est orthogonale,  $\det (P) = \pm 1$ . Si  $\det (P) = -1$ , on permute les colonnes de  $P$ , et alors  $P$  demeure orthogonale (ses colonnes forment une base orthonormale),  $\det (P) = 1$  donc  $P$  est symplectique, et  $P^{-1}MP$  est diagonale puisque les colonnes de  $P$  forment une base de vecteurs propres de  $M$ .

5. • Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  antisymétrique. Il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ .

Supposons de plus  $M$  symplectique. Alors  $\det (M) = 1$  entraîne  $a^2 = 1$ , donc  $a = \pm 1$ , donc  $M = J$  ou  $M = -J$ .

Réciproquement,  $J$  et  $-J$  sont à la fois antisymétriques et symplectiques.

Les seules matrices antisymétriques et symplectiques de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  sont  $J$  et  $-J$ .

- $\chi_{\pm J} = X^2 + 1$  donc  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\pm J) = \emptyset$  et  $\pm J$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 178

#### *Premières propriétés des matrices symplectiques*

0

1. a) Calculer  $J^2$  et  ${}^tJ$  en fonction de  $I_{2n}$  et  $J$ .  
 b) Montrer que  $J$  est inversible et expliciter son inverse.  
 c)  $J$  est-elle symplectique ?
2. a) Vérifier que pour tout réel  $\alpha$  la matrice  $K(\alpha) \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{bmatrix}$  est symplectique.  
 b) Pour tout  $U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ , vérifier que  $L_U \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{bmatrix} U & 0_n \\ 0_n & {}^tU^{-1} \end{bmatrix}$  est symplectique
3. L'ensemble  $\mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  ?
4. Montrer que si  $M \in \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ , alors  $\det (M) = \pm 1$ .
5. a) Montrer que le produit de deux éléments de  $\mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$  est un élément de  $\mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ .  
 b) Montrer qu'un élément de  $\mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$  est inversible et que son inverse appartient  $\mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ .

c) Montrer que si  $M \in \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$  alors  ${}^tM \in \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ .

6. Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  écrite par blocs sous la forme

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ avec } A, B, C \text{ et } D \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Déterminer des relations sur  $A, B, C,$  et  $D$  caractérisant l'appartenance de  $M$  à  $\mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ .

**Solution (Ex.178 – Premières propriétés des matrices symplectiques)**

1. a)  $J^2 = -I_{2n}$  et  ${}^tJ = -J$ .

b)  $J(-J) = I_{2n}$  donc  $J$  est inversible et  $J^{-1} = -J = {}^tJ$ . On pouvait aussi remarquer que les colonnes de  $J$  forment une base orthonormale de  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ , ce qui fait de  $J$  une matrice orthogonale.

c)  ${}^tJJJ = J^{-1}JJ = J$  donc  $J$  est symplectique.

2. a) Tous les blocs intervenants sont de taille  $n \times n$  donc permettent le produit par blocs. On vérifie sans peine que  ${}^tK(\alpha)JK(\alpha) = J$ , donc  $K(\alpha)$  est symplectique.

b) À nouveau, tous les blocs intervenants sont de taille  $n \times n$  donc permettent le produit par blocs.

$${}^tL_U J L_U = \begin{bmatrix} 0 & -{}^tU {}^t(U^{-1}) \\ U^{-1}U & 0 \end{bmatrix}$$

or lorsqu'une matrice est inversible, sa transposée l'est aussi et l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse, donc  ${}^tL_U J L_U = J$  et  $L_U$  est symplectique.

3.  ${}^t0J0 = 0 \neq J$  donc  $0 \notin \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$  donc  $\mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ .

4. Soit  $M \in \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ . Alors  $\det(J) = \det({}^tM J M) = \det({}^tM) \det(J) \det(M) = \det(M)^2 \det(J)$  or  $\det(J) \neq 0$  ( $J$  est inversible), donc  $\det(M)^2 = 1$ , donc  $\det(M) = \pm 1$ .

5. a) Soit  $(M, N) \in \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})^2$ .

$${}^t(MN)JMN = {}^tN({}^tM J M)N = {}^tN J N = J, \text{ donc } MN \in \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R}).$$

b) • Si  $M \in \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ , alors  $\det(M) = \pm 1 \neq 0$  donc  $M$  est inversible.

• Soit  $M \in \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} {}^tM J M = J &\implies ({}^tM)^{-1} {}^tM J M M^{-1} = ({}^tM)^{-1} J M^{-1} \\ &\implies J = {}^t(M^{-1}) J M^{-1} \implies M^{-1} \in \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

c) Soit  $M \in \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ .  $M$  est inversible et  ${}^t(M^{-1}) J M^{-1} = J$ . Inversons cette relation (toutes les matrices étant inversibles!) :

$MJ^{-1}{}^tM = J^{-1}$ , et comme  $J^{-1} = -J$ ,  $MJ^tM = J$ , relation qui montre que  ${}^tM \in \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ .

6. Tous les blocs sont de taille  $n \times n$  donc par produit par blocs

$${}^tMJM = \begin{bmatrix} {}^tCA - {}^tAC & {}^tCB - {}^tAD \\ {}^tDA - {}^tBC & {}^tDB - {}^tBD \end{bmatrix}$$

Comme  ${}^t({}^tCB - {}^tAD) = -({}^tDA - {}^tBC)$ , on en déduit

$$M \in \mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} {}^tCA - {}^tAC = 0_n \\ {}^tDA - {}^tBC = I_n \\ {}^tDB - {}^tBD = 0_n \end{cases}$$

### Exercice 179

*Déterminant d'une matrice symplectique*

Dans cet exercice, on se propose de démontrer que le déterminant d'une matrice symplectique vaut 1.

Soit  $M$  dans  $\mathcal{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$  que l'on décompose sous forme de matrices blocs

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ avec } A, B, C \text{ et } D \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Dans tout cet exercice, les matrices  $A, B, C, D$  sont les matrices de cette décomposition.

1. On suppose dans cette question que  $D$  est inversible.

a) Montrer qu'il existe quatre matrices  $Q, U, V, W$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$\begin{bmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

b) En utilisant la dernière question de l'exercice précédent, vérifier que  $BD^{-1}$  est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det({}^tAD - {}^tCB) = 1.$$

On suppose dorénavant  $D$  non inversible.

2. Soit  $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  ${}^tPQ$  soit symétrique.

On suppose qu'il existe deux réels différents  $s_1, s_2$  et deux vecteurs  $V_1, V_2$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tels que :

$$(Q - s_1P)V_1 = (Q - s_2P)V_2 = 0.$$

Montrer que le produit scalaire (canonique)  $\langle QV_1, QV_2 \rangle$  est nul.

3. Montrer que  $\text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D) = \{0\}$ .
4. a) Soit  $m$  un entier naturel non nul. On suppose qu'il existe  $s_1, \dots, s_m$  des réels non nuls et deux à deux distincts et  $V_1, \dots, V_m$  des vecteurs non nuls tels que
- $$\text{pour tout } i \in \llbracket 1; m \rrbracket, \quad (D - s_i B)V_i = 0.$$
- Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$ ,  $DV_i$  est non nul et que la famille  $(DV_i, i \in \llbracket 1; m \rrbracket)$  forme une famille libre de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .
- b) En déduire qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que  $D - \alpha B$  soit inversible.
- c) Montrer alors que  $\det({}^t M) = 1$ . On pourra exploiter la matrice  $K(\alpha)$  de l'exercice précédent.

**Solution (Ex.179 – Déterminant d'une matrice symplectique)**

1. On suppose dans cette question que  $D$  est inversible.
- a) Montrer qu'il existe quatre matrices  $Q, U, V, W$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$\begin{bmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Toujours par produit de blocs compatibles

$$\begin{bmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U + QV & QW \\ V & W \end{bmatrix}$$

Comme  $D$  est inversible, il suffit de prendre

$$V = C, W = D, Q = BD^{-1} \text{ et } U = A - BD^{-1}C.$$

- b) En utilisant la dernière question de l'exercice précédent, vérifier que  $BD^{-1}$  est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det({}^t AD - {}^t CB) = 1.$$

- D'après l'exercice précédent, comme  $M$  est symplectique,  ${}^t DB = {}^t BD$ . En multipliant par  $D^{-1}$  à droite et  ${}^t(D^{-1})$  à gauche,  $BD^{-1} = {}^t(D^{-1}){}^t B$ , *i.e.*  $BD^{-1} = {}^t(BD^{-1})$ .

- Et en faisant apparaître des déterminants triangulaires par blocs

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \left( \begin{bmatrix} I_n & BD^{-1} \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0_n \\ C & D \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} I_n & BD^{-1} \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \right) \det \left( \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0_n \\ C & D \end{bmatrix} \right) \\ &= \det(A - BD^{-1}C) \det({}^t D) = \det({}^t A - {}^t CBD^{-1}) \det(D) \\ &= \det({}^t AD - {}^t CBD^{-1}D) = \det({}^t AD - {}^t CB) \end{aligned}$$

or  ${}^t AD - {}^t CB = {}^t({}^t DA - {}^t BC) = {}^t I_n = I_n$  toujours par l'exercice précédent, donc

$$\det(M) = \det(I_n) = 1.$$

On suppose dorénavant  $D$  non inversible.

2. Soit  $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  ${}^tPQ$  soit symétrique.

On suppose qu'il existe deux réels différents  $s_1, s_2$  et deux vecteurs  $V_1, V_2$  non nuls dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tels que :

$$(Q - s_1P)V_1 = (Q - s_2P)V_2 = 0.$$

Montrer que le produit scalaire (canonique)  $\langle QV_1, QV_2 \rangle$  est nul.

$$\langle QV_1, QV_2 \rangle = \langle s_1PV_1, QV_2 \rangle = s_1 {}^tV_1 {}^tPQV_2$$

$$\langle QV_1, QV_2 \rangle = \langle QV_1, s_2PV_2 \rangle = s_2 {}^tV_1 {}^tQP V_2 = s_2 {}^tV_1 {}^tPQV_2 \text{ par symétrie de } {}^tPQ.$$

$$\text{Donc } (s_2 - s_1)V_1 {}^tPQV_2 = 0, \text{ et comme } s_2 \neq s_1, {}^tV_1 {}^tPQV_2 = 0.$$

$$\text{Donc } \langle QV_1, QV_2 \rangle = 0.$$

3. Soit  $V \in \text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D)$ . Alors  $M \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BV \\ DV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$$\text{Comme } M \text{ est symplectique donc inversible, } \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ donc}$$

$$V = 0.$$

Comme  $0 \in \text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D)$  (qui est un espace vectoriel), on a

$$\text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D) = \{0\}.$$

4. Soit  $m$  un entier tel que  $m \leq n$ . Soit  $s_1, \dots, s_m$  des réels non nuls et deux à deux distincts et  $V_1, \dots, V_m$  des vecteurs non nuls tels que

$$\text{pour tout } i \in [[1; m]], (D - s_iB)V_i = 0.$$

- a) • Soit  $i \in [[1; m]]$ . Comme  $DV_i = s_iBV_i$  avec  $s_i \neq 0$ , si  $DV_i = 0$  alors  $BV_i = 0$  donc  $V_i \in \text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D)$  donc  $V_i = 0$ , ce qui est impossible. Donc  $DV_i \neq 0$ .

- Notons que, puisque  $M$  est symplectique,  ${}^tBD = {}^tDB$  donc  ${}^tBD$  est symétrique.

En appliquant le résultat de la question 2), on voit que, dès que  $i \neq j$ ,  $DV_i \perp DV_j$ . Donc la famille  $(DV_i, i \in [[1; m]])$  est une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls, donc une famille libre de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

- b) Supposons que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $D - \alpha B$  soit non inversible. Alors

$$\forall i \in [[1; n+1]], \exists V_i \neq 0 \text{ tel que } (D - iB)V_i = 0.$$

D'après la question précédente, la famille  $(DV_i, i \in [[1; n+1]])$  est une famille libre de  $n+1$  vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , lui-même de dimension  $n$ , ce qui est impossible.

Donc il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $D - \alpha B$  soit non inversible.

c) Prenons  $\alpha$  tel que  $D - \alpha B$  soit inversible.

$K(\alpha)M = \begin{bmatrix} A & B \\ -\alpha A + C & -\alpha B + D \end{bmatrix}$  est symplectique car  $K(\alpha)$  et  $M$  le sont, et  $-\alpha B + D$  est inversible. Donc on peut appliquer la première question à  $K(\alpha)M$  :

$$\det(K(\alpha)M) = 1, \text{ donc } \det(K(\alpha)) \det(M) = 1.$$

Or  $\det(K(\alpha)) = 1$ , donc  $\det(M) = 1$ .

## Chapitre 55

# Théorème des moindres carrés et application aux ajustements polynomiaux

*Lorsqu'un système linéaire à  $n$  équations et  $p$  inconnues*

$$AX = B, \text{ où } X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \text{ et } A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

*n'admet pas de solution, on peut chercher le vecteur  $X$  qui minimise*

$$\|AX - B\|,$$

*on parle alors parfois de « pseudo-solution ».*

*Évidemment, cela présuppose qu'on s'est donné une norme. La norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  associée au produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est bien adaptée à ce problème de minimisation grâce à la propriété de meilleure approximation en norme. Avant d'exposer le théorème général, on commence par donner un procédé systématique pour déterminer la matrice d'une projection orthogonale.*

### Exercice 180

*Formules pour les matrices de projections orthogonales*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire canonique noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Pour  $X \in E$ ,  $X^T$  désigne la transposée de  $X$ . Soit  $d \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $d$ .

1. On suppose que  $(U_1, \dots, U_d)$  une base orthonormale de  $F$ .

$$\text{Soit } M = \sum_{i=1}^d U_i U_i^T.$$

Montrer que  $M$  représente la projection orthogonale sur  $F$  dans la base canonique de  $E$ .

2. On suppose que  $(C_1, \dots, C_d)$  une base quelconque de  $F$  et on note  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$  donc les colonnes sont  $C_1, \dots, C_d$ .

a) Montrer que, pour tout  $X$  de  $E$ ,

i –  $X \in F \iff \exists Y \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), AY = X,$

ii –  $X \in F^\perp \iff A^T X = 0.$

b) Montrer que  $A^T A$  est une matrice inversible. *On pourra déterminer  $\text{Ker}(A^T A)$ .*

c) Soit  $M = A(A^T A)^{-1} A^T$ .

Montrer que  $M$  représente la projection orthogonale sur  $F$  dans la base canonique de  $E$ .

3. *Application - Impératif d'utiliser ce qui précède!* Déterminer la matrice de la projection orthogonale de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  sur le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x + y + z = 0$

a) en utilisant une base quelconque de  $F$ ,

b) en utilisant une base orthonormale de  $F$ .

**Solution** (Ex.180 – *Formules pour les matrices de projections orthogonales*)

1.  $\forall X \in E,$

$$MX = \sum_{i=1}^d U_i U_i^T X = \sum_{i=1}^d U_i \langle U_i, X \rangle = \sum_{i=1}^d \langle X, U_i \rangle U_i = p_F(X)$$

d'après la propriété du cours, puisque  $(U_1, \dots, U_d)$  est une base orthonormale de  $F$ .

2. a) i – Il suffit d'observer que si  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}$ , alors

$$AY = \sum_{i=1}^d y_i C_i.$$

Comme  $(C_1, \dots, C_d)$  est une base de  $F$ , donc une famille génératrice, on a bien :

$$X \in F \iff \exists Y \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), AY = X.$$

---

ii – Pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $A^T X = \begin{pmatrix} \langle C_1, X \rangle \\ \vdots \\ \langle C_d, X \rangle \end{pmatrix}$ .

Comme  $(C_1, \dots, C_d)$  est une base de  $F$ ,  $A^T X = 0 \iff X \in F^\perp$ .

b) •  $A^T A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ .

• Soit  $X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ .

$$X \in \text{Ker}(A^T A) \implies X^T A^T A X = 0 \implies \|AX\|^2 = 0 \implies AX = 0.$$

Or  $AX = \sum_{i=1}^d x_i C_i$  et  $(C_1, \dots, C_d)$  est une base de  $F$ , donc une famille libre. Donc  $AX = 0 \implies X = 0$ .

Ainsi  $\text{Ker}(A^T A) = \{0\}$ .

• Par la formule du rang,  $\text{rg}(A^T A) = d$  donc  $A^T A$  est inversible.

c) Soit  $M = A(A^T A)^{-1} A^T$ .

Soit  $X \in E$  et  $Y = MX$ .

① Comme  $Y = A[(A^T A)^{-1} A^T] X$  avec  $(A^T A)^{-1} A^T \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ ,  $Y \in F$  d'après i.

②  $A^T(X - Y) = A^T X - A^T A(A^T A)^{-1} A^T X = A^T X - A^T X = 0$  donc d'après ii  $X - Y \in F^\perp$ .

③ Ainsi  $Y \in F$  et  $X - Y \in F^\perp$ , donc  $Y$  est le projeté orthogonal de  $X$  sur  $F$ .

④ Ceci étant vrai pour tout  $X$  de  $E$ ,  $M$  représente la projection orthogonale sur  $F$  dans la base canonique de  $E$ .

3. a) Prenons  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Alors } A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, (A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Par le procédé de Gram-Schmidt, prenons

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } U_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$U_1 U_1^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } U_2 U_2^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Et

$$M = U_1 U_1^T + U_2 U_2^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 181**

*Théorème des moindres carrés*

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On suppose que  $\text{rg}(A) = p$ .

Montrer que :

(i)  $\min_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|_2$  existe,

(ii)  ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est inversible, donc le système linéaire  ${}^tAAX = {}^tAB$  admet une unique solution,

(iii)  $\min_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|_2$  est atteint si, et seulement si,  $X$  est l'unique solution du système  ${}^tAAX = {}^tAB$ .

**Solution** (Ex.181 – *Théorème des moindres carrés*)

*Commentaire : il s'agit d'un problème de minimisation d'une  $\|\cdot\|_2$ , donc il y a de la projection orthogonale dans l'air...*

*Dans cette correction, j'ignore le résultat de l'exercice précédent, et du coup je le redémontre...*

(i) Soit  $C_1, \dots, C_p \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  les  $p$  colonnes de  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

On a alors, pour tout  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ , on a,

$$AX = (x_1 C_1 + \dots + x_p C_p) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Posons  $F = \{AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\} = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , de dimension  $p$  car  $\text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \text{rg}(A) = p$ . Alors, s'il existe,  $\min_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|_2 = \min_{Y \in F} \|Y - B\|_2$ . Or par le cours, ce minimum existe, et est obtenu uniquement pour  $Y = p_F(B)$ .

On a déjà l'existence...

(ii) C'est un exercice classique. Notons que si  $A$  n'est pas forcément carrée,  ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est carrée.

On a toujours :  $\text{Ker } {}^tAA = \text{Ker } A$ , car

- $AX = 0 \implies {}^tAAX = 0$ ,
- ${}^tAAX = 0 \implies {}^tX {}^tAAX = 0 \implies \langle AX, AX \rangle = 0 \implies \|AX\| = 0 \implies AX = 0$ .

Or  $A$  représente un endomorphisme de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ , donc la formule du rang donne

$$\dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\mathbb{R}^p) - \text{rg}(A) = 0,$$

donc  $\dim(\text{Ker}({}^tAA)) = 0$  et  $\text{rg}({}^tAA) = p$ , ce qui assure l'inversibilité. Donc l'unicité de la solution du système  ${}^tAAX = {}^tAB$ .

(iii) Voyons comment obtenir ce projeté.

$$Y = p_F(B) \iff \begin{cases} Y \in F \\ Y - B \in F^\perp \end{cases} \iff \begin{cases} \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), & Y = AX \\ \forall i \in [[1; p]], & \langle C_i, AX - B \rangle = 0 \end{cases}$$

car  $F = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ . Or

$$\forall i \in [[1; p]], \quad \langle C_i, AX - B \rangle = 0 \iff \forall i \in [[1; p]], \quad {}^tC_i(AX - B) = 0 \\ \iff \forall i \in [[1; p]], \quad {}^tC_iAX = {}^tC_iB$$

$$\iff \left( \begin{array}{c} \frac{{}^tC_1}{\hline} \\ \frac{{}^tC_2}{\hline} \\ \vdots \\ \frac{C_p}{\hline} \end{array} \right) AX = \left( \begin{array}{c} \frac{{}^tC_1}{\hline} \\ \frac{{}^tC_2}{\hline} \\ \vdots \\ \frac{C_p}{\hline} \end{array} \right) B \iff {}^tAAX = {}^tAB$$

$$\text{Donc } Y = p_F(B) \iff \begin{cases} \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), & Y = AX \\ {}^tAAX = {}^tAB \end{cases}.$$

Donc le minimum cherché vaut  $\|Y - B\|_2 = \|AX - B\|_2$  où  $X$  est l'unique solution de  ${}^tAAX = {}^tAB$ .

### Exercice 182

*Ajustements polynomiaux*

CHAPITRE 55. THÉORÈME DES MOINDRES CARRÉES ET APPLICATION AUX AJUSTEMENTS POLYNOMIAUX

---

On se donne  $x_1, \dots, x_n$   $n$  réels deux à deux distincts et  $y_1, \dots, y_n$   $n$  réels quelconques. Par exemple,  $(x_i, y_i)$  est une série statistique de résultats expérimentaux. On cherche une fonction polynomiale  $P_m$  de degré au plus  $m$  passant au plus près des  $n$  points, en quelque sorte

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P_m(x_i) \simeq y_i.$$

Le § sur l'interpolation de LAGRANGE montre que si  $m = n - 1$ , il existe une et une seule solution.

Problème : si la série est grande ( $n$  grand), il est peu probable que l'on accepte un polynôme de degré  $n$ .

De plus, si on prend l'exemple de la trajectoire d'un mobile uniquement soumis à la gravitation, on sait que la trajectoire est parabolique, donc qu'on veut  $m = 2$  et  $P(x) = a^2 + bx + c$ . Notre nuage de points  $(x_i, y_i)$  doit nous servir à préciser les coefficients.

Comment optimiser le choix de  $P$  lorsque  $m < n - 1$  ?

On connaît  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ , et on cherche

$$P_m(x) = c_m x^m + \dots + c_1 x + c_0$$

qui minimise la somme des écarts au carré, alias *les moindres carrés*

$$\Sigma(c_0, \dots, c_m) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^n (P_m(x_k) - y_k)^2.$$

Or en munissant  $\mathbb{R}^n$  de la norme  $\|\cdot\|_2$ ,

$$\Sigma(c_0, \dots, c_m) = \left\| \begin{pmatrix} c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_m x_1^m - y_1 \\ \vdots \\ c_0 + c_1 x_n + \dots + c_m x_n^m - y_n \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \|\text{AC} - \text{Y}\|_2^2$$

avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{m+1} & \dots & x_{m+1}^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n, m+1}(\mathbb{R})$  et  $\text{Y}$  connue,

---

et  $C = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$  est notre inconnue.

Montrer que le théorème des moindres carrés précédents s'applique.

**Solution (Ex.182 – Ajustements polynomiaux)**

Il suffit de vérifier que  $\text{rg}(A) = m + 1$  or

- $A \in \mathcal{M}_{n,m+1}(\mathbb{R}) \implies \text{rg}(A) \leq m + 1$ ,
- les  $m + 1$  premières lignes constituent une matrice de VANDERMONDE, de déterminant non nul car les  $x_i$  sont deux à deux distincts, donc le rang des  $m + 1$  premières lignes est  $m + 1$ , dans  $\text{rg}(A) \geq m + 1$ .

*Cqfd.*



# Chapitre 56

## Intégration numérique avec Python

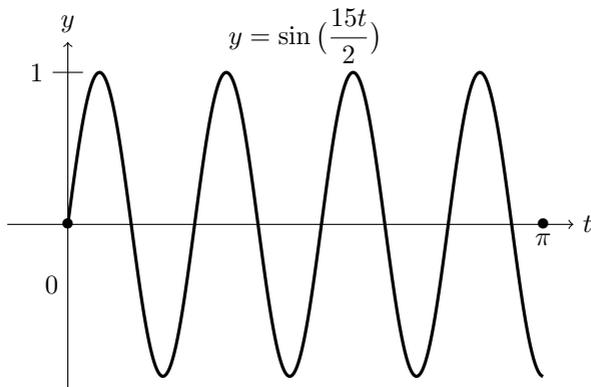
On passe en revue quelques méthodes de calculs approchés d'intégrales. Il s'agit de calculer une valeur approchée de  $\int_a^b f(t)dt$  à partir de valeurs de  $f$  en quelques points.

Dans le premier exercice, on s'intéresse à une fonction à la fois régulière ( $\mathcal{C}$ ) mais avec une forte variabilité qui servira de fonction test pour les exercices suivants.

<b>Exercice 183</b>
---------------------

<i>Un simple sinus</i>
------------------------

1. Vérifier que  $\int_0^\pi \sin\left(\frac{15t}{2}\right)dt = \frac{2}{15}$ .
2. Tracer la courbe représentative de  $t \mapsto \sin\left(\frac{15t}{2}\right)$  et s'assurer que son allure est la suivante



**Solution** (Ex.183 – *Un simple sinus*)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def f(t):
    return np.sin(7.5*t)
```

```
n = 300
t = np.linspace(0,np.pi,n)
y = f(t)
plt.plot(t,y)
```

---

**Pour tout les exercices suivants**, on suppose définie les modules `numpy` et `matplotlib.pyplot` importés sous `np` et `plt`, et on suppose définie une fonction  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Par exemple,

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def f(t):
    return np.sin(7.5*t)
```

**Exercice 184**

*Méthode des rectangles*

---

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Les formules énoncées ci-après sont à méditer et à savoir écrire.

1. Écrire à l'aide d'une boucle des fonctions `rect_g(a,b,N)`, `rect_d(a,b,N)` et `rect_m(a,b,N)` calculant des valeurs approchées de  $\int_a^b f(t)dt$  à l'aide des formules

$$G_N = \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + i \frac{b-a}{N}\right) \quad \text{Formule des rectangles à gauche}$$

$$D_N = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f\left(a + i \frac{b-a}{N}\right) \quad \text{Formule des rectangles à droite}$$

$$M_N = \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + (2i+1) \frac{b-a}{2N}\right) \quad \text{Formule des rectangles milieu}$$

2. Indiquer l'erreur absolue commise lors du calcul de  $\int_0^\pi \sin\left(\frac{15t}{2}\right)dt$  par chacune de ces méthodes, pour  $N \in \{5, 10, 20, 50, 100\}$ .

Commentaire ?

3. En exploitant les fonctions `np.linspace` et `sum`, réécrire ces fonctions sans boucles.

**Solution (Ex.184 – Méthode des rectangles)**

1. `def rect_g(a,b,N):`

```
s = 0
h = (b-a)/N
for i in range(N):
    s += f(a+i*h)
return s*h
```

`def rect_d(a,b,N):`

```
s = 0
h = (b-a)/N
for i in range(1,N+1):
    s += f(a+i*h)
return s*h
```

`def rect_m(a,b,N):`

```
s = 0
h = (b-a)/N
for i in range(0,N):
```

```

        s += f(a+(2*i+1)*(h/2))
    return s*h

```

2. Le script suivant

```

test = [5,10,20,50,100]
res = np.zeros((4,len(test)))
for i in range(len(test)):
    N = test[i]
    res[0,i] = N
    res[1,i] = abs(rect_g(0,np.pi,N)-2/15)
    res[2,i] = abs(rect_d(0,np.pi,N)-2/15)
    res[3,i] = abs(rect_m(0,np.pi,N)-2/15)

# Pour afficher 5 chiffres en évitant l'écriture scientifique #
np.set_printoptions(precision=5,suppress=True)
print(res)

```

fournit le tableau

```

[[ 5.      10.      20.      50.      100.     ]
 [ 0.13333  0.08881  0.06275  0.02894  0.01509]
 [ 0.76165  0.22535  0.09433  0.03389  0.01633]
 [ 0.31095  0.03669  0.00803  0.00124  0.00031]]

```

Sur cet exemple, on observe que le choix des points milieux est bien meilleur que les deux autres.

3. Les fonctions usuelles `np...` comme `np.sin` supporte d'être appliquées directement à un tableau, élément par élément.

```

def rect_g(a,b,N):
    t = np.linspace(a,b,N+1)
    return sum(f(t[:-1]))*(b-a)/N

def rect_d(a,b,N):
    t = np.linspace(a,b,N+1)
    return sum(f(t[1:]))*(b-a)/N

def rect_m(a,b,N):
    h = (b-a)/N
    t = np.linspace(a+h/2,b-h/2,N)
    return sum(f(t))*h

```

---

**Exercice 185**

*Méthode des trapèzes*

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $h = \frac{b-a}{N}$ . La méthode des trapèzes consiste à approcher

$\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(t)dt$  par l'aire du trapèze de base  $h$  et de hauteurs  $f(a+ih)$  et  $f(a+(i+1)h)$ .

1. Vérifier que cela conduit à

$$T_N = h \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) \right) \quad \text{Méthode des trapèzes}$$

2. Écrire une fonction `trap(a,b,N)` calculant des valeurs approchées de  $\int_a^b f(t)dt$  à l'aide de cette méthode.
3. Indiquer l'erreur absolue commise lors du calcul de  $\int_0^\pi \sin\left(\frac{15t}{2}\right)dt$  par cette méthode pour  $N \in \{5, 10, 20, 50, 100\}$ .  
Commentaire ?

**Solution (Ex.185 – Méthode des trapèzes)**

- ```
1. def trap(a,b,N):
    h = (b-a)/N
    t = np.linspace(a+h,b-h,N-1)
    return ((f(a)+f(b))/2+sum(f(t)))*h

2. test = [5,10,20,50,100]
res = np.zeros((2,len(test)))
for i in range(len(test)):
    N = test[i]
    res[0,i] = N
    res[1,i] = abs(trap(0,np.pi,N)-2/15)

# Pour afficher 5 chiffres en évitant l'écriture scientifique #
np.set_printoptions(precision=5,suppress=True)
print(res)
On obtient
```

```
[[ 5.          10.          20.          50.          100.         ]
 [ 0.44749    0.06827    0.01579    0.00248    0.00062]]
```

L'erreur est de fois plus importante que dans la méthode des rectangles milieu, mais bien meilleure que les rectangles à gauche ou à droite.

**Exercice 186**  
*Méthode de SIMPSON*

Les méthodes des rectangles et des trapèzes consistent à approcher sur chaque intervalle  $[a + ih; a + (i + 1)h]$  la fonction  $f$  par une fonction constante (méthodes des rectangles) ou une fonction affine (méthode des trapèzes).

La méthode de SIMPSON consiste à approcher  $f$  par un polynôme du second degré (on approche alors la courbe de  $f$  par une parabole).

1. Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

a) Montrer que la base de LAGRANGE<sup>1</sup> associée aux points  $a, m$  et  $b$  est  $(L_a, L_m, L_b)$  définie par

$$\begin{cases} L_a(x) = \frac{1}{(b-a)^2} (2x^2 - (a+3b)x + ab + b^2) \\ L_m(x) = \frac{1}{(b-a)^2} (-4x^2 + 4(a+b)x - 4ab) \\ L_b(x) = \frac{1}{(b-a)^2} (2x^2 - (3a+b)x + a^2 + ab) \end{cases}$$

b) Vérifier que

$$\int_a^b L_a(x) dx = \int_a^b L_b(x) dx = \frac{b-a}{6} \text{ et } \int_a^b L_m(x) dx = \frac{2(b-a)}{3}.$$

c) En déduire que la méthode de SIMPSON consiste en l'approximation

$$\int_a^b f(t) dt \simeq \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

2. En partageant l'intervalle en  $N \in \mathbb{N}^*$  intervalles et en itérant cette démarche sur chacun des intervalles  $\left[ a + i \frac{b-a}{2}; a + (i+1) \frac{b-a}{2} \right]$ , vérifier qu'on obtient la formule

$$S_N = h \left( f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(a_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^N f(a_{2i-1}) + f(b) \right) \text{ Méthode de Simpson}$$

où  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $a_i = a + i \frac{h}{2}$  pour  $1 \leq i \leq 2N - 1$

3. Écrire une fonction `Simpson(a,b,N)` calculant des valeurs approchées de  $\int_a^b f(t) dt$  à l'aide de cette méthode.

1. Voir le § consacré à l'interpolation de LAGRANGE.

4. Indiquer l'erreur absolue commise lors du calcul de  $\int_0^\pi \sin\left(\frac{15t}{2}\right) dt$  par cette méthode pour  $N \in \{5, 10, 20, 50, 100\}$ .  
Commentaire ?

**Solution (Ex.186 – Méthode de SIMPSON)**

1. a)  $L_a(x) = \frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)}$  de façon à ce que  $L_a(a) = 1$  tandis que  $L_a(m) = L_a(b) = 0$ .

On développe, en exploitant  $(a-m) = -\frac{b-a}{2}$  donc  $(a-m)(a-b) = \frac{(a-b)^2}{2}$ .

De même pour les deux autres.

- b) Simple vérification.

- c) D'après l'interpolation de LAGRANGE, le polynôme de  $\mathbb{R}_2[X]$  coïncidant avec  $f$  en  $a, m$  et  $b$  est

$$P(x) = f(a)L_a(x) + f(m)L_m(x) + f(b)L_b(x).$$

Alors

$$\int_a^b P(x) dx \simeq f(a) \int_a^b L_a(x) dx + f(m) \int_a^b L_m(x) dx + f(b) \int_a^b L_b(x) dx$$

D'où

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b P(x) dx \simeq \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

2. Les extrémités  $a$  et  $b$  apparaissent une fois avec le coefficient  $\frac{1}{6}$ , les extrémités  $a_{2i} = a + ih$  ( $1 \leq i \leq N-1$ ) des  $N$  sous-intervalles apparaissent deux fois en tant qu'extrémités droite puis gauche des sous-intervalles, munis du coefficient  $2 \times \frac{1}{6}$ , et les milieux  $a_{2i-1}$  ( $1 \leq i \leq N$ ) des sous-intervalles apparaissent une fois munis du coefficient  $\frac{4}{6}$ .

3. def Simpson(a,b,N):

$$s = f(a)+f(b)$$

$$h = (b-a)/N$$

for i in range(1,N):

$$s += 2*f(a+i*h)$$

for i in range(1,N+1):

$$s += 4*f(a+(2*i-1)*h/2)$$

return s\*h/6

4. test = [5,10,20,50,100]

```

res = np.zeros((2,len(test)))
for i in range(len(test)):
    N = test[i]
    res[0,i] = N
    res[1,i] = abs(Simpson(0,np.pi,N)-2/15)

# Pour afficher 7 chiffres en évitant l'écriture scientifique #
np.set_printoptions(precision=7,suppress=True)
print(res)
fournit

[[ 5.          10.          20.          50.          100.         ]
 [ 0.0581391  0.0017027  0.000093  0.0000023  0.0000001]]

```

La précision est bien meilleure que celle des méthodes des rectangles et des trapèzes.

**Exercice 187**

*Méthode de Gauss à trois points*

Le § sur l'intégration numérique par la méthode de quadrature de Gauss nous a appris que

$$\int_{-1}^1 P(t)dt \simeq \frac{5}{9}P\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}P(0) + \frac{5}{9}P\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

cette formule étant exacte pour tout polynôme P de degré  $\leq 5$ .

Que donne cette méthode appliquée à d'autres fonctions que les polynômes ?

On pose  $\rho = \sqrt{\frac{3}{5}}$ , de sorte que notre formule d'approximation devient

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \simeq \frac{1}{9}(5f(-\rho) + 8f(0) + 5f(\rho))$$

1. Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On pose  $d = \frac{b-a}{2}$ . Montrer que la méthode revient à

$$\int_a^b f(u)du \simeq \frac{d}{9} (5f(-d\rho + m) + 8f(m) + 5f(d\rho + m)).$$

2. Écrire une fonction `Gauss3(a,b)` calculant une valeur approchée par cette méthode de  $\int_a^b f(u)du$ .
3. Pour améliorer la précision, on décide de partager  $[a; b]$  en  $N \in \mathbb{N}^*$  intervalles de longueur  $\frac{b-a}{N}$  et d'appliquer l'approximation précédente sur

---

chacun de ces sous-intervalles.

Programmer une fonction `Gauss(a, b, N)` calculant une valeur approchée de l'intégrale sur ce principe sans utiliser de boucle.

4. Indiquer l'erreur absolue commise lors du calcul de  $\int_0^\pi \sin\left(\frac{15t}{2}\right) dt$  par cette méthode pour  $N \in \{5, 10, 20, 50, 100\}$ .  
Commentaire ?

**Solution** (Ex.187 – Méthode de Gauss à trois points)

1. On pose  $t = \frac{2}{b-a}u - \frac{a+b}{b-a}$  ( $\Leftrightarrow u = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$ ) de sorte que
- $$\int_a^b f(u)du = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)dt.$$

On obtient alors

$$\int_a^b f(u)du \simeq \frac{b-a}{18} \left( 5f\left(-\frac{b-a}{2}\rho + m\right) + 8f(m) + 5f\left(\frac{b-a}{2}\rho + m\right) \right).$$

- ```
2. def Gauss_3(a,b):
    rho = np.sqrt(3/5)
    h = (b-a)/2
    m = (a+b)/2
    return h*(5*(f(-h*rho+m))+f(h*rho+m))+8*f(m))/9

3. def Gauss(a,b,N):
    rho = np.sqrt(3/5)
    h = (b-a)/(2*N)
    m = np.linspace(a+h,b-h,N)
    return h*(5*(sum(f(-h*rho+m))+sum(f(h*rho+m)))+8*sum(f(m)))/9

4. test = [5,10,20,50,100]
res = np.zeros((2,len(test)))
for i in range(len(test)):
    N = test[i]
    res[0,i] = N
    res[1,i] = abs(Gauss(0,np.pi,N)-2/15)
```

# Pour afficher 3 chiffres avec écriture scientifique #

```
np.set_printoptions(precision=2,suppress=False)
print(res)
```

Ce qui fournit le tableau

```
[[ 5.          10.          20.          50.          100.]
 [ 2.03e-03  1.38e-05  1.85e-07  7.30e-10  1.13e-11]]
```

La méthode de Gauss est de loin la plus performante que celles envisagées précédemment.

# Chapitre 57

## GAUSS-LEGENDRE et GAUSS-CHEBYCHEV avec Python

☞ Il est conseillé de lire les § « Espaces de Hilbert et familles de polynômes orthogonaux » et « Intégration numérique de Gauss » au préalable, mais on peut aussi admettre la propriété rappelée ci-après.

### Exercice 188

#### Quadrature numérique de GAUSS

Soit  $]a; b[ \subset \mathbb{R}$  et  $\omega : ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction poids, c'est-à-dire strictement positive et telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \mapsto t^n \omega(t)$  est intégrable sur  $]a; b[$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  une famille de polynômes orthogonaux telle que :  $\forall k \in [[0; n]]$ ,  $\deg(P_k) = k$ .

Alors  $P_n$  admet exactement  $n$  racines réelles distinctes  $r_1, \dots, r_n$  dans  $]a; b[$  et il existe  $n$  coefficients réels  $c_1, \dots, c_n$  tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_a^b P(t)\omega(t)dt = c_1P(r_1) + \dots + c_nP(r_n).$$

Cette formule étant remarquablement simple, on l'extrapole aux fonctions  $f : ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , ce qui fournit la formule de quadrature de GAUSS

$$\int_a^b f(t)\omega(t)dt \simeq c_1f(r_1) + \dots + c_nf(r_n).$$

Lorsque  $]a; b[ = ]-1; 1[$  et  $\omega = 1$ , on parle de méthode de GAUSS-LEGENDRE, et lorsque  $]a; b[ = ]-1; 1[$  et  $\omega = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ , on parle de méthode de GAUSS-TSCHEBYCHEV.

**Exercice 189**

*Gauss-Legendre, Pascal, Horner, dichotomie...*

1. *Petite bibliothèque pour calculer les polynômes de Legendre*

Les polynômes de Legendre sont définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(X) = [(X^2 - 1)^n]^{(n)} = \frac{d^n}{dX^n} (X^2 - 1)^n.$$

Il arrive fréquemment qu'on les normalise par un coefficient  $\frac{1}{2^n n!}$ , ce qui n'a pas d'intérêt ici car on ne s'intéresse qu'à leurs racines. On décide de représenter les polynômes par des `numpy.array` et on amorce un script en Python par

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
degre = 20
```

`degre` est une constante indiquant le degré maximum des polynômes que l'on souhaite utiliser. Chaque polynôme  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{degre}X^{degre}$  sera représenté par le `np.array [ a_0, a_1, ..., a_{degre} ]`, étant entendu que si  $\deg(P) < \text{degre}$ , tous les coefficients d'ordre  $k > \text{degre}$  seront pris égaux à 0.

a) Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie le `np.array` codant le polynôme dont les coefficients sont fournis par la liste `l`

```
def creer(l):
    p = np.zeros(.....)
    for k in range(len(l)):
        p[k] = .....
    return p
```

Par exemple

```

creer([1,-2,3])
>>>
array([ 1., -2.,  3.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,
        0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.])

```

- b) Compléter la fonction suivante afin qu'elle transforme un polynôme au format `np.array` en chaîne de caractères suffisamment lisible, par exemple :

```

aff_poly(creer([1,0,-2,3]))
>>> '+3.0X^3-2.0X^2+1.0X^0'

def aff_poly(p):
    s = ""
    for k in reversed(range(0,degree+1)):
        if p[k] != 0:
            .....
            .....
            .....
    return s

```

- c) Écrire une fonction `deriv(p)` renvoyant le dérivé du polynôme `p`.  
d) Écrire le développement suivant la base canonique de  $(X^2 - 1)^n$ .  
e) Soit  $0 \leq p \leq n$ . Justifier les relations

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

et programmer une fonction **récursive** `binom(n,p)` calculant  $\binom{n}{p}$ .

- f) Écrire enfin une fonction `Legendre(n)` calculant le  $n$ -ème polynôme de LEGENDRE en dérivant  $n$  fois  $(X^2 - 1)^n$ .

On vérifiera qu'on obtient

```

aff_poly(legendre(4))
>>> '+1680.0X^4-1440.0X^2+144.0X^0'

```

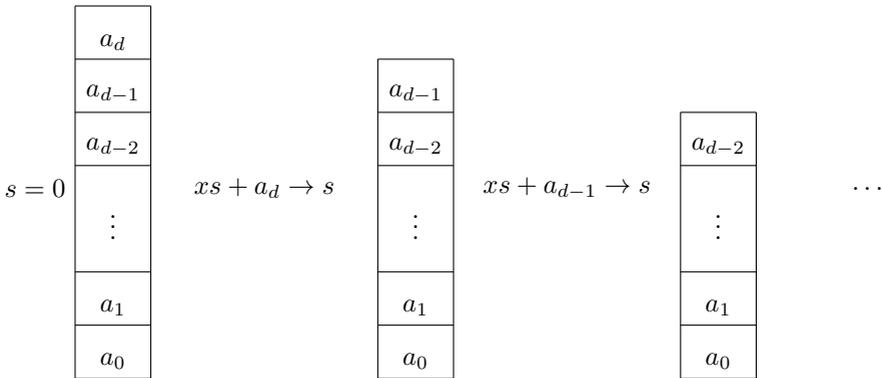
donc  $L_4 = 1680X^4 - 1440X^2 + 144$ .

## 2. Évaluation d'un polynôme en un point : algorithme de Horner

On doit à HORNER l'algorithme suivant de calcul de  $P(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$  qui

est linéaire et ne nécessite aucun calcul de puissance.

La présentation en *pile* est assez efficace.



$$xs + a_1 \rightarrow s \quad \boxed{a_0} \quad xs + a_0 \rightarrow s, \text{ et alors } s = P(x)$$

On rappelle que la méthode `liste.pop()` dépile la liste `liste`, c'est-à-dire

- (i) renvoie le dernier élément de `liste`,
- (ii) supprime cet élément de `liste`.

Compléter l'algorithme suivant afin qu'il renvoie la valeur de  $P(x)$ , le polynôme  $P$  étant défini par le `np.array p`.

```
def Horner(p,x):
    s = .....
    l = list(p)
    for k in range(.....):
        s = .....
    return s
```

**3. Recherche d'une racine par dichotomie**

On suppose un polynôme  $P$  défini sur  $]a; b[$  vérifiant  $P(a)P(b) < 0$ .

- a) Justifier que  $P$  admet au moins une racine dans  $]a; b[$ .
- b) Écrire une fonction `dicho(p,a,b,e)` renvoyant une racine de  $p$  dans  $]a; b[$  avec une précision au moins égale à  $e$ .

**4. Racines des polynômes de Legendre**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $P_n$  le polynôme  $(X^2 - 1)^n$ .

- a) Justifier qu'il existe une famille de polynômes  $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$  telle que

$$\forall k \in [[0; n]], \quad P_n^{(k)} = (X^2 - 1)^{n-k} Q_k,$$

et vérifiant

$$\forall k \in [[0; n - 1]], \quad Q_{k+1} = (X^2 - 1)Q'_k + 2(n - k)XQ_k.$$

- b) Que peut-on dire de  $Q_n$  ?

- c) Justifier, pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , que  $Q_k$  admet exactement  $k$  racines distinctes, et qu'entre chaque racine successive de  $P_k$  se trouve exactement une racine de  $P_{k-1}$ . Schématiquement

$Q_0$	pas de racine						
$Q_1$	$\alpha_{1,1} = 0$						
$Q_2$		$\alpha_{2,1}$		$\alpha_{2,2}$			
$Q_3$		$\alpha_{3,1}$		$\alpha_{3,2}$		$\alpha_{3,3}$	
$Q_4$	$\alpha_{4,1}$		$\alpha_{4,2}$		$\alpha_{4,3}$		$\alpha_{4,4}$

- d) Écrire une fonction `produit(p,q)` renvoyant le produit des deux polynômes  $p$  et  $q$ .
- e) Compléter la fonction `racine(n,e)` suivante de sorte qu'elle renvoie la liste des racines de  $L_n$  avec une précision inférieure à  $e$ .

```
def racine(n,e):
    Qk = creer([1])
    Xdmu = creer([-1,0,1])
    dX = creer([0,2])
    Rk = [-1,1]
    for k in range(n):
        Qk = .....
        aux = [-1]
        for i in range(k+1):
            aux.append(dicho(.....))
        Rk = aux+[1]
    return np.array(Rk[1:-1])
```

À titre d'exemple, on doit obtenir ceci :

```
racine(3,1e-8)
>>> array([-7.74596672e-01,  1.27271108e-09,
           7.74596670e-01])
```

5. *Calcul des coefficients  $c_i$  par les polynômes de Lagrange*

Toujours en notant  $r_1, \dots, r_n$  les racines du polynôme de LEGENDRE  $L_n$ , on introduit la base de LAGRANGE  $(\ell_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  associée à ces  $n$  racines, définie par

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \ell_i(X) = \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{X - r_j}{r_i - r_j}.$$

- a) Justifier que

$$\forall i \in [[1; n]], \quad c_i = \int_{-1}^1 \ell_i(t) dt.$$

- b) Compléter les deux boucles de la fonction suivante qui doit renvoyer le tableau des coefficients  $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$

```
def coeff_L(r):
    c = np.zeros(len(r))
    for i in range(len(r)):
        # Calcul de li
        li = creer([1])
        for j in range(len(r)):
            if j != i:
                li = .....
        # Calcul de l'intégrale de li sur [-1,1]
        for j in range(int((len(r)+1)/2)):
            c[i] += .....
    return c
```

À titre d'exemple, on doit obtenir ceci :

```
coeff_L(racine(3,1e-8))
>>> array([ 0.55555555,  0.88888889,  0.55555555])
```

6. Calcul des coefficients  $c_i$  par la résolution d'un système de Vandermonde

On note  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ,  $V = (r_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $B = \begin{pmatrix} I_0 \\ \vdots \\ I_{n-1} \end{pmatrix}$  où, pour tout  $i$  de

$$[[0; n-1]], \quad I_i = \int_{-1}^1 t^i dt.$$

- a) Justifier que  $C$  est l'unique solution du système linéaire  $VC = B$ .  
 b) L'instruction `a = np.vander(r, increasing=True).transpose()` crée la matrice de Vandermonde  $a = (r[j]^{i-1})$ , et `np.linalg.solve(a,b)` renvoie la solution  $x$  du système linéaire  $a \cdot x = b$ .

Écrire une fonction `coeff_V(r)` renvoyant le tableau des coefficients  $(c_i)$  en résolvant le système de VANDERMONDE précédent.

S'assurer qu'on obtient les mêmes valeurs que par la fonction `coeff_L`.

7. Mise en œuvre de la quadrature de Gauss-Legendre et exemples

Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On pose  $\ell = \frac{b-a}{2}$  et  $m = \frac{a+b}{2}$ . Montrer que la méthode revient à l'approximation

$$\int_a^b f(u)du \simeq \ell \sum_{i=1}^n c_i f(\ell r_i + m).$$

a) Écrire une fonction `Gauss_Legendre(f, a, b, n)` calculant une valeur approchée de  $\int_a^b f$  à l'aide des racines du polynôme de  $L_n$  calculées avec une précision  $1e-8$ .

b) Soit  $f : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sin\left(\frac{5}{2}t\right)$ .

Calculer  $I = \int_0^\pi f(t)dt$ .

On désigne par  $I_n$  la valeur renvoyée par `Gauss_Legendre(f, 0, np.pi, n)`.

Compléter le tableau d'erreurs relatives suivant :

$n$	2	3	4	5	6	7
$\left  \frac{I - I_n}{I} \right $						

c) Soit  $g : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ .

Justifier l'existence de  $J = \int_{-1}^1 f(t)dt$  et la calculer.

Dans la mesure où cette méthode de quadrature n'exige pas de calculer  $g$  en 1, on peut se demander ce que donne cette méthode pour une telle intégrale impropre.

On désigne par  $J_n$  la valeur renvoyée par `Gauss_Legendre(g, -1, 1, n)`.

Compléter le tableau suivant :

$n$	2	3	4	7	10	15
$\left  \frac{J - J_n}{J} \right $						

Commentaire? *Pour pallier cet inconvénient et élaborer une stratégie pour des intégrales impropre, voir l'exercice suivant.*

**Solution (Ex.189 – Gauss-Legendre, Pascal, Horner, dichotomie...)**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
degre = 20
```

```
def creer(l):
    p = np.zeros(degre+1)
```

```
    for k in range(len(l)):
        p[k] = l[k]
    return p

def aff_poly(p):
    s = ""
    for k in reversed(range(0,degre+1)):
        if p[k] != 0:
            if p[k] > 0:
                s += "+"
            s += str(p[k])+"X^"+str(k)
    return s

def deriv(p):
    d = np.zeros(degre+1)
    for k in range(1,degre+1):
        d[k-1] = k*p[k]
    d[degre] = 0
    return d

def binom(n,p):
    if p == 0:
        return 1
    else:
        return (n*binom(n-1,p-1))/p

def Legendre(n):
    Ln = np.zeros(degre+1)
    for p in range(n+1):
        Ln[2*p] = binom(n,p)*(-1)**(n-p)
    for p in range(n):
        Ln=deriv(Ln)
    return Ln

def Horner(p,x):
    s = 0
    l = list(p)
    for k in range(degre+1):
        s = x*s+l.pop()
    return s
```

---

```

def dicho(p,a,b,e):
    a = a
    b = b
    while b-a>e:
        m=(a+b)/2
        if Horner(p,m)*Horner(p,a)>0:
            a = m
        else:
            b = m
    return (a+b)/2

def produit(p,q):
    r = np.zeros(degre+1)
    for k in range(degre+1):
        r[k] = 0
        for i in range(k+1):
            r[k] += p[i]*q[k-i]
    return r

def racine(n,e):
    Qk = creer([1])
    Xdmu = creer([-1,0,1])
    dX = creer([0,2])
    Rn = [-1,1]
    for k in range(n):
        Qk = produit(deriv(Qk),Xdmu)+(n-k)*produit(Qk,dX)
        aux = [-1]
        for i in range(k+1):
            aux.append(dicho(Qk,Rn[i],Rn[i+1],e))
        Rn = aux+[1]
    return np.array(Rn[1:-1])

def coeff_L(r):
    c = np.zeros(len(r))
    for i in range(len(r)):
        # Calcul de li
        li = creer([1])
        for j in range(len(r)):
            if j != i:

```

```

        li = produit(li, creer([-r[j], 1])) / (r[i] - r[j])
    # Calcul de l'intégrale de li sur [-1, 1]
    for j in range(int((len(r)+1)/2)):
        c[i] += 2*li[2*j] / (2*j+1)
    return c

def coeff_V(r):
    a = np.vander(r, increasing=True).transpose()
    b = np.zeros(len(r))
    for i in range(int((len(r)+1)/2)):
        b[2*i] = 2 / (2*i+1)
    return np.linalg.solve(a, b)

def Gauss_Legendre(f, a, b, n):
    r = racine(n, 1e-8)
    c = coeff_V(r)
    l = (b-a)/2
    m = (a+b)/2
    return l*sum(c*f(l*r+m))

def f(t):
    return np.sin(2.5*t)

for n in [2, 3, 4, 5, 6, 7]:
    print(abs(Gauss_Legendre(f, 0, np.pi, n) - 2/5) * 5/2)

def f(t):
    return 1/np.sqrt(1-t)

for n in [2, 3, 4, 7, 10, 15]:
    print(abs(Gauss_Legendre(f, -1, 1, n) / (2*np.sqrt(2)) - 1))

```

$n$	2	3	4	5	6	7
$\left  \frac{I - I_n}{I} \right $	2.56	0.398	0.0307	0.00142	4.37E <sup>-05</sup>	9.62E <sup>-07</sup>

$n$	2	3	4	7	10	15
$\left  \frac{J - J_n}{J} \right $	0.175	0.125	0.0968	0.0581	0.0415	0.0281

Pour l'intégrale impropre J la convergence est moins rapide.

### Exercice 190

*Gauss-Tchebychev, exemple d'une intégrale impropre*

On cherche à améliorer le calcul approché de l'intégrale impropre de l'exercice précédent

$$J = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$$

On observe que  $J = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^1 h(t)\omega(t)dt$  où

$$h : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \sqrt{1+t} \text{ et } \omega : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

On sait que les polynômes de Tchebychev  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont orthogonaux pour cette fonction poids. De plus, les racines de  $T_n$  sont les réels  $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$  pour  $k \in [[0; n-1]]$ .

Donc il existe  $n$  coefficients  $(c_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  tels que

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \simeq \sum_{i=0}^{n-1} c_i f\left(\cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right)\right)$$

la formule étant exacte pour toute fonction polynomiale  $f$  de degré au plus  $2n-1$ .

1. a) Justifier que pour  $f(t) = t^k$ ,  $I_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^k(t) dx$ .

b) Justifier que  $\sin^{2k}(t) = \frac{1}{2^{2k-1}} \left( \frac{1}{2} \binom{2k}{k} + (-1)^k \sum_{p=0}^{k-1} \binom{2k}{p} \cos(2(k-p)t) \right)$ .

c) En déduire que

$$I_k = \begin{cases} \frac{1}{2^k} \binom{k}{k/2} \pi & \text{si } k \text{ pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$$

d) Soit  $0 \leq p \leq n$ . Justifier les relations

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

et programmer une fonction **récursive** `binom(n,p)` calculant  $\binom{n}{p}$ .

e) Écrire une fonction `I(k)` renvoyant la valeur de l'intégrale  $I_k$ .

2. Écrire une fonction `racine(n)` renvoyant le tableau de type `np.array` contenant les  $n$  racines du polynôme  $T_n$ .

3. a) La relation étant exacte pour toutes les fonctions  $t \mapsto t^k$  avec  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , écrire le système dont les  $(c_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  sont solutions.  
 b) L'instruction `a = np.vander(r, increasing=True).transpose()` crée la matrice de Vandermonde  $a = (r[j]^{i-1})$ , et `np.linalg.solve(a,b)` renvoie la solution  $x$  du système linéaire  $a \cdot x = b$ .

Compléter la fonction suivante

```
def Gauss_Tchebychev(f,n):
    r = racine(n)
    a = np.vander(r, increasing=True).transpose()
    # Définir b
    .....
    c = np.linalg.solve(a,b)
    return sum(c*f(r))
```

4. On revient au calcul approché de  $J = \int_{-1}^1 h(t)\omega(t)dt$ .

- a) Définir la fonction  $h$ .  
 b) On désigne par  $H_n$  la valeur renvoyée par `Gauss_Tchebychev(h,n)`.

$n$	2	3	4	7	10	15
$\frac{J - H_n}{J}$						

Commentaire ?

**Solution (Ex.190 – Gauss-Tchebychev, exemple d'une intégrale impropre)**

$$\sin^{2k}(t) = \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^{2k} = \frac{1}{2^{2k}} (-i)^{2k} \sum_{p=0}^{2k} \binom{2k}{p} (-1)^{2k-p} e^{ipt} e^{-i(2k-p)t}$$

$$\sin^{2k}(t) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \left( \sum_{p=0}^{k-1} \binom{2k}{p} (-1)^p e^{i(2p-2k)t} + (-1)^k \binom{2k}{k} + \sum_{p=k+1}^{2k} \binom{2k}{p} (-1)^p e^{i(2p-2k)t} \right)$$

$$\sin^{2k}(t) \stackrel{q=2k-p}{=} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \left( \sum_{p=0}^{k-1} \binom{2k}{p} (-1)^p e^{i(2p-2k)t} + (-1)^k \binom{2k}{k} + \sum_{q=0}^{k-1} \binom{2k}{2k-q} (-1)^q e^{i(2k-2q)t} \right)$$

$$\sin^{2k}(t) \stackrel{q=2k-p}{=} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \left( \sum_{p=0}^{k-1} \binom{2k}{p} [e^{i(2p-2k)t} + e^{i(2k-2p)t}] + (-1)^k \binom{2k}{k} \right)$$

$$\sin^{2k}(t) = \frac{1}{2^{2k-1}} \left( \frac{1}{2} \binom{2k}{k} + (-1)^k \sum_{p=0}^{k-1} \binom{2k}{p} \cos(2(k-p)t) \right)$$

$I_k$  est nulle pour  $k$  impair car on intègre une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

Avec la relation précédente, comme  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2(k-p)t) dt = 0$  pour  $0 \leq p < k$ ,

on obtient  $I_k = \frac{1}{2^k} \binom{k}{k/2}$  pour  $k$  pair.

Proposition de programme :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def binom(n,p):
    if p == 0:
        return 1
    else:
        return (n*binom(n-1,p-1))/p

def I(k):
    if k%2 == 0:
        return binom(k,k/2)/2**k*np.pi
    else:
        return 0

def racine(n):
    return np.array([np.cos((2*k+1)*np.pi/(2*n)) for k in range(n)])

def Gauss_Tchebychev(f,n):
    r = racine(n)
    a = np.vander(r,increasing=True).transpose()
    b = np.array([I(k) for k in range(n)])
    c = np.linalg.solve(a,b)
    return sum(c*f(r))

def h(t):
    return np.sqrt(1+t)
```

```
for n in [2,3,4,7,10,15]:
    print(abs(Gauss_Tchebychev(h,n)/(2*np.sqrt(2))-1))
```

$n$	2	3	4	7	10	15
$\left  \frac{J - H_n}{J} \right $	0.0262	0.0115	0.00645	0.00210	0.00103	0.000457

La méthode GAUSS-TSCHEBYCHEV est mieux adaptée au calcul de ce type d'intégrales impropres que la méthode de GAUSS-LEGENDRE. Avec le même nombre de points, l'erreur relative est de l'ordre de 50 fois plus faible.

## Chapitre 58

# Programmation orientée objet : la classe Polynome

Pour manipuler des polynômes, nous pouvons utiliser des listes : après tout, un polynôme est avant tout une liste (finie) de coefficients. Par exemple, on peut convenir que la liste

$$P = [1, 2, 3] \text{ représente le polynôme } P = 1 + 2X + 3X^2.$$

C'est faisable mais les opérations sur les listes ne sont pas les mêmes que les opérations sur les polynômes.

Par exemple, si  $P = [1, 2, 3]$  et  $Q = [1, -2, 0, 1]$  alors  $P+Q$  est la liste  $[1, 2, 3, 1, -2, 0, 1]$  puisque pour les listes, « + » désigne la concaténation, alors que si  $P = 1 + 2X + 3X^2$  et  $Q = 1 - 2X + X^3$ ,  $P + Q$  est le polynôme  $1+3X^2+X^3$ , qui n'est évidemment pas représenté par la liste  $P+Q$  précédente mais par  $[1, 0, 3, 1]$ .

De même,  $P=[1,1]$  ;  $P(2)$  provoque une erreur de type 'LIST' OBJECT IS NOT CALLABLE signifiant qu'une liste n'est pas évaluable en un point. Or pour un polynôme  $P$ , l'évaluation de  $P$  en 2, notée  $P(2)$ , a un sens.

Si PYTHON possède un certain nombre d'objets prédéfinis, avec leurs opérations propres, opérations appelées *méthodes*, dont la syntaxe est en général `nom_de_l_objet.methode()` (pensez à `LISTE.APPEND()` par exemple), PYTHON offre aussi la possibilité de créer de nouveaux objets, pour lesquels on peut définir toutes les opérations et fonctions qui nous sembleront utiles.

Ainsi, nous allons définir une nouvelle *classe* d'objets, les polynômes, ainsi que les opérations et fonctions usuelles sur ces objets, pour pouvoir nous en

servir aussi librement que n'importe quel autre objet déjà connu de PYTHON (liste LIST, chaîne de caractères STRING, entier INT, réel FLOAT, booléens BOOLEAN, etc.)

**Exercice 191**

*Définition de la classe Polynome*

1. Le code suivant

```
class Polynome():
    def __init__(self,coefficients):
        self.coeffs = coefficients
```

définit une nouvelle classe d'objet.

- a) Exécuter ce script, puis dans la console exécuter `P = Polynome([1, 2, 3])`, puis `P`, puis `P.coeffs`.

On a défini une nouvelle classe d'objets, les polynômes, qui s'initialisent avec la donnée de ses coefficients, qu'on récupère en invoquant la méthode `nom_du_polynome.coeffs`, le nom du polynôme s'appelant traditionnellement `SELF` (lui-même, logique non?).

- b) On complète notre script de la façon suivante :

```
class Polynome():
    def __init__(self,coefficients):
        self.coeffs = coefficients

    def deg(self):
        n = len(self.coeffs)
        for i, c in enumerate(reversed(self.coeffs)):
            if c != 0: #ou abs(c)<=1e-10 (erreurs de calcul)
                return n-1-i
        return -1
```

Exécuter ce script, définir `P = Polynome([1, -2, 3, 0])`, puis `P.coeffs` puis `P.deg()`.

- c) Quelle convention est adoptée pour le degré du polynôme nul dans ce script ?

Nous venons de définir une méthode propre aux polynômes : la fonction « degré ».

2. a) Exécuter `P`, puis `PRINT(P)`. L'affichage est-il satisfaisant ?

On ne peut pas en vouloir à PYTHON de ne pas savoir que, pour nous, la présentation naturelle du polynôme de coefficients `[1, -2, 3, 0]` est

---

$1 - 2X + 3X^2$ , que l'on pourrait afficher par la chaîne de caractères `'1+(-2)*X+3*X^3'`.

- b) La méthode qui, dans une classe d'objets, définit sa représentation est `__str__(self)`. Compléter le script suivant afin d'obtenir un affichage lisible des polynômes. On testera cet affichage en exécutant `print(P)` pour différents polynômes.

```
def __str__(self):
    if self.deg() == -1:
        return '0'
    else:
        chaine = ''
        for k, c in enumerate(self.coeffs):
            if c != 0:
                if c > 0:
                    chaine += str(c)
                else:
                    chaine += '('+str(c)+')'
            if k == 1:
                chaine += '.....'
            elif k >= 2:
                chaine += '.....'
            chaine += '+'
        return chaine[:len(chaine)-1]
```

### Exercice 192

#### *Opérations algébriques usuelles*

Venons-en aux opérations sur les polynômes. Comme rappelé en introduction, la somme de listes (LIST) est la concaténation. Il est possible de définir la somme pour les polynômes, de façon à ce que  $P+Q$  génère le polynôme somme de  $P$  et  $Q$ .

1. a) Compléter la méthode `__add__(self, other)`

```
def __add__(self, other):
    if self.deg() < other.deg():
        self, other = other, self
    tmp = other.coeffs + [0]*(self.deg()-other.deg())
    res = []
    for k in range(len(self.coeffs)):
```

```

        res.append(.....)
    return Polynome(res)

```

b) Définir deux polynômes P et Q puis vérifier que PRINT(P+Q) affiche le polynôme attendu.

2. Définir une méthode `__neg__(self)` générant le polynôme opposé de SELF. On pourra chercher une écriture condensée comme

```

def __neg__(self):
    return Polynome([..... for c in self.coeffs])

```

3. Définir, à l'aide des méthodes précédentes, la méthode `__sub__(self, other)` générant le polynôme SELF-OTHER sans utiliser de boucle.

4. On peut envisager le produit polynomial de deux façons :

- le produit par un scalaire, qui confère à  $\mathbb{R}[X]$  (avec l'addition) une structure d'espace vectoriel  $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$  ;
- le produit de deux polynômes, qui confère à  $(\mathbb{R}[X], +, \cdot, \times)^1$  une structure d'algèbre<sup>2</sup>

a) Compléter la fonction (propre à la classe POLYNÔME) afin qu'elle génère le polynôme produit de SELF par le scalaire REEL :

```

def scalp(self, reel):
    return Polynome([ ..... ])

```

b) Soit  $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$  deux polynômes. Soit  $R = P \times Q$ . On

$$\text{pose } R = \sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k.$$

Justifier que, pour tout  $k \in [[0; m+n]]$ ,  $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ .

Justifier que, pour tout  $k \in [[0; m+n]]$ ,

$$c_k = \sum_{\max(0, k - \deg(Q)) \leq i \leq \min(\deg(P), k)} a_i b_{k-i}.$$

c) Écrire une méthode `__mul__(self, other)` générant le produit de SELF et OTHER.

d) Observer si  $P = \text{POLYNÔME}([1, 2, 3])$  ;  $Q = \text{POLYNÔME}([1, 0, -1])$  ; PRINT(P\*Q) produit l'affichage attendu.

---

1. Où  $\times$  désigne le produit de deux polynômes.

2. Cette notion est hors de notre programme, mais vous noterez que c'est aussi les cas de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe l'addition, la multiplication par un scalaire, mais aussi la multiplication de deux matrices.

---

### Exercice 193

*Évaluation : l'algorithme de HÖRNER*

0

Un objet peut être « évaluable » (« CALLABLE » nous dit PYTHON) : c'est la cas des fonctions et des méthodes prédéfinies ou de celles que l'utilisateur définit. Syntactiquement, cela s'exprime par les parenthèses (...):

SIN(T), LISTE.INDEX('BONJOUR'), MIN(A,B),...

alors que les crochets [...] sont réservés aux collections (LIST, TUPLE, STRING, NUMPY.ARRAY...) d'objets énumérables par des indices (« ITERABLE » nous dit PYTHON).

Les coefficients des polynômes sont des listes (catégorie ITERABLE), mais les polynômes sont évaluable (CALLABLE) en un point. Il serait bon que, lorsqu'on écrit P(1), PYTHON calcule la valeur du polynôme P en 1. Pour cela, il faut définir la méthode `__call__(self, x)` qui retournera la valeur du polynôme SELF en X.

1. a) Vérifier la formule dite *Algorithme de Hörner* pour un polynôme  $P =$

$$\sum_{k=0}^n a_k X^k$$

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \dots (a_{n-1} + x(a_n))))).$$

- b) En quoi cette formule est-elle bien meilleure que

$$P(x) = a_0 + a_1 \times x + a_2 \times x \times x + \dots + a_n \times x \times \dots \times x?$$

2. Programmer la méthode `__call__(self, x)` et la tester en définissant un polynôme P et en exécutant P(2) par exemple.

**Solution : proposition de définition des la classe POLYNOME**

Proposition de définition de la classe POLYNOME :

```
class Polynome():
    #Définition d'une nouvelle classe d'objet
    def __init__(self,coefficients):
        #Initialisation d'un objet polynome
        self.coeffs = coefficients
        #par le liste de ses coefficients

    def deg(self):
        #Méthode déterminant le degré
        n = len(self.coeffs)
        for i, c in enumerate(reversed(self.coeffs)):
            #Parcourir les
            if c != 0:
                #coefficients du plus haut au plus
                return n-1-i
            #jusqu'à en rencontrer un non nul
        return -1
        #deg(0)=-1

    def __str__(self):
        #Méthode pour l'affichage propre
        if self.deg() == -1:
            #Cas du polynôme nul
            return '0'
```

```

else:
    chaine = ''
    #des polynomes, e.g. 1+(-2)*X+3*X^2
    for k, c in enumerate(self.coeffs):
        if c !=0:
            #On affiche que les monômes non nuls
            if c > 0:
                #Parenthésage pour les coefficients
                chaine += str(c)#négatifs '+-2', c'est pas joli
            else:
                chaine += '('+str(c)+')'
            if k == 1:
                #Monôme de degré 1
                chaine += '*X'
            elif k >= 2:
                #Monômes de degré supérieur
                chaine += '*X^'+str(k)
            chaine += '+'
            #Un '+' pour préparer le terme suivant
    return chaine[:len(chaine)-1] #Suppression du dernier '+'
##### C'est parti pour les opérations usuelles
def __add__(self,other):
    #Addition
    if self.deg() < other.deg():
        self, other = other, self
    tmp = other.coeffs + [0]*(self.deg()-other.deg())
    res = []
    for k in range(len(self.coeffs)):
        res.append(self.coeffs[k]+tmp[k])
    return Polynome(res)

def __neg__(self):
    #Opposition
    return Polynome([-c for c in self.coeffs])

def __sub__(self,other):
    #Soustraction
    return self+(-other)

def scalp(self,reel):
    #Produit par le scalaire 'reel'
    return Polynome([reel*c for c in self.coeffs])

def __mul__(self,other):
    #Produit de deux polynômes
    dself = self.deg()
    dother = other.deg()
    res = []
    for k in range(dself+dother+1):
        res += [ sum(self.coeffs[i]*other.coeffs[k-i]#À écrire sur 1 ligne
                    for i in range(max(0,k-dother),min(dself,k)+1))]
    return Polynome(res)

def __call__(self, x):
    #Évaluation en un point 'x' par
    somme = 0
    #l'algorithme de Horner
    for c in reversed(self.coeffs):
        somme = c +x*somme
    return somme

```

# Chapitre 59

## POO & interpolation polynomiale

Munis de la classe d'objets POLYNOME (voir section précédente), nous allons pouvoir déterminer le polynôme de degré coïncidant aux  $n + 1$  points  $x_i$  avec la fonction  $f$ .

### Exercice 194

*Bases de Lagrange et interpolation*

1. Pour répondre au problème, Lagrange propose de créer  $n + 1$  polynômes définis par

$$\forall i \in [[0; n]], \quad L_i(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} \prod_{0 \leq k \leq n, k \neq i} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

- a) Quel est le degré de chaque  $L_i$  ?
- b) Que vaut, pour tout  $(i, j) \in [[0; n]]^2$ ,  $L_i(x_j)$  ? On distinguera les cas  $j = i$  et  $j \neq i$ .
- c) En déduire, *sans chercher à développer les  $L_i$* , que la famille  $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- d) Vérifier que le polynôme

$$I_n(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(X)$$

est le polynôme cherché.

2. a) Compléter la fonction <sup>1</sup> suivante afin qu'elle renvoie la liste des polynômes constituant la base de Lagrange liée à la liste  $x$  de  $x_i$ .

```
def Base_Lag(x):
    res = []
    for k in .....:
        lag = Polynome([1])
        for i in range(len(x)):
            if .....:
                lag *= .....
        res += [ lag ]
    return res
```

- b) Écrire un script pour vérifier que, pour  $x=[0, 1, 2, 3]$ , les quatre polynômes de la base de Lagrange satisfont les relations décrites en 1.b).

3. a) Définir la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1 + 10x^2}$ .

- b) Écrire une fonction INTERPOL(F,X) renvoyant le polynôme interpolant la fonction  $f$  aux points listés dans  $X$ .

- c) Vérifier que le polynôme interpolateur obtenu pour  $x=[-1, -0.5, 0, 0.5, 1]$  est le bon.

**Solution (Ex.194 – Bases de Lagrange et interpolation)**

**1. Base de Lagrange**

- a)  $\forall i \in [[0; n]], \deg(L_i) = n$  car produit de  $n$  polynôme de degré 1.

b)  $\forall (i, j) \in [[0; n]]^2, L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

- c) On suppose que  $\sum_{i=0}^n a_i L_i(X) = 0 \quad (\heartsuit)$ .

Pour tout  $j \in [[0; n]], (\heartsuit)$  évaluée en  $x_j$  donne  $a_j \times 1 = 0$  (tous les autres termes étant nuls). Donc  $a_j = 0$ .

Ce qui prouve que la famille  $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une famille libre de  $n + 1$  polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$ , lui-même de dimension  $n + 1$ . Donc est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

- d) Pour tout  $j \in [[0; n]], I_n(x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x_j) = 0 + f(x_j) \times 1 = f(x_j)$ ,  
donc  $I_n$  est un polynôme de degré au plus  $n$  coïncidant avec  $f$  en les  $n + 1$

---

1. Cet algorithme n'est pas optimal car nécessitant beaucoup de produit mais on s'en contente, pour le moment...

---

points  $x_j$ .  $I_n$  est le polynôme cherché.

## 2. Programmation

```
a) def Base_Lag(x):
    res = []
    for k in range(len(x)):
        lag = Polynome([1])
        for i in range(len(x)):
            if i != k:
                lag *= Polynome([-x[i],1]).scalp(1/(x[k]-x[i]))
        res += [ lag ]
    return res

b) ### Test de Bas_Lag
x = [0,1,2,3]
B = Base_Lag(x)
for k, xi in enumerate(x):
    print('B'+str(xi))
    for y in x:
        print('>> '+str(y)+' : '+str(B[k](y)))
```

Ce script produit l'affichage

```
B0
>> 0 : 1.0
>> 1 : 1.1102230246251565e-16
>> 2 : 4.440892098500626e-16
>> 3 : 2.220446049250313e-16
B1
>> 0 : 0.0
>> 1 : 1.0
>> 2 : 0.0
>> 3 : 0.0
B2
>> 0 : 0.0
>> 1 : 0.0
>> 2 : 1.0
>> 3 : 0.0
B3
>> 0 : 0.0
>> 1 : -5.551115123125783e-17
>> 2 : -1.1102230246251565e-16
>> 3 : 1.0
```

```

3. a) def f(x):
    return 1+x+x**2
    b) def Interpol(f,x):
        B = Base_Lag(x)
        res = Polynome([0])
        for k, xi in enumerate(x):
            res += B[k].scalp(f(xi))
        return res
    c) x = [-1, -.5, 0, .5, 1]
        I = Interpol(f,x)
        for t in x:
            print(t,I(t)-f(t))
    produit
-1 3.608224830031759e-16
-0.5 1.1102230246251565e-16
0 0.0
0.5 1.1102230246251565e-16
1 3.608224830031759e-16

```

Effectivement, aux erreurs d'arrondi près,  $I$  et  $f$  coïncident aux points de  $x$ .

<b>Exercice 195</b>
---------------------

<i>Phénomène de RUNGE</i>
---------------------------

1. Importer les modules NUMPY et MATPLOTLIB.PY PLOT sous les alias NP et PLT afin d'utiliser les fonctions NP.Linspace et PLT.PLOT.
2. Écrire un script demandant un entier  $n$  à l'utilisateur et traçant la courbe de la fonction  $f$  sur  $[-1; 1]$  ainsi que la courbe du polynôme interpolateur de  $f$  en  $n + 1$  points équirépartis sur  $[-1; 1]$ .
3. Qu'observe-t-on aux voisinages de  $-1$  et de  $1$  lorsque  $n$  augmente ?  
Ce phénomène est connu sous le nom de *phénomène de Runge*<sup>2</sup>. On démontre que pour le choix équiréparti des  $n + 1$  points, il n'y a pas convergence uniforme lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Solution (Ex.195 – Phénomène de RUNGE)**

```

1. import matplotlib.pyplot as plt
   import numpy as np

```

---

2. Carl RUNGE, mathématicien et physicien allemand, 1856–1927

```

2. t = np.linspace(-1,1,200)
   n=eval(input('n='))
   i = Interpol(f,np.linspace(-1,1,k))
   plt.plot(t,i(t))
   plt.plot(t,f(t))

```

3. Lorsque  $n$  augmente, les polynômes interpolateurs semblent pouvoir s'écartier fortement de  $f$  au voisinage des points  $-1$  et  $1$  (voir les courbes à la fin de cette partie).

**Exercice 196**

*Polynômes de Tchebychev et convergence uniforme*

0

1. a) Les polynômes de Tchebychev sont définis par les relations

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Programmer une fonction récursive<sup>3</sup> `TCHEBYCHEV(N)` renvoyant le polynôme  $T_n$ .

- b) Tracer les courbes de  $T_5$ ,  $T_{10}$ ,  $T_{15}$  et  $T_{20}$ . Comment se répartissent les racines de  $T_n$  lorsque  $n$  augmente?
- c) On rappelle que, pour tout  $x \in [-1; 1]$ ,  $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$ . Déterminer les racines de  $T_n$ .  
Ces racines sont appelées *points de Tchebychev*.
2. a) Écrire une fonction `RACINES(N)` renvoyant la liste des  $n$  racines du polynôme  $T_n$ .
- b) Écrire un script demandant un entier  $n$  à l'utilisateur et traçant la courbe de la fonction  $f$  sur  $[-1; 1]$  ainsi que la courbe du polynôme interpolateur de  $f$  aux  $n + 1$  racines du polynôme  $T_{n+1}$ .
- c) Qu'observe-t-on lorsque  $n$  augmente?  
On peut montrer qu'avec ce choix de points d'interpolation, la convergence est uniforme lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .  
Les calculs précédents du polynôme annulateur nécessitent un grand nombre de calculs, ne serait-ce que le calcul des  $n + 1$  polynômes de la base de Lagrange.

**Solution (Ex.196 – Polynômes de Tchebychev et convergence uniforme)**

---

3. Là encore, cette méthode risque d'être gourmande en temps dès que  $n$  est un peu grand, mais on s'en contentera ici.

1. a) def Tchebychev(n):

```

    if n == 0:
        return Polynome([1])
    elif n == 1:
        return Polynome([0,1])
    else:
        return Polynome([0, 2])*Tchebychev(n-1)-Tchebychev(n-2)

```

b) On observe une plus grande densité des racines de  $T_n$  au voisinage de  $-1$  et de  $1$ .

c) • Cherchons les racines de  $T_n$  dans  $[-1; 1]$ . Soit  $x \in [-1; 1]$  et  $\theta = \text{Arccos}(x) \in [0; \pi]$ .

$$T_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

De plus :  $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \in [0; \pi] \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2}$ , or  $\theta \in [0; \pi]$ , donc

$$T_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff \exists k \in [[0; n-1]], \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

$$T_n(x) = 0 \iff \exists k \in [[0; n-1]], x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right).$$

La suite  $\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)_{0 \leq k \leq n-1}$  est strictement croissante à valeurs dans  $[0; \pi]$  et la fonction  $\cos$  est strictement décroissante sur  $[0; \pi]$  donc les  $n$  nombres  $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$  pour  $k \in [[0; n-1]]$  sont deux à deux distincts (suite strictement décroissante).

- Comme  $\deg(T_n) = n$ ,  $T_n$  possède au plus  $n$  racines distinctes.
- Finalement,  $T_n$  a exactement  $n$  racines distinctes, toutes dans  $[-1; 1]$ , ce sont les

$$r_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \text{ pour } k \in [[0; n-1]].$$

2. a) def Racines(n):

```

    return [np.cos((2*i+1)*np.pi/(2*n)) for i in range(n)]

```

```

b) t = np.linspace(-1,1,200)
    n=eval(input('n='))
    i = Interpol(f,Racines(n))
    plt.plot(t,i(t))
    plt.plot(t,f(t))

```

c) Lorsque  $n$  augmente, le polynôme interpolateur semble s'approcher uniformément de  $f$  en tout point de  $[-1; 1]$ .

---

**Exercice 197**

*Méthode des différences divisées*

Pour  $k \in [[0; n]]$ , on note  $I_k$  le polynôme d'interpolation de  $f$  aux  $k + 1$  premiers points  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .

L'objectif est de construire le polynôme  $I_n$ . Nous allons le construire par récurrence.

1. D'après le premier exercice, quel est, au plus, le degré de  $I_k$  ?
2. Justifier que  $I_0(X) = f(x_0)$ .
3. a) Soit  $k \in [[1; n]]$ . Montrer qu'il existe un coefficient réel, noté  $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ , tel que  
$$I_k(X) - I_{k-1}(X) = f[x_0, x_1, \dots, x_k](X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_{k-1}).$$

b) Montrer alors que

$$I_n(X) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_{k-1}).$$

Cette écriture s'appelle la *forme de Newton du polynôme interpolateur*.

#### 4. Mise en œuvre

- a) Pour  $k \in [[1; n]]$ , on note  $I_{k-1}^*$  le polynôme d'interpolation de  $f$  aux  $k$  points  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .  
Justifier que son coefficient dominant est  $f[x_1, \dots, x_k]$ .

b) Justifier que le polynôme  $P_k$  défini par

$$P_k(X) = \frac{1}{x_k - x_0} ((X - x_0)I_{k-1}^*(X) - (X - x_k)I_{k-1}(X))$$

est de degré  $k$  et coïncident avec  $f$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .

c) En déduire que  $P_k = I_k$ .

d) Justifier alors les relations

$$\forall k \in [[1; n]], \quad f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

avec  $\forall k \in [[0; n]], \quad f[x_k] = f(x_k)$ .

De par ces relations, la quantité  $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$  est appelée *différence divisée d'ordre  $k$  de  $f$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_k$* .

5. a) Écrire une fonction DIFFERENCES(F,X), d'arguments la fonction  $f$  et la liste X des points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , renvoyant un tableau T de type NP.ARRAY de taille  $n + 1$  par  $n + 1$ , tel que

$$\forall j \in [[0; n]], \forall i \in [[0; n - j]],$$

$$T[i,j] = f[x_i, \dots, x_{i+j}] = \begin{cases} f(x_i) & \text{si } j = 0 \\ \frac{T[i+1, j-1] - T[i, j-1]}{x[i+j] - x[i]} & \text{si } j \in [[1; n]] \end{cases}$$

b) Écrire enfin une fonction  $\text{NEWTON}(F, X)$  renvoyant le polynôme interpolateur de  $f$  aux points de la liste  $X$  en utilisant la forme de Newton de la question précédente.

6. Comparer avec la première méthode.

**Solution (Ex.197 – Méthode des différences divisées)**

1.  $\deg(I_k) = k$ .

2.  $I_0$  est un polynôme constant coïncidant avec  $f$  en  $x_0$  donc  $I_0(X) = f(x_0)$ .

3. a)  $I_k - I_{k-1}$  est un polynôme de degré  $k$  s'annulant en  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  donc proportionnel à  $(X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_{k-1})$ . D'où l'existence du coefficient  $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$  (c'est aussi le coefficient dominant de  $I_k - I_{k-1}$ ).

b) Posons pour tout  $i \in [[0; n]]$ ,

$$J_i(X) = f(x_0) + \sum_{k=1}^i f[x_0, x_1, \dots, x_k](X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_{k-1}) \text{ (en particulier } I_0(X) = f(x_0)\text{)}$$

Montrons par récurrence que  $J_i = I_i$  pour tout  $i$  de  $[[0; n]]$ .

La propriété est vraie au rang  $i = 0$ .

Soit  $i \in [[0; n-1]]$ . Supposons la propriété vraie au rang  $i$ .

$$\begin{aligned} J_{i+1}(X) &= f(x_0) + \sum_{k=1}^{i+1} f[x_0, x_1, \dots, x_k](X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_{k-1}) \\ &= J_i(X) + f[x_0, x_1, \dots, x_{i+1}](X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_i) \\ &= J_i(X) + I_{i+1}(X) - I_i(X) = I_{i+1}(X) \end{aligned}$$

Par récurrence, la propriété est vraie pour tout  $i$  de  $[[0; n]]$ .

En particulier pour  $i = n$ ... CQFD

Cette écriture s'appelle la *forme de Newton du polynôme interpolateur*.

#### 4. Mise en œuvre

a) En appliquant ce qui précède avec les points  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ,  $I_{k-1}^* - I_{k-2}^*$  est de degré  $k-1$  et de coefficient dominant  $f[x_1, \dots, x_k]$ . Comme  $I_{k-2}^*$  est de degré  $k-2$ , ce coefficient dominant est celui de  $I_{k-1}^*$ .

b) • Comme  $I_{k-1}^*$  et  $I_{k-1}$  sont de degré  $k-1$  et de coefficients dominants distincts,  $P_k$  est de degré  $k$ .

•  $P_k(x_0) = -\frac{x_0 - x_k}{x_k - x_0} I_{k-1}(x_0) = I_{k-1}(x_0) = f(x_0)$

- $P_k(x_k) = \frac{x_k - x_0}{x_k - x_0} I_{k-1}^*(x_k) = I_{k-1}^*(x_k) = f(x_k)$

- Pour  $i \in [[1; k-1]]$ ,

$$P_k(x_i) = \frac{1}{x_k - x_0} ((x_i - x_0)I_{k-1}^*(x_i) - (x_i - x_k)I_{k-1}(x_i)) = \frac{x_i - x_0 - x_i + x_k}{x_k - x_0} f(x_i) = f(x_i)$$

Donc  $P_k$  coïncide avec  $f$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .

c) Par unicité du polynôme de degré au plus  $k$  coïncidant avec  $f$  en  $k+1$  points,  $P_k = I_k$ .

d) D'un côté,  $P_k = I_k$  donc son coefficient dominant est  $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ .  
D'un autre côté, son coefficient dominant est celui de

$$\frac{1}{x_k - x_0} ((X - x_0)I_{k-1}^*(X) - (X - x_k)I_{k-1}(X))$$

c'est-à-dire  $\frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$ .

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on a la relation voulue.

Enfin,  $f[x_k]$  est le coefficient dominant du polynôme de degré 0 coïncidant avec  $f$  en  $x_k$ , donc du polynôme constant égal à  $f(x_k)$ , donc  $f[x_k] = f(x_k)$ .

De par ces relations, la quantité  $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$  est appelée *différence divisée d'ordre  $k$  de  $f$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_k$* .

5. a) def Differences(f,x):

```
n = len(x)
```

```
T = np.zeros((n,n))
```

```
for i in range(n):
```

```
    T[i,0] = f(x[i])
```

```
for j in range(1,n):
```

```
    for i in range(n-j):
```

```
        T[i,j] = (T[i+1,j-1]-T[i,j-1])/(x[i+j]-x[i])
```

```
return T
```

b) def Newton(f,x):

```
diff = Differences(f,x)
```

```
I = Polynome([diff[0,0]])
```

```
prod = Polynome([1])
```

```
for k in range(1,len(x)):
```

```
    prod *= Polynome([-x[k-1],1])
```

```
    I += prod.scalp(diff[0,k])
```

```
return I
```

6. 10 essais avec 50 points au hasard :

```
n = 10
```

```

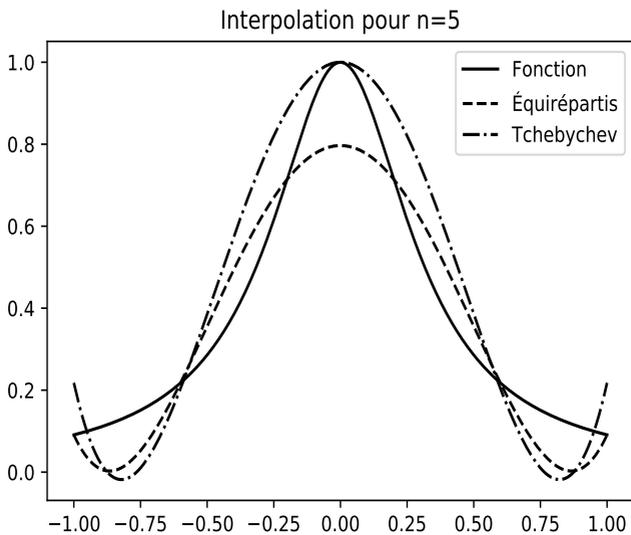
deb = time()
x = list(np.random.rand(50))
for i in range(n):
    Newton(f,x)
print(time()-deb)
deb = time()
for i in range(n):
    Interpol(f,x)
print(time()-deb)

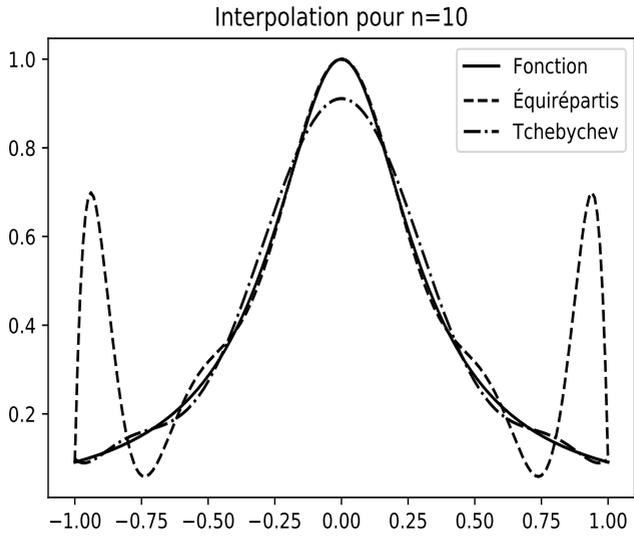
```

provoque

0.062194108963012695  
1.3463971614837646

La méthode de différences divisées semble donc en moyenne environ 20 fois plus rapide que la méthode « brute »







# Chapitre 60

## Simulation aléatoire et méthode de Monte-Carlo

Les méthodes de Monte-Carlo (capitale du casino!) reposent essentiellement sur les lois des grands nombres : si  $(X_n)$  est une suite de variable aléatoire réelle indépendantes de même loi possédant une espérance  $m$  et une variance, alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} m \text{ (Loi faible des grands nombres }^1\text{)}$$

*i.e.*  $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , convergence dite *en probabilité*, et

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} m \text{ (Loi forte de grands nombres }^2\text{)}$$

*i.e.*  $\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m\right) = 1$ , convergence dite *presque-sure*.

L'idée est de simuler  $N$  variables  $X_n$  et d'observer vers quoi tend leur moyenne. Pour simuler des situations aléatoires, on dispose du **générateur aléatoire** du module `numpy` de Python.

L'instruction `numpy.random.rand()` (lire `numpy`  $\rightarrow$  sous-module `random`  $\rightarrow$  instruction `rand()`) renvoie un réel de  $]0; 1[$  suivant la loi uniforme sur  $[0; 1[$ , c'est-à-dire que :

- ① `rand()`  $\in [0; 1[$
- ②  $\forall 0 \leq a \leq b \leq 1$ ,

$$\mathbb{P}(\text{rand}() \in [a; b]) = \mathbb{P}(\text{rand}() \in ]a; b[) = b - a$$

Autrement dit, la probabilité que `rand()` prenne sa valeur dans un intervalle donné de  $[0; 1]$  est proportionnelle à la longueur de cet intervalle.

③ En particulier, pour tout  $p \in [0; 1]$ ,

$$\mathbb{P}(\text{rand}() \leq p) = \mathbb{P}(\text{rand}() < p) = p$$

④ Chaque appel de la fonction `rand()` renvoie une valeur indépendante des appels précédents.

⑤ `rand(N)` renvoie un `np.array` de taille `N` contenant `N` valeurs (indépendantes) obtenues par `rand()`. Ainsi

« `v = numpy.random.rand(1789)` » équivaut

« `v = numpy.zeros(1789)`

`for k in range(1789) :`

`v[k] = numpy.random.rand() »`

**Pour tous les exercices de cette partie**, on suppose la fonction `numpy.random.rand` importée sous le nom « `rand()` » en plaçant systématiquement en en-tête des scripts Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.random import rand
```

**Une variable  $U$  de loi uniforme sur  $[0;1]$**  est une variable aléatoire vérifiant

$$U(\Omega) = [0; 1] \text{ et } \forall [a; b] \subset [0; 1], \quad \mathbb{P}(U \in [a; b]) = b - a.$$

On notera qu'on ne peut que raisonner par des inégalités, car en prenant  $b = a$ ,

$$\forall a \in [0; 1], \quad \mathbb{P}(U = a) = 0.$$

On peut d'ailleurs observer que  $\text{Card}([U = a]) = \text{Card}(\{a\}) = 1$  tandis que  $\text{Card}(\Omega) = \text{Card}([0; 1]) = +\infty$ ...

Il est indifférent de dire que  **$U$  suit une loi uniforme sur  $[0;1]$ , sur  $]0;1[$ , sur  $[0;1[$ , ou sur  $]0;1]$** , et une telle variable peut être simulée par

$$U = \text{rand}().$$

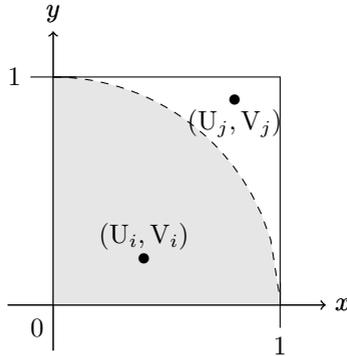
**Dans les corrigés,  $U$  désignera une telle variable.**

<b>Exercice 198</b>
---------------------

<i>Le hasard pour calculer <math>\pi</math></i>
---

1. Soit  $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$   $2n$  variables uniformes sur  $[0; 1]$  mutuellement indépendantes. Soit, pour  $i \in [[1; n]]$ ,  $Y_i$  la variable indicatrice de l'événement  $[(U_i^2 + V_i^2) \leq 1]$ .

a) En considérant la figure suivante, justifier que  $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{\pi}{4})$ .



- b) Compléter la fonction  $Y()$  afin qu'elle renvoie 0 ou 1 en suivant la loi des  $Y_i$ .

```
def Y():
    if rand()**2+rand()**2 <= 1:
        return ...
    else:
        return ...
```

- c) On pose  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  et  $Z_n = \frac{1}{n} S_n$ .

Que valent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(Z_n)$  ?

En statistique, on dit que  $Z_n$  est *un estimateur convergent de*  $\frac{\pi}{4}$ .

- d) On donne  $\frac{4\pi - \pi^2}{16} \simeq 0,169$ .

Justifier que  $\mathbb{P}\left(\left|Z_{1000} - \frac{\pi}{4}\right| \geq 0,1\right) \leq 2\%$ .

2. Analyser le script suivant et expliquer le graphique créé ainsi que les valeurs affichées.

```
def MC_pi(n):
    s = 0
    t = np.zeros(n)
    for k in range(n):
```

```
        if rand()2+rand()2 <= 1:
            s += 1
            z[k] = s/(k+1)
        plt.plot(np.linspace(1,n,n),4*z)
    return t[-1]

for i in range(5):
    print(MC_pi(500))
```

### 3. Une spécificité des booléens bien pratique

Un booléen prend la valeur **True** ou la valeur **False**, mais lorsqu'on l'utilise dans un calcul, Python traduit automatiquement **True** par 1 et **False** par 0. Par exemple :

```
(1<2)
>>> True
(1<2)-4*(2<3)+(3>4)
>>> -3
```

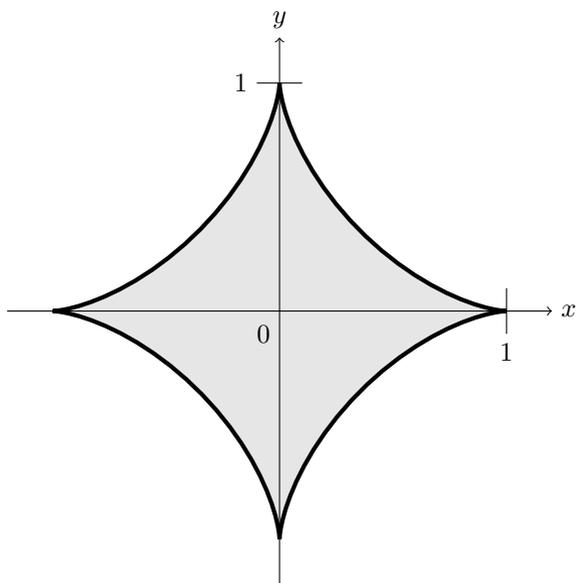
Que fournit le script suivant ? L'exécuter plusieurs fois.

```
def MC_pi(n):
    return 4*sum((rand(n)2+rand(n)2)<1)/n

print(MC_pi(1000000))
```

<b>Exercice 199</b>
---------------------

<i>Évaluation de l'aire de l'astroïde</i>
---



On souhaite évaluer l'aire de l'astroïde, courbe d'équation paramétrique

$$\gamma(t) = (\sin^3(t), \cos^3(t)).$$

En raison des symétries de l'astroïde, on évalue le quart d'aire situé dans le carré  $[0; 1]^2$ .

1. Montrer qu'un point  $(x, y)$  est dans ce quart d'astroïde si, et seulement si,

$$x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1.$$

2. En s'inspirant de l'exercice précédent, évaluer l'aire de l'astroïde.
3. Vérifier la justesse de ces évaluations en calculant la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} dx.$$

On pourra méditer la définition paramétrique de l'astroïde pour trouver un changement de variable salvateur...

**Solution (Ex.199 – Évaluation de l'aire de l'astroïde)**

1. • Posons  $x(t) = \sin^3(t)$  et  $y(t) = \cos^3(t)$ .

$$x(t)^{2/3} + y(t)^{2/3} = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

- Soit  $x \geq 0, y \geq 0$ . Si  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$  alors  $(x^{1/3})^2 + (y^{1/3})^2 = 1$ , donc

$$\exists t \in [0; \pi/2], \begin{cases} x^{1/3} = \sin(t) \\ y^{1/3} = \cos(t) \end{cases}$$

La frontière de l'astroïde (dans le carré  $[0; 1]^2$ ) a pour équation  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ .

Comme  $(0, 0)$  est à l'intérieur de l'astroïde, son intérieur a pour équation  $x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1$ .

2. Le script suivant

```
def astroide(n):
```

```
    s = 0
```

```
    for k in range(n):
```

```
        x = rand()
```

```
        y = rand()
```

```
        if x**(2/3)+y**(2/3) <= 1:
```

```
            s +=1
```

```
    return (s/n)*4
```

```
print(astroide(10000000)/np.pi)
```

renvoie (sur mon essai, mais il ne renverra pas deux fois la même valeur)

0.37494498169710994

D'où il ressort que  $\mathcal{A}_{\text{astroïde}} \simeq 0,375\pi \simeq \frac{3}{8}\pi$  ???

3. 
$$I = \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} dx \stackrel{x=\sin^3(t)}{=} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t))^{3/2} 3 \cos(t) \sin^2(t) dt$$

$$I = 3 \int_0^{\pi/2} \cos^4(t) \sin^2(t) dt, \text{ et linéarisons intelligemment,}$$

$$I = 3 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2t) + 1}{2} \frac{\sin^2(2t)}{4} dt$$

$$I = \frac{3}{8} \int_0^{\pi/2} \cos(2t) \sin^2(2t) + \frac{1 - \cos(4t)}{2} dt$$

$$I = \frac{3}{16} \times \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8} \left[ \frac{\sin^3(2t)}{6} - \frac{\sin(4t)}{8} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{32} \text{ donc } \mathcal{A}_{\text{astroïde}} = \frac{3\pi}{8}.$$

**Exercice 200**

*Le paradoxe des anniversaires*

Le paradoxe des anniversaires fait partie des *paradoxes contre-intuitifs*.

On réunit  $N$  convives et on fait l'hypothèse que leurs jours de naissances  $J_1, \dots, J_N$  sont  $N$  variables indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle  $[[1; 365]]$ .

Il paraît que dès qu'on réunit au moins 23 convives, alors il y a plus d'une chance sur deux pour qu'au moins deux d'entre eux soient nés le même jour. On note  $p_N$  la probabilité que, lorsqu'on réunit  $N$  convives, au moins deux d'entre eux soient nés le même jour.

1. Justifier que

$$J = \text{np.ceil}(\text{rand()} * 365)$$

simule une variable de loi uniforme sur  $[[1; 365]]$ .

2. Écrire une fonction `anniv()` qui crée une liste de simulations  $J_1, \dots, J_N$  de variables indépendantes du loi  $\mathcal{U}([1; 365])$  telle que
  - (i)  $\forall i, j \in [[1; N - 1]], (i \neq j) \implies J_i \neq J_j$ ;
  - (ii)  $\exists i \in [[1; N - 1]], J_N = J_i$ .

La fonction `anniv()` renvoie alors  $N$  (mais ne renvoie pas la liste créée pour calculer  $N$ ).

3. a) Définir en une phrase la variable aléatoire  $X$  simulée par la fonction `anniv()`.  
 b) Soit  $Y$  la variable indicatrice de l'événement  $[X \leq 23]$ . Quelle est sa loi et quelle est son espérance ?
4. En déduire un algorithme évaluant  $p_{23}$  par simulation et donner une valeur obtenue au bout de 1 000 000 de simulations, voire 10 000 000 suivant la vitesse de votre ordinateur.
5. En prenant comme univers des possibles  $\Omega = [[1; 365]]^{23}$ , calculer de façon exacte  $p_{23}$ , puis écrire un script Python calculant cet probabilité. Faire de même pour calculer  $p_{35}$ ,  $p_{41}$  et  $p_{47}$ .

### Solution (Ex.200 – *Le paradoxe des anniversaires*)

1. Rappelons que `np.ceil(x)` est le plafond du réel  $x$ , noté  $\lceil x \rceil$  et défini par
 
$$\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}, \quad \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil.$$

Posons  $J = \lceil 365.U \rceil$ . Comme  $U(\Omega) = ]0; 1[$ ,  $365/U(\Omega) = ]0; 365[$  et  $J(\Omega) = [[1; 365]]$ .

Soit  $k \in [[1; 365]]$ . Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([J = k]) &= \mathbb{P}(\lceil 365.U \rceil = k) = \mathbb{P}(k - 1 < 365.U \leq k) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{k - 1}{365} < U \leq \frac{k}{365}\right) = \frac{k}{365} - \frac{k - 1}{365} = \frac{1}{365}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $J$  est une variable de loi uniforme sur  $[[1; 365]]$ .

2. Par exemple :

```
def anniv():
    l = []
    t = True
    while t:
        d = np.ceil(rand()*365)
        t = not(d in l)
        l.append(d)
    return len(l)
```

Noter « `d in l` » qui renvoie `True` si  $d \in \ell$  et `False` sinon.

3. a)  $X$  simulée par la fonction `anniv()` compte le nombre nécessaire de convives pour obtenir les premiers jumeaux<sup>3</sup>, ou encore le temps d'attente de la première répétition lorsqu'on choisit au hasard et indépendamment des dates dans  $[[1; 365]]$ .
- b)  $Y$  est la variable indicatrice de l'événement « il faut au plus 23 convives pour avoir au moins deux jumeaux ».
- Comme toute variable indicatrice,  $Y$  suit une loi de Bernoulli, de paramètre  $\mathbb{P}([X \leq 23]) = p_{23}$ .
- Donc :  $Y \leftrightarrow \mathcal{B}(p_{23})$  et  $\mathbb{E}(Y) = p_{23}$ .

4. Ceci :

```
p = 0
n = 1000000
for i in range(n):
    p += anniv() <= 23
print(n, p/(n+1))

produit : 10000000  0.507194649280535
```

5.  $\text{Card}(\Omega) = 365^{23}$ .

Soit  $A$  l'événement : « parmi les 23 dates, deux au moins coïncident ».

Alors  $\bar{A}$  est : « les 23 dates sont distinctes deux à deux » et  $\text{Card}(\bar{A}) =$

$$365 \times 364 \times \cdots \times (365 - 22) = \frac{365!}{342!}.$$

Donc  $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{365!}{342!(365^{23})} = \prod_{i=0}^{22} \frac{365-i}{365}$ , cette dernière formulation évitant de manipuler de grands nombres tout en étant facilement programmable.

```
N = eval(input('N='))
p = 1
```

---

3. J'entends par « jumeaux » le même jour d'anniversaire, pas nécessairement la même année.

```

for i in range(N):
    p =p*(365-i)/365
print('N='+str(N)+' :   p=',1-p)

```

donne

```

N=23 :   p= 0.5072972343239855
N=35 :   p= 0.8143832388747152
N=41 :   p= 0.9031516114817354
N=47 :   p= 0.9547744028332993

```

En prenant comme univers des possibles  $\Omega = \llbracket 1 ; 365 \rrbracket^{23}$ , calculer de façon exacte  $p_{23}$ , puis  $p_{35}$ .

### Exercice 201

*Simulation et schéma de Bernoulli*

Soit  $p \in ]0 ; 1[$ .

1. Proposer une fonction  $\text{Ber}(p)$  simulant une variable de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , c'est-à-dire renvoyant 1 ou 0, avec une probabilité  $p$  et  $1 - p$  respectivement.
2. Proposer une fonction  $\text{B}(n, p)$  simulant une variable de loi de binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ 
  - (i) d'abord en utilisant une boucle avec  $n$  répétitions ;
  - (ii) ensuite sans boucle.
3. a) Proposer une fonction  $\text{G}(p)$  simulant une variable de loi géométrique de paramètre  $p$  à l'aide d'une boucle conditionnelle `while ... :`
  - b) Soit  $U$  de loi uniforme sur  $]0 ; 1[$  et  $X = \left\lceil \frac{\ln(U)}{\ln(1-p)} \right\rceil + 1$ .  
Montrer que  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .
  - c) En déduire une fonction  $\text{G}(p)$  simulant une variable de loi géométrique de paramètre  $p$  sans utiliser de boucle.

**Solution** (Ex.201 – *Simulation et schéma de Bernoulli*)

1. `def Ber(p):`  
    `return int(rand() $<$ p)`
2. (i)

```

def B(n,p):
    s = 0
    for k in range(n):
        if rand() < p:
            s +=1
    return s

```

ou

```

def B(n,p):
    s = 0
    for k in range(n):
        s += rand() < p
    return s

```

(ii) À méditer

```

def B(n,p):
    return sum(rand(n)<p)

```

3. a) Comptons le nombre d'échecs jusqu'au premier succès...

```

def geometrique(p):
    X = 0
    while rand() >= p:
        X += 1
    return X+1

```

b)  $U(\Omega) = ]0; 1[$  donc  $\ln(U) < 0$ . Comme  $\ln(1-p) < 0$ ,  $\frac{\ln(U)}{\ln(1-p)} > 0$  et

$Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Y = k]) &= \mathbb{P}\left(\left\lfloor \frac{\ln(U)}{\ln(1-p)} \right\rfloor + 1 = k\right) = \mathbb{P}\left(\left\lfloor \frac{\ln(U)}{\ln(1-p)} \right\rfloor = k-1\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(k-1 \leq \frac{\ln(U)}{\ln(1-p)} < k\right) \text{ avec } \ln(1-p) < 0 \\
 &= \mathbb{P}(k \ln(1-p) < \ln(U) \leq (k-1) \ln(1-p)) \\
 &= \mathbb{P}((1-p)^k < U \leq (1-p)^{k-1}) \text{ avec } U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0; 1[), \\
 &= (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = (1-p)^{k-1}(1 - (1-p)) \\
 &= (1-p)^{k-1}p,
 \end{aligned}$$

donc  $Y$  suit bien la loi géométrique de paramètre  $p$ .

c) D'où la simulation directe sans boucle :

```

def geometrique2(p):
    return np.ceil(np.log(rand())/np.log(1-p))

```

**Exercice 202**

*Loi des séries*

On lance indéfiniment une pièce pouvant amener, à chaque lancer et indépendamment des autres lancers, « Pile » avec une probabilité  $p \in ]0; 1[$  et « Face » avec la probabilité  $q = 1 - p$ .

On note  $S_1$  et  $S_2$  respectivement la longueur de la première série de côtés identiques et celle de la seconde.

Ainsi, si on obtient comme premiers lancers

$$\underbrace{P_1 P_2 P_3}_{1\text{ère série}} \quad \underbrace{F_4 F_5}_{2\text{ème série}} \quad P_6 \dots$$

alors  $S_1 = 3$  et  $S_2 = 2$ .

1. Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule  $S_1$  et  $S_2$ .

```
def serie(p):
    E1 = rand() < p
    S1 = 1
    while (rand() < p) == E1:
        S1 += ...
    S2 = ...
    while ..... :
        S2 += ...
    return S1, S2
```

2. a) Afin d'évaluer  $\mathbb{E}(S_1)$  et  $\mathbb{E}(S_2)$ , écrire un script  
 (i) demandant la valeur de  $p$ ,  
 (ii) effectuant une série de 100 000 simulations de  $S_1$  et  $S_2$ ,  
 (iii) affichant la moyenne des simulations obtenues.  
 b) Remplir le tableau suivant avec les moyennes obtenues :

$p$	$m_1$	$m_2$
1/4		
1/3		
1/2		
2/3		
3/4		

- c) Qu'observe-t-on concernant  $S_2$  ?  
 3. a) Déterminer la loi du couple  $(S_1, S_2)$ .  
 b) En déduire la loi de  $S_1$  puis son espérance.  
 c) Même question pour  $S_2$ .  
 d) Confronter ces résultats aux simulations.

e) À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on  $\mathbb{E}(S_1) = \mathbb{E}(S_2)$  ?

**Solution (Ex.202 – Loi des séries)**

1. Proposition (il n'y a pas trop de choix) :

```
def serie(p):
    E1 = rand() < p
    S1 = 1
    while (rand() < p) == E1:
        S1 += 1
    S2 = 1
    while (rand() < p) != E1:
        S2 += 1
    return S1, S2
```

2. a) `p= eval(input('p= ? '))`

```
n = 100000
s = np.zeros(2)
for k in range(n):
    s += np.array(serie(p))
print(s/n)
```

b) On obtient par exemple :

$p$	$m_1$	$m_2$
1/4	3.32782	1.99759
1/3	2.50762	1.99996
1/2	1.99523	1.99769
2/3	2.49022	1.99595
3/4	3.3324	2.00208

c)  $m_2$ , qui estime  $\mathbb{E}(S_2)$ , semble ne pas dépendre de  $p$ .

3. a)  $(S_1, S_2)(\Omega) = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . Soit  $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .

$$[S_1 = i, S_2 = j] = (P_1 \cap \dots \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_{i+j} \cap P_{i+j+1}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_i \cap P_{i+1} \cap \dots \cap P_{i+j} \cap F_{i+j+1})$$

Ces deux événements sont incompatibles, et comme les lancers ont des résultats indépendants,

$$\mathbb{P}([S_1 = i, S_2 = j]) = p^i q^j p + q^i p^j q = p^{i+1} q^j + q^{i+1} p^j.$$

b) À l'aide du système complet d'événements  $([S_2 = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$ , la formule des probabilités totales donne

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([S_1 = i]) = \sum_{j=1}^{+\infty} (p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j) \stackrel{gom.}{=} p^{i+1} \frac{q}{1-q} + q^{i+1} \frac{p}{1-p}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([S_1 = i]) = p^i q + q^i p.$$

$$\text{De } \sum_{i=1}^{+\infty} ip^i = p \frac{d}{dp} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} p^i \right) = p \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{1-p} \right) = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{p}{q^2}, \text{ on tire}$$

$$\mathbb{E}(S_1) \text{ existe (si !)} \text{ et } \mathbb{E}(S_1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.$$

- c) À l'aide du système complet d'événements  $([S_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ , la formule des probabilités totales donne

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([S_2 = j]) = \sum_{i=1}^{+\infty} (p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j) \stackrel{gom.}{=} q^j \frac{p^2}{1-p} + p^j \frac{q^2}{1-q}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([S_2 = j]) = q^{j-1}p^2 + p^{j-1}q^2.$$

$$\text{De } \sum_{j=1}^{+\infty} jp^{j-1} = \frac{d}{dq} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} q^j \right) = \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{1-q} \right) = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}, \text{ on tire}$$

$$\mathbb{E}(S_2) \text{ existe (si !)} \text{ et } \mathbb{E}(S_1) = 1 + 1 = 2.$$

- d)  $\mathbb{E}(S_2)$  ne dépend pas de  $p$ , ce que laissait penser  $m_2$ .

$$\mathbb{E}(S_1) \text{ est symétrique en } p \text{ et } q \text{ donc } \mathbb{E}(S_1) \text{ est identique pour } (p, q) = (1/4, 3/4) \text{ et } (p, q) = (3/4, 1/4) \text{ et vaut } \frac{1}{3} + \frac{3}{1} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Pour } (p, q) = (1/3, 2/3) \text{ et } (p, q) = (2/3, 1/3), \text{ on obtient } \mathbb{E}(S_1) = \frac{1}{2} + \frac{2}{1} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Pour } (p, q) = (1/2, 1/2), \mathbb{E}(S_1) = 1 + 1 = 2.$$

$$\text{e) } \mathbb{E}(S_1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{p^2 + (1-p)^2}{(1-p)p} = \frac{2p^2 - 2p + 1}{(1-p)p} = \frac{1}{(1-p)p} - 2$$

$$\text{Or } (1-p)p = p - p^2 = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \text{ avec égalité si, et seulement si, } p = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{(1-p)p} \geq 4 \text{ avec égalité si, et seulement si, } p = \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où : } \mathbb{E}(S_1) \geq \mathbb{E}(S_2), \text{ avec égalité si, et seulement si, } p = \frac{1}{2}.$$

On pourra aussi remarquer que dans ce cas,

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(S_1 = i) = \frac{1}{2^i} = \mathbb{P}(S_2 = i), \text{ donc } S_1 \text{ et } S_2 \text{ suivent franchement la même loi, qui est la loi géométrique de paramètre } 1/2.$$



(iii) cependant, toujours lorsque  $p = q = 1/2$ , la variable égale au rang  $n$  du premier retour à l'origine n'admet pas d'espérance finie, et la série définissant son espérance diverge vers  $+\infty$ .

1. a) Justifier que les variables  $X_i$  peuvent être simulées par

$$2 * (\text{rand}() < p) - 1$$

b) Compléter la fonction suivante afin qu'elle trace une trajectoire de longueur  $n$  avec le paramètre  $p$ .

```
def marche(p,n):
    s = np.zeros(n)
    for i in range(1,n):
        s[i] = .....
    plt.plot(range(n),s)
```

c) Écrire un script qui demande  $n$  et  $p$  à l'utilisateur et trace cinq trajectoires de longueur  $n$  avec ce paramètre  $p$  – on convient qu'une trajectoire de longueur  $n$  contient  $n + 1$  points, le premier d'entre eux étant l'origine  $(0, 0)$ .

d) Exécuter ce script pour  $n = 200$  et  $p = 0, 5$ , puis  $p = 0, 45$  et  $p = 0, 55$ , et observer.

e) Tracer cinq trajectoires de longueur 400 avec  $p = 0, 5$ . Observer qu'il y a vraisemblablement des trajectoires qui restent longtemps sans repasser par l'origine, voire n'y repassent pas.

*Ce phénomène est connu sous le nom « persistance de la malchance » : bien qu'on soit (presque-)sûr de revenir en l'origine, difficile de savoir quand...*

2. Dans cette question,  $p = 1/2$ .

On souhaite évaluer l'espérance de la variable  $T$  égale au nombre de déplacements nécessaires au premier retour à l'origine.

a) Écrire une fonction  $T()$  simulant la variable  $T$ .

b) Écrire un script créant un `np.array` contenant 1000 simulations de la variable  $T$ , affichant la plus grande valeur de ce tableau ainsi que sa moyenne.

c) Exécuter plusieurs fois ce script et observer.

Pourquoi certaines exécutions sont-elles longues, voire très longues ?

Quel est votre record de persistance de la malchance ?

La moyenne converge-t-elle ?

Méditer...

**Solution (Ex.203 – Marche aléatoire)**

1. a)  $\mathbb{P}(2 * (\text{rand}() < p) - 1 = 1) = \mathbb{P}(\text{rand}() < p) = 1) = \mathbb{P}(\text{rand}() < p) = p$ .

$$\mathbb{P}(2 * (\text{rand}() < p) - 1 = -1) = \mathbb{P}((\text{rand}() < p) = 0) = \mathbb{P}(\text{rand}() \geq p) = 1 - p.$$

```
b) def marche(p,n):
    s = np.zeros(n+1)
    for i in range(1,n+1):
        s[i] = .....
    plt.plot(range(n+1),s)
```

```
c) n = eval(input('n='))
    p = eval(input('p='))
    for i in range(5):
        marche(p,n)
    plt.plot([0,n],[0,0])
```

d) Observer...

e) Bis

```
2. a) def T():
    S = 2*(rand())-1
    T = 1
    while S:
        S +=2*(rand())-1
        T +=1
    return T
```

```
b) N = 1000
    S = np.zeros(N)
    for i in range(N):
        S[i] = T()
    print(np.max(S),sum(S/N))
```

c) Pourquoi certaines exécutions sont-elles longues, voire très longues?  
 En zone de persistance de malchance, l'atterrissage peut être long à venir...

Quel est votre record de persistance de la malchance ? Ça dépend, jamais deux fois le même...

La moyenne converge-t-elle ? Manifestement non...

# Chapitre 61

## Propagation d'une épidémie & résolutions numériques d'équations

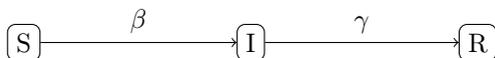
### A. Modèle SIR

Le modèle SIR est historiquement le premier exemple de modèle à compartiments, c'est-à-dire dans lequel on divise la population en plusieurs catégories. C'est encore aujourd'hui le modèle à la base des simulations actuels. Il a été introduit en 1927 par Anderson Gray MCKENDRICK (1876–1943).

Pour une population donnée, on étudie la taille de trois sous-populations au cours du temps  $t$  :  $S(t)$  représente les personnes saines (susceptible en anglais) au temps  $t$ ,  $I(t)$  les personnes infectées (infected), et  $R(t)$  les personnes retirées (removed).

Il convient de bien différencier les personnes saines des personnes retirées : les personnes saines n'ont pas encore été touchées par le virus, alors que les personnes retirées sont guéries, et donc immunisées. Autrement dit, les personnes retirées ne sont plus prises en compte. Par conséquent, le modèle SIR de base ne s'occupe pas directement de prédire la mortalité de l'épidémie, pour cela nous verrons les modifications que nous pourrions apporter.

Le modèle SIR peut donc être représenté par le schéma suivant :



où

- $\beta$  représente le *taux de transmission*, c'est à dire le taux de personnes

saines qui deviennent infectées

- $\gamma$  le *taux de guérison*, c'est à dire le taux de personnes infectées qui deviennent retirées.

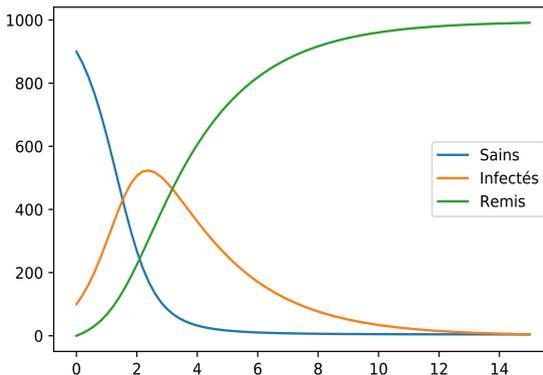
Mathématiquement, le modèle SIR est donné par le système suivant :

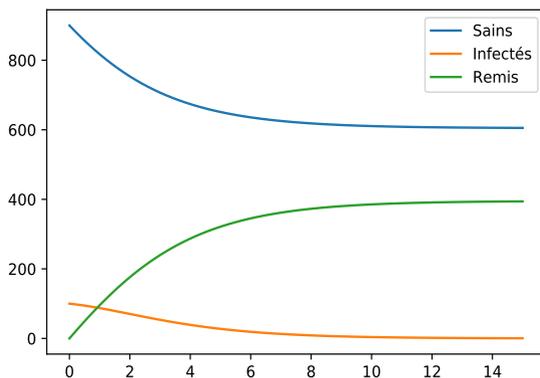
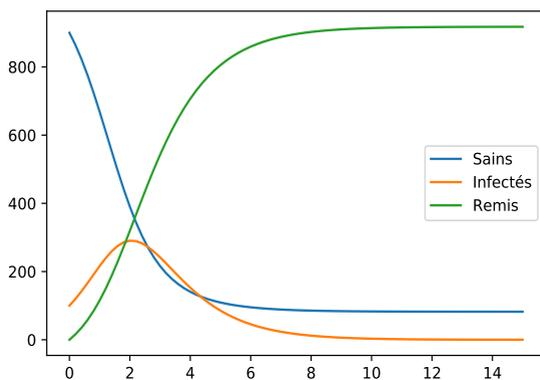
$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) & (1.1) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) & (1.2) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) & (1.3) \end{cases}$$

avec

$$R(0) = 0, \quad S(0) > 0, \quad I(0) > 0 \quad \text{et} \quad S(0) + I(0) = N.$$

Au départ de l'épidémie, *a priori* le nombre  $I(0)$  de personnes infectées est très faible au regard de la population totale  $N$ .





### Exercice 204

*Quelques propriétés du modèle SIR*

Justifier les propriétés suivantes.

1. La population totale  $N = S(t) + I(t) + R(t)$  est constante.
2.  $S(t)$ ,  $I(t)$  et  $R(t)$  restent strictement positifs (sauf  $R$  uniquement en  $t = 0$ ).
3. Quand  $t$  parcourt  $[0; +\infty[$ ,  $S(t)$  décroît strictement vers une limite  $S_\infty > 0$ ,  $I(t)$  tend vers 0 et  $R(t)$  croît strictement vers une limite  $R_\infty < N$ .
4.  $S_\infty$  vérifie la relation

$$-\ln\left(\frac{S_\infty}{S(0)}\right) = \frac{\beta}{\gamma}(N - S_\infty).$$

5.  $R_\infty$  vérifie la relation

$$-\ln\left(\frac{N - R_\infty}{S(0)}\right) = \frac{\beta}{\gamma}R_\infty,$$

et si on se permet l'approximation  $S(0) \simeq N$  (le nombre initial d'infectés est très très faible au regard de la population totale),

$$-\ln\left(1 - \frac{R_\infty}{N}\right) \simeq \frac{\beta}{\gamma}R_\infty,$$

**Solution (Ex.204 – Quelques propriétés du modèle SIR)**

1. En notant  $N(t)$  la population à l'instant  $t$ , (1) + (2) + (3) donne  $\frac{dN(t)}{dt} = 0$ .

2. En considérant (1) comme une équation d'ordre 1 vérifiée par  $S$ , on a

$$S(t) = S(0)e^{-\beta \int_0^t I(u)du} > 0.$$

De même, (2) fournit

$$I(t) = I(0)e^{\beta \int_0^t I(u)du - \gamma t} > 0.$$

(3) induit alors que  $R$  est strictement croissante, et avec  $R(0) = 0$ ,  $R$  reste strictement positive sur  $]0; +\infty[$ .

3.  $S$ ,  $I$  et  $R$  sont bornées, à valeurs dans  $[0; N]$  puisque  $S + I + R = N$ .

Or (1) induit que  $S$  est strictement décroissante, et étant minorée, elle admet une limite finie  $S_\infty$ .

$R$  est croissante, et étant majorée, elle admet une limite finie  $R_\infty$ .

Et comme  $I = N - S - R$ ,  $I$  admet aussi une limite finie  $I_\infty$ .

De plus, (3) s'écrit  $R(t) = \int_0^t \gamma I(u)du$ , donc si  $I_\infty > 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = +\infty$ , ce qui est absurde.

Donc  $I_\infty = 0$ ,  $R_\infty \in ]0; N[$ ,  $S_\infty \in ]0; N[$  et  $R_\infty + S_\infty = N$ .

4. (1) peut s'écrire  $\frac{d \ln(S(t))}{dt} = -\beta I(t)$  que l'on peut intégrer sur  $[0; +\infty[$  en

$$\ln(S_\infty) - \ln(S(0)) = -\beta \int_0^{+\infty} I(t)dt.$$

Et (2) réécrite  $\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{dS(t)}{dt} - \gamma I(t)$  s'intègre en  $-I(0) = -S_\infty + S(0) -$

$$\gamma \int_0^{+\infty} I(t)dt.$$

En éliminant  $\int_0^{+\infty} I(t)dt$ ,  $\ln \frac{S_\infty}{S(0)} = \frac{\beta}{\gamma} (-I(0) + S_\infty - S(0))$ , et comme

$R(0) = 0$ ,  $I(0) + S(0) = N$ . Donc  $-\ln \frac{S_\infty}{S(0)} = \frac{\beta}{\gamma} (N - S_\infty)$

5. Il suffit de se souvenir que  $R_\infty = N - S_\infty$  puisque  $I_\infty = 0$ .

### Exercice 205

*Taux de reproduction  $\mathcal{R}_0$  et théorème du seuil*

On définit le *taux de reproduction*  $\mathcal{R}_0$  par

$$\mathcal{R}_0 \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\beta S(0)}{\gamma} \simeq \frac{\beta N}{\gamma}.$$

*En général, le nombre initial d'infectés n'est pas connu précisément – il faudrait tester toute la population pour le connaître –, mais s'il concerne quelques cas, voire quelques milliers de cas, pour une population s'évaluant en dizaines de millions ou plus, l'approximation est tout à fait recevable.*

#### Théorème du seuil

1. Montrer que si  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , alors  $I$  est décroissante et il n'y a pas d'épidémie.
2. Montrer que si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , alors  $I$  est strictement croissante jusqu'à un pic épidémique puis décroissante.

**Solution (Ex.205 – Taux de reproduction  $\mathcal{R}_0$  et théorème du seuil)**

(2) donne  $\frac{dI(t)}{dt} = I(t)(\beta S(t) - \gamma)$  avec  $I > 0$  et  $S$  strictement décroissante.

1. Si  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , alors  $\beta S(t) - \gamma \leq \beta S(0) - \gamma$  et  $\beta S(0) - \gamma = \gamma(\mathcal{R}_0 - 1) \leq 0$ . Donc  $I$  décroît, tendant vers  $I_\infty = 0$  : la maladie s'éteint sans pic épidémique.
2. Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , alors  $\beta S(0) - \gamma = \gamma(\mathcal{R}_0 - 1) > 0$ . Donc  $I$  est initialement croissante. Comme  $I$  tend vers  $I_\infty = 0$ ,  $I$  décroît nécessairement à partir d'un certain  $t_0$  où elle atteint son maximum. Alors  $I'(t_0) = 0 = \beta S(t_0) - \gamma$ . Au-delà, pour  $t > t_0$ , puisque  $S$  est strictement décroissante,  $\beta S(t) - \gamma < 0$  donc  $I$  décroît strictement à partir de  $t_0$  : la maladie atteint un unique pic épidémique.

### Quelques interprétations

- $\beta N$  est le nombre de personnes qu'une personne infectée contamine par unité de temps et  $1/\gamma$  est la durée moyenne de la période infectieuse (c'est la

durée moyenne en unité de temps pour atteindre la guérison. En effet, pensez à l'espérance de la loi géométrique : si la probabilité de guérison par unité de temps est  $\gamma$ , alors le temps moyen pour obtenir la guérison est  $1/\gamma$  unités de temps).

Donc  $\mathcal{R}_0$  est le nombre moyen de « cas secondaires » dûs à une personne infectée.

• Le théorème du seuil montre l'intérêt de ramener  $\mathcal{R}_0$  en-dessous de 1, et l'interprétation de  $\mathcal{R}_0$  indique des stratégies pour réduire l'épidémie :

(i) confinement, distanciation sociale et fermeture de lieux fréquentés pour réduire le taux de transmission  $\beta$  ;

(ii) traitement médicaux pour augmenter le taux de guérison  $\gamma$  et réduire la période infectieuse ;

(iii) dépistage et quarantaine pour réduire simultanément  $\beta$  et  $1/\gamma$ .

• Suivant les conditions initiales, on observe que la propagation s'arrête lorsque le nombre d'immunisés  $R$  atteint un certain seuil. C'est l'**immunité grégaire ou collective**.

Pour atteindre cet état, il faut que la proportion d'immunisés soit  $i = \frac{R_\infty}{N}$ .

On a vu que  $R_\infty$  est implicitement défini par

$$-\ln\left(1 - \frac{R_\infty}{N}\right) = \mathcal{R}_0 \frac{R_\infty}{N}.$$

L'étude de la fonction  $i \mapsto \ln(1 - i) + \mathcal{R}_0 i$  montre que l'équation

$$\ln(1 - i) + \mathcal{R}_0 i = 0$$

admet un unique solution dans  $]0; 1[$ .

• Parmi les moyens de lutte, la **vaccination** permet de baisser  $\mathcal{R}_0$ , l'objectif étant alors de passer sous le seuil de 1.

Si une proportion  $p$  de la population est vaccinée, cela revient remplacer dans le modèle SIR initial  $S(0)$  par  $(1 - p)S(0)$  et  $R(0)$  par  $pS(0)$ .  $\mathcal{R}_0$  devient alors  $(1 - p)\mathcal{R}_0$  et la condition pour qu'il n'y ait pas d'épidémie devient

$$(1 - p)\mathcal{R}_0 \leq 1 \iff p \geq 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

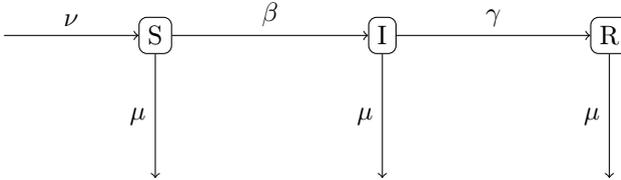
On atteint alors une immunité collective par vaccination.

Dans son flash-presse du 15 avril 2020, l'Institut Pasteur donne les valeurs suivant de l'immunité collective

Maladie	$\mathcal{R}_0$	$p$
Grippe saisonnière	2	50%
Rougeole	12 – 20	90% – 95%
COVID-19 (estimé)	3,3	70%

### Améliorations du modèle SIR

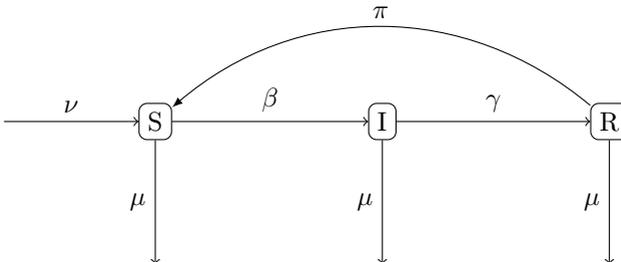
Le modèle SIR reste très théorique. On peut par exemple vouloir tenir compte de la démographie et introduire un taux de natalité  $\nu$  et un taux de mortalité  $\mu$  indépendants de la maladie.



La population totale  $N(t)$  évolue alors au cours du temps et le système différentiel devient

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \nu N(t) - \mu S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \\ N(t) = S(t) + I(t) + R(t) \end{cases}$$

On peut aussi envisager que l'immunité suite à la guérison ne soit que temporaire et proposer le modèle SIR suivant avec perte d'immunité :



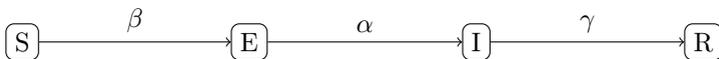
conduisant au système

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \nu N(t) - \mu S(t) + \pi R(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) - \pi R(t) \\ \frac{dN(t)}{dt} = (\nu - \mu)N(t) \end{cases}$$

Une autre possibilité est d'ajouter un ou plusieurs compartiments.

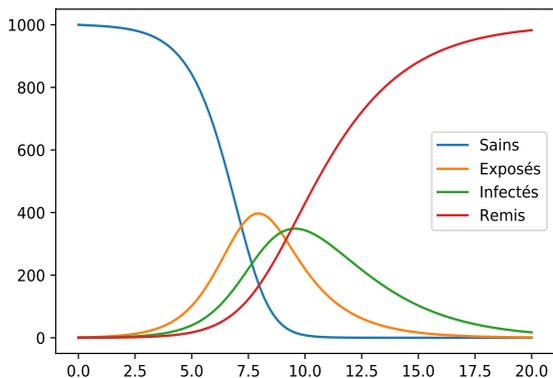
### B. Modèles SEIR, SEIRD, ...

Pour tenir compte du temps d'incubation, on ajoute un compartiment pour les personnes *infectées non infectieuses*, baptisé « E » (pour *exposées*) et un taux d'incubation  $\alpha$  pour tenir compte de la phase d'incubation. Par exemple :



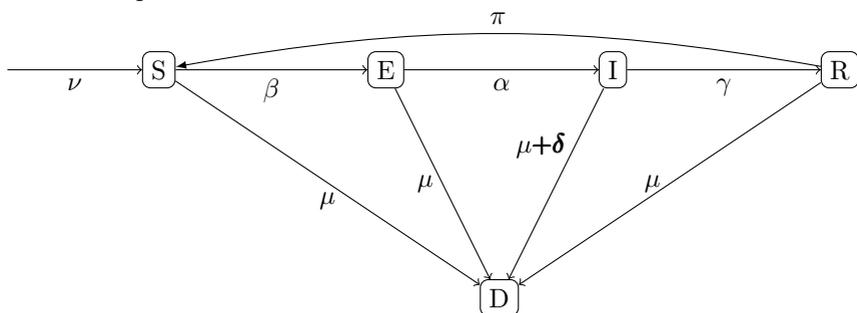
conduisant au système

$$\text{(SEIR)} \begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) & (2.1) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t) & (2.2) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \gamma I(t) & (2.3) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) & (2.4) \end{cases}$$



On peut évidemment envisager d'y ajouter des considérations démographiques (natalité  $\nu$  et mortalité  $\mu$ ), ou sanitaires (perte d'immunité  $\pi$ ), mais aussi l'enrichir d'autres compartiment, par exemple « D » pour décédés spécifiquement en raison de la maladie, avec un *taux de décès*  $\delta$ .

Par exemple :



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \nu N(t) - \mu S(t) + \pi R(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t) - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \gamma I(t) - (\mu + \delta)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) - \pi R(t) \\ \frac{dD(t)}{dt} = \mu N(t) + \delta I(t) \\ \frac{dN(t)}{dt} = (\nu - \mu)N(t) - \delta I(t) \end{array} \right.$$

### C. Modèle SEIR structuré par âge

Dans ce modèle, on considère que le comportement de la maladie dépend de l'âge de la personne (ce qui est le cas pour le Covid-19), on obtient alors des équations aux dérivées partielles (EDP).

En reprenant le système du modèle SEIR, et avec les mêmes sous-populations  $S(a, t)$ ,  $E(a, t)$ ,  $I(a, t)$  et  $R(a, t)$  que précédemment mais en fonction du temps  $t$  et de l'âge  $a$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial S(a, t)}{\partial a} = -\beta(a)S(a, t)I(a, t) - \mu(a)S(a, t) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial E(a, t)}{\partial a} = \beta(a)S(a, t)I(a, t) - \alpha(a)E(a, t) - \mu(a)E(a, t) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial I(a, t)}{\partial a} = \alpha(a)E(a, t) - \gamma(a)I(a, t) - \mu(a)S(a, t) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial R(a, t)}{\partial a} = \gamma(a)I(a, t) - \mu(a)R(a, t) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

avec  $\beta(a)$ ,  $\alpha(a)$ ,  $\gamma(a)$  et  $\mu(a)$  respectivement les taux de transmission, d'incubation, de guérison et de mortalité qui dépendent tous de l'âge.

Nous considérons de plus que  $I(0, t) = E(0, t) = R(0, t) = 0$  et  $S(0, t) = \nu$  ; c'est à dire que, pour tout temps  $t$ , les personnes naissent ( $a = 0$ ) saines et où  $\nu$  est un paramètre connu pour une population donnée (taux de natalité).

### D. Recherche numérique de $R_\infty/N$

### Exercice 206

*Méthodes de dichotomie, du point fixe et de Newton*

Soit  $\mathcal{R}_0 \in ]1; +\infty[$ . On souhaite déterminer numériquement le taux final d'immunisés  $\tau = \frac{\mathcal{R}_\infty}{N}$ , défini implicitement par

$$\tau \in ]0; 1[ \quad \text{et} \quad \ln(1 - \tau) + \mathcal{R}_0\tau = 0.$$

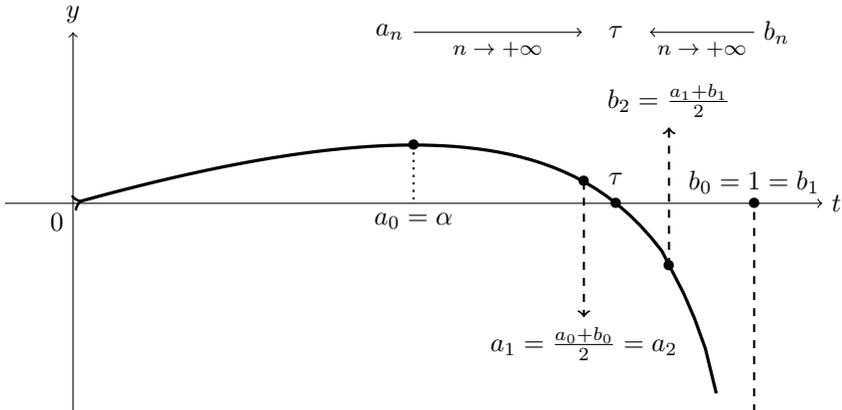
1. Soit

$$f : ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \ln(1 - t) + \mathcal{R}_0 t.$$

a) Montrer que  $f(t) = 0$  admet une unique solution.

b) On pose  $\alpha = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ . Justifier que  $\tau \in ]\alpha; 1[$ .

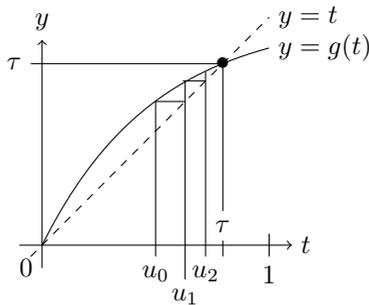
2. Méthode de dichotomie



#### RÉSOLUTION PAR DICHOTOMIE

- a) Justifier que l'on peut employer la méthode de dichotomie pour déterminer  $\tau$ .
- b) Définir la fonction d'en-tête  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  où  $\mathbf{r}$  recevra la valeur de  $\mathcal{R}_0$ .
- c) Programmer une fonction `dicho(r0, e)` calculant  $\tau$  avec une erreur maximale  $\mathbf{e}$ .
- d) Pour  $\mathcal{R}_0 = 2$ , combien de boucles le calcul de  $\tau$  avec une précision  $10^{-7}$  nécessite-t-il ?
- e) Donner des approximations de  $\tau$  à  $10^{-7}$  près pour  $\mathcal{R}_0 = 1.5$  (ébola),  $\mathcal{R}_0 = 2.5$  (grippe),  $\mathcal{R}_0 = 3.3$  (COVID-19?) puis  $\mathcal{R}_0 = 15$  (rougeole).

3. Méthode du point fixe



APPROXIMATIONS SUCCESSIVES PAR LA MÉTHODE DU POINT FIXE

On définit

$$g : ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 1 - e^{-\mathcal{R}_0 t}.$$

a) Vérifier que

$$f(t) = 0 \iff g(t) = t.$$

b) Justifier que l'intervalle  $]0; 1[$  est stable par  $g$ , puis que  $[\alpha; 1]$  est stable par  $g$ . On pourra commencer par montrer que  $g(\alpha) \geq \alpha$ .

c) On pose  $u_0 = \alpha$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = g(u_n)$ .

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \tau| \leq \frac{k^n}{\mathcal{R}_0} \quad \text{avec } k = \frac{\mathcal{R}_0}{e^{\mathcal{R}_0 - 1}} \in ]0; 1[.$$

d) Programmer une fonction `fixe(r0, e)` calculant  $\tau$  avec une erreur maximale  $e$ . On commencera par évaluer le nombre de boucles nécessaires pour calculer  $\tau$  avec une précision  $e$ .

e) Donner des approximations de  $\tau$  à  $10^{-7}$  près pour  $\mathcal{R}_0 = 1.5$  (ébola),  $\mathcal{R}_0 = 2.5$  (grippe),  $\mathcal{R}_0 = 3.3$  (COVID-19?) puis  $\mathcal{R}_0 = 15$  (rougeole), précisant le nombre de boucles nécessaires à ses calculs.

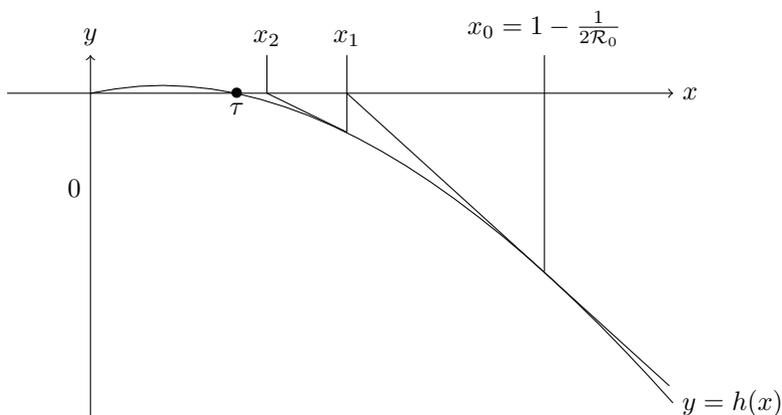
4. Méthode des tangentes de Newton

On pose

$$h : x \mapsto 1 - e^{-\mathcal{R}_0 x} - x.$$

On construit une suite  $(x_k)$  suivant la méthode des tangentes de NEWTON en posant

$$x_0 = \frac{\alpha + 1}{2} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = x_k - \frac{h(x_k)}{h'(x_k)}.$$



MÉTHODE DES TANGENTES DE NEWTON

- a) Programmer une fonction `Newton(r0,e)` calculant  $\tau$  avec une erreur maximale  $e$ , en prenant pour condition d'arrêt que  $|x_{k+1} - x_k| \leq e$ .
- b) Donner des approximations de  $\tau$  à  $10^{-7}$  près pour  $\mathcal{R}_0 = 1.5$  (ébola),  $\mathcal{R}_0 = 2.5$  (grippe),  $\mathcal{R}_0 = 3.3$  (COVID-19?) puis  $\mathcal{R}_0 = 15$  (rougeole), précisant le nombre de boucles nécessaires à ses calculs.

**Solution (Ex.206 – Méthodes de dichotomie, du point fixe et de Newton)**

1.  $f'(t) = \frac{\mathcal{R}_0 - 1 - \mathcal{R}_0 t}{1 - t}$ ,  $f'(t) = 0 \iff t = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ . Soit  $\alpha = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ .

$t$	0	$\alpha$	$\tau$	1
$f'(t)$	+	0	-	
$f(t)$	0	$f(\alpha)$	0	$-\infty$

2. Méthode de dichotomie

$f(\alpha) > 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$ , théorème des valeurs intermédiaires...

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def f(r,t):
    return np.log(1-t)+r*t
```

```

def dichot(r,e):
    a=1-1/r
    b=0.999999999
    while (b-a)>e:
        m = (a+b)/2
        if f(r,a)*f(r,m)>0:
            a = m
        else:
            b = m
    return (a+b)/2

for r in [1.5, 2.5, 3.3, 12 ]:
    print(dichot(r,1e-7))

fournit
0.5828116333716117
0.8926447384193892
0.9575740270973441
0.9999938398534473

```

La longueur initiale de l'intervalle est  $\ell_0 = 1 - \alpha = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ , et à chaque étape elle est divisée par 2. A l'issue de la  $n$ -ième étape, elle vaut  $\ell_n = \frac{1}{2^n \mathcal{R}_0}$ .

On veut  $\ell_n \leq e$  :

$\ell_n \leq e \iff 2^n \geq \frac{1}{e\mathcal{R}_0} \iff n \geq -\frac{\ln(e\mathcal{R}_0)}{\ln(2)}$  donc le nombre de boucles est

$$n = \left\lceil -\frac{\ln(e\mathcal{R}_0)}{\ln(2)} \right\rceil + 1$$

Pour  $\mathcal{R}_0 = 2$ ,  $n = 23$ .

### 3. Méthode du point fixe

On définit

$$g : ]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 1 - e^{-\mathcal{R}_0 t}.$$

$$g(t) = t \iff e^{-\mathcal{R}_0 t} = 1 - t \iff -\mathcal{R}_0 t = \ln(1 - t) \iff f(t) = 0.$$

$g'(t) = e^{-\mathcal{R}_0 t}$  donc  $g$  est croissante.

$g(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$  et  $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 1 - e^{-\mathcal{R}_0} < 1$  donc  $]0; 1[$  est stable par  $g$ .

Soit pour  $t \in [0; 1]$ ,  $\delta(t) = g(t) - t$  (on prend évidemment  $g(0) = 0$ ). Alors  $\delta$  est  $\mathcal{C}^1$ , ne s'annule qu'en 0 et en  $\tau$ , et  $\delta'(t) = \mathcal{R}_0 e^{-\mathcal{R}_0 t} - 1$  est positive au voisinage de  $0^+$  avec  $\delta(0) = 0$ . Donc  $\delta$  est positive au voisinage de  $0^+$ , donc par les valeurs intermédiaires,  $h$  est strictement positive sur  $]0; \tau[$ .

Comme  $\alpha \in ]0; \tau[$ ,  $\delta(\alpha) > 0$ , i.e.  $g(\alpha) > \alpha$ . Donc  $[\alpha; 1]$  est stable par  $g$ .

---

Par stabilité de  $[\alpha; 1]$ , on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\alpha; 1]$ .

$g$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha; 1]$  avec

$$\forall t \in [\alpha; 1], \quad g'(t) = \mathcal{R}_0 e^{-\mathcal{R}_0 t}.$$

$g'$  est positive et décroissante donc  $\forall t \in [\alpha; 1], |g'(t)| \leq g'(\alpha)$ .

$g'(\alpha) = \mathcal{R}_0 e^{1-\mathcal{R}_0} = \frac{\mathcal{R}_0}{e^{\mathcal{R}_0-1}}$  or  $e^{\mathcal{R}_0-1} > (\mathcal{R}_0 - 1) + 1$  (car  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$  avec égalité si, et seulement si,  $x = 0$ ).

Donc  $\forall t \in [0; 1], |g'(t)| \leq k$  où  $k = g'(\alpha) = \frac{\mathcal{R}_0}{e^{\mathcal{R}_0-1}}$ .

En appliquant l'inégalité des accroissement finis sur  $[\alpha; 1]$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \tau| \leq k |u_n - \tau|.$$

Et par récurrence sur  $n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \tau| \leq k^n |u_0 - \tau|.$$

Comme  $u_0 = \alpha = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}$  et  $\tau \in [\alpha; 1], 0 \leq \tau - u_0 \leq 1 - u_0 \leq \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ . Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \tau| \leq \frac{k^n}{\mathcal{R}_0} \quad \text{avec } k = \frac{\mathcal{R}_0}{e^{\mathcal{R}_0-1}} \in ]0; 1[.$$

En particulier,  $k^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  induit  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \tau$ .

$$\frac{k^n}{\mathcal{R}_0} \leq e \iff n \geq \frac{\ln(e\mathcal{R}_0)}{\ln(k)}$$

def  $g(r, t)$ :

```
return 1-np.exp(-r*t)
```

def  $fixe(r, e)$ :

```
k = r/np.exp(r-1)
n = int(np.log(e*r)/np.log(k))+1
u = 1-1/r
for i in range(n):
    u = g(r,u)
return u
```

for  $r$  in  $[1.5, 2.5, 3.3, 12 ]$ :

```
print(fixe(r,1e-7))
```

produit

167

0.582811643866

27

0.892644753609

14

0.957574014941

2

0.999993854556

4. *Méthode des tangentes de Newton*

```
def h(r,t):  
    return 1-np.exp(-r*t)-t  
  
def hp(r,t):  
    return r*np.exp(-r*t)-1  
  
def Newton(r,e):  
    n = 0  
    x = 1  
    xx = 1-1/(2*r)  
    while np.abs(xx-x) > e:  
        x, xx = xx, xx-h(r,xx)/hp(r,xx)  
        n += 1  
    print(n)  
    return xx
```

produit

4

0.582811643866

4

0.892644753609

4

0.957574014941

3

0.999993855335

On observe que le nombre maximum de boucles sur ces quatre exemples est 4, pas mal non ?

**E. Méthode d'Euler pour les systèmes différentiels**

<b>Exercice 207</b>
---------------------

<i>Les modèles SIR et SEIR par la méthode d'Euler</i>
---

On souhaite résoudre numériquement le modèle SIR décrit par les équations (1.1), (1.2) et (1.3). Pour cela on utilise la méthode d'Euler, ou méthode des différences finies.

---

On définit les constantes nécessaires :

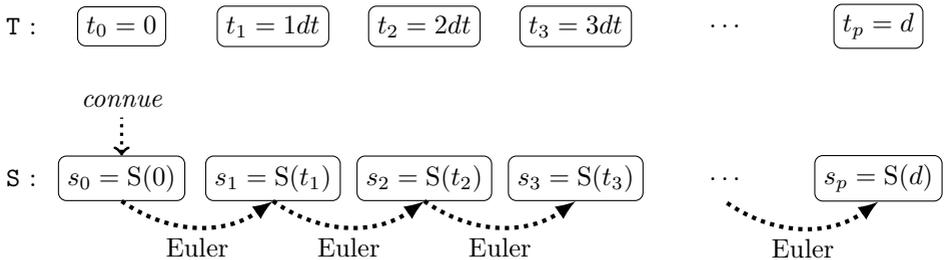
```
# Constantes de la simulation
N=1000
beta=2/N
gamma=.8
```

Pour utiliser la méthode d'Euler, on discrétise la durée d'observation  $d$  (en jours) en coupant chaque jour en  $n$  parties :

```
# Durée et échantillonnage
d=20 # durée (jours)
n=5 # échantillonnage par jours
p=n*d # nombre de données, indice 0 à t
dt=1/n
```

Ainsi, le temps est discrétisé en  $t_0 = 0, t_1 = dt, t_2 = 2dt, \dots, t_i = idt, t_p = d$ , et sera représenté par un vecteur  $T = \text{np.linspace}(0, d, p+1)$ .

Chaque fonction  $S, I$  et  $R$  sera représentée par un vecteur dont les coefficients sont les valeurs de  $S(t_0), S(t_1), \dots, I(t_0), I(t_1), \dots$ .



D'où l'initialisation

```
# initialisation
T=np.linspace(0,d,p+1)
I=np.zeros(p+1)
I[0]=1
S=np.zeros(p+1)
S[0]=N-I[0]
R=np.zeros(p+1)
```

La méthode d'Euler consiste en l'approximation

$$S(t_{i+1}) \simeq S(t_i) + \frac{dS}{dt}(t_i)(t_{i+1} - t_i).$$

1. a) Compléter les lignes suivantes afin de calculer les vecteurs S, I et R

```
# Euler
for k in range(p):
    S[k+1] = S[k]-beta*S[k]*I[k]*dt
    I[k+1] = .....
    R[k+1] = .....
```

- b) Faire tracer sur un même graphique les courbes de S, I et R.

2. Plutôt que de gérer séparément trois vecteurs S, I et R, on souhaite traiter le système vectoriellement en posant

$$X(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{pmatrix}$$

et en traduisant le système sous la forme d'une unique relation

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t)).$$

On conserve les définitions des constantes, de la durée et de l'échantillonnage précédente et on remplace l'initialisation par

```
# initialisation
T=np.linspace(0,d,p+1)
I0=1
X=np.array([N-I0,I0,0])
XX=[X]
```

où la liste XX contiendra à la fin de l'algorithme les vecteurs représentant  $X(t_0), X(t_1), X(t_2), \dots$

- a) Compléter la définition de la fonction  $f$  :

```
def f(X):
    return np.array([..... , ..... , .....])
```

- b) Écrire la boucle qui construit la liste XX.

- c) Afin de séparer facilement (sans écrire de boucle) les coordonnées dans la liste de vecteurs XX, on la transforme en un tableau à double entrée (une matrice) par

---

```
RES=np.array(XX)
```

de sorte que `RES[:,0]` fournit la première colonne de `RES` de taille  $p + 1$ .

d) Faire tracer sur un même graphique les courbes de  $S$ ,  $I$  et  $R$ .

3. Adapter le script précédent pour résoudre numériquement le modèle SEIR décrit par les équations (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4).

**Solution** (Ex.207 – *Les modèles SIR et SEIR par la méthode d'Euler*)

```
# Constantes de la simulation
```

```
N=1000
```

```
beta=2/N
```

```
gamma=.8
```

```
# Durée et échantillonnage
```

```
d=20 # durée (jours)
```

```
n=5 # échantillonnage par jours
```

```
p=n*d # nombre de données, indice 0 à t
```

```
dt=1/n
```

```
# initialisation
```

```
T=np.linspace(0,d,p+1)
```

```
I=np.zeros(t+1)
```

```
I[0]=1
```

```
S=np.zeros(t+1)
```

```
S[0]=N-I[0]
```

```
R=np.zeros(t+1)
```

```
R[0]=0
```

```
# Euler
```

```
for k in range(t):
```

```
    S[k+1] = S[k]-beta*S[k]*I[k]*dt
```

```
    I[k+1] = I[k]+beta*S[k]*I[k]*dt-gamma*I[k]*dt
```

```
    R[k+1] = R[k]+gamma*I[k]*dt
```

```
# Tracé
```

```
plt.plot(T,S)
```

```
plt.plot(T,I)
```

```
plt.plot(T,R)
```

```
plt.legend(['Sains', 'Infectés', 'Remis'])
```

et version fonction vectorielle

## CHAPITRE 61. PROPAGATION D'UNE ÉPIDÉMIE & RÉOLUTIONS NUMÉRIQUES D'ÉQUATIONS

---

```
# initialisation
T=np.linspace(0,d,p+1)
I0=100
X=np.array([N-I0,I0,0])
XX=[X]

# Euler
def f(X):
    return np.array([-beta*X[0]*X[1],
                    beta*X[0]*X[1]-gamma*X[1],
                    gamma*X[1]])

for k in range(p):
    X = X+f(X)*dt
    XX.append(X)

RES=np.array(XX)
# Tracé
plt.plot(T,RES[:,0])
plt.plot(T,RES[:,1])
plt.plot(T,RES[:,2])
plt.legend(['Sains', 'Infectés', 'Remis'])
```

Et SEIR :

```
#SEIR
N=1000
beta=4/N
gamma=.4
alpha=.5

d=20 # durée (jours)
n=5 # échantillonnage par jours
p=n*d
dt=1/n

# initialisation
T=np.linspace(0,d,p+1)
I=np.zeros(p+1)
I[0]=1
S=np.zeros(p+1)
```

---

```
S[0]=N-I[0]
E=np.zeros(p+1)
E[0]=0
R=np.zeros(p+1)
R[0]=0

# Euler
for k in range(p):
    S[k+1] = S[k]-beta*S[k]*I[k]*dt
    E[k+1] = E[k]+beta*S[k]*I[k]*dt-alpha*E[k]*dt
    I[k+1] = I[k]+alpha*E[k]*dt-gamma*I[k]*dt
    R[k+1] = R[k]+gamma*I[k]*dt

# Tracé
plt.plot(T,S)
plt.plot(T,E)
plt.plot(T,I)
plt.plot(T,R)
plt.legend(['Sains', 'Exposés', 'Infectés', 'Remis'])
```



## Chapitre 62

### Liste de exercices



# Liste des exercices

Exercice 1	<i>Variable positive d'espérance nulle</i>	7
Exercice 2	<i>Caractérisation de la nullité de la variance</i>	7
Exercice 3	<i>Espérance d'une variable bornée</i>	8
Exercice 4	<i>Espérance par domination</i>	9
Exercice 5	<i>Trinôme de signe constant</i>	11
Exercice 6	<i>Inégalité de Cauchy-Schwarz en algèbre euclidienne</i>	11
Exercice 7	<i>Inégalité de Cauchy-Schwarz pour le coefficient de corrélation linéaire</i>	12
Exercice 8	<i>Inégalité de MARKOV</i>	15
Exercice 9	<i>Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV</i>	15
Exercice 10	<i>Loi hypergéométrique</i>	17
Exercice 11	<i>Loi multinomiale et matrice de covariance</i>	21
Exercice 12	<i>Formule de l'espérance totale</i>	25
Exercice 13	<i>Vagues d'appels</i>	26
Exercice 14	<i>Problème du collectionneur</i>	28
Exercice 15	<i>Problème du scrutin par la démonstration de Joseph BERTRAND</i>	31
Exercice 16	<i>Problème du scrutin par le principe de symétrie</i>	32
Exercice 17	<i>Application à une marche aléatoire dans <math>\mathbb{Z}</math></i>	34
Exercice 18	<i>Petite considération préliminaire, ou l'enfance de l'art</i>	40
Exercice 19	<i>Retour à l'origine par les séries entières</i>	40
Exercice 20	<i>Lemmes de BOREL-CANTELLI</i>	46
Exercice 21	<i>Apparition d'un motif donné</i>	48
Exercice 22	<i>Retour en 0 d'une marche aléatoire inéquitable</i>	49
Exercice 23	<i>Loi forte des grands nombres</i>	50
Exercice 24	<i>Tests d'hypothèse et intervalles de fluctuation par Bienaymé-Tchebychev</i>	55
Exercice 25	<i>Estimation des grandes déviations, application à la fluctuation</i>	58

Exercice 26	<i>Quelques exemples usuels</i>	64
Exercice 27	<i>Inégalité de Gibbs et encadrement de l'incertitude</i>	65
Exercice 28	<i>Définition et exemples</i>	68
Exercice 29	<i>Périodicité et support</i>	70
Exercice 30	<i>Développement en série entière de <math>\phi_X</math></i>	71
Exercice 31	<i>Caractérisation de la loi par <math>\phi_X</math></i>	74
Exercice 32	<i>Indépendance et stabilités</i>	78
Exercice 33	<i>Le nombre d'or, méthodes élémentaires</i>	81
Exercice 34	<i>Méthode du point fixe et méthode des tangentes de Newton</i>	84
Exercice 35	<i>Des milliers de décimales du nombre d'or</i>	88
Exercice 36	<i>Formule de PASCAL, binôme de NEWTON &amp; formule de LEIBNIZ</i>	91
Exercice 37	<i>Formule de TAYLOR-LAPLACE et cas des polynômes</i>	95
Exercice 38	<i>Approximations numériques des dérivées</i>	96
Exercice 39	<i>Théorème et inégalité de TAYLOR-LAGRANGE</i>	98
Exercice 40	<i>Inégalités de KOLMOGOROV</i>	100
Exercice 41	<i>Constante <math>\gamma</math> d'EULER</i>	105
Exercice 42	<i>Développements en séries de <math>\ln(2)</math>, <math>\ln(3)</math> voire <math>\ln(p)</math></i>	106
Exercice 43	<i>Intégrales de WALLIS &amp; formule de STIRLING</i>	108
Exercice 44	<i>Un développement asymptotique du reste des séries de Riemann</i>	109
Exercice 45	<i>Équivalence des termes généraux, application à <math>\zeta(2)</math> et <math>\gamma</math></i>	112
Exercice 46	<i>Convexité et encadrement du reste d'une série de Riemann</i>	116
Exercice 47	<i>Transformation d'Abel</i>	121
Exercice 48	<i>Application aux calculs de sommes finies classiques</i>	122
Exercice 49	<i>Formule sommatoire d'Abel et constante d'Euler</i>	122
Exercice 50	<i>Critère de Dirichlet et application</i>	125
Exercice 51	<i>Convexité, cordes &amp; tangentes</i>	129
Exercice 52	<i>Quelques inégalités très classiques</i>	130
Exercice 53	<i>Le plus court chemin...</i>	131
Exercice 54	<i>NEWTON &amp; la superattraction, algorithme de HÉRON</i>	133
Exercice 55	<i>Inégalité de JENSEN</i>	136
Exercice 56	<i>Moyennes arithmétique, géométrique &amp; harmonique</i>	139
Exercice 57	<i>Inégalités de HÖLDER &amp; de MINKOWSKI, normes <math>\ \cdot\ _p</math></i>	140
Exercice 58	<i>Wronskien : définition et propriétés essentielles</i>	145
Exercice 59	<i>Recherche d'une seconde solution à <math>(\mathcal{H})</math></i>	147
Exercice 60	<i>Variation des constantes alias méthode de Lagrange</i>	151
Exercice 61	<i>Sur une autre application du wronskien</i>	155

Exercice 62	<i>Jouons au colleur</i>	158
Exercice 63	<i>Irrationalité de <math>\sqrt{2}</math></i>	163
Exercice 64	<i>Irrationalité de <math>\log_{10}(2)</math></i>	164
Exercice 65	<i>Irrationalité de <math>e</math></i>	164
Exercice 66	<i>Irrationalité de <math>\pi</math></i>	165
Exercice 67	<i>Étude au bord du domaine de convergence, développement en série de <math>\pi</math></i>	169
Exercice 68	<i>Application au calcul numérique de <math>\pi</math></i>	170
Exercice 69	<i>Euler à l'assaut de <math>\pi</math></i>	176
Exercice 70	<i>Formule de VIÈTE</i>	181
Exercice 71	<i>Formule de WALLIS</i>	182
Exercice 72	<i>Formule de VIÈTE, démonstration historique et vitesse de convergence</i>	183
Exercice 73	<i>Calcul de <math>\zeta(2)</math></i>	187
Exercice 74	<i>Calcul de <math>\zeta(4)</math></i>	190
Exercice 75	<i>Calcul de l'intégrale de GAUSS</i>	193
Exercice 76	<i>Fonction <math>\Gamma</math> d'EULER</i>	194
Exercice 77	<i><math>\text{sinc}</math> est de classe <math>C^\infty</math></i>	197
Exercice 78	<i>Un calcul de l'intégrale de Dirichlet</i>	198
Exercice 79	<i>La fonction <math>\text{sinc}</math> n'est pas intégrable sur <math>\mathbb{R}</math></i>	200
Exercice 80	<i><math>\text{sinc}</math> et la transformée de FOURIER</i>	201
Exercice 81	<i>Formule de STIRLING, acte I</i>	203
Exercice 82	<i>Formule de STIRLING, acte II</i>	204
Exercice 83	<i>Formule de STIRLING, acte III</i>	206
Exercice 84	<i>Une formule très eulérienne</i>	211
Exercice 85	<i>Application à la fonction <math>\Gamma</math> d'EULER</i>	213
Exercice 86	<i>Linéarisations</i>	215
Exercice 87	<i>Sommes trigonométriques</i>	216
Exercice 88	<i>Ces deux définitions coïncident</i>	219
Exercice 89	<i>Premières propriétés</i>	220
Exercice 90	<i>Les polynômes de Tchebychev vus comme vecteurs propres</i>	222
Exercice 91	<i>Racines et extrema de <math>T_n</math> sur <math>[-1,1]</math></i>	224
Exercice 92	<i>Meilleure approximation uniforme de degré <math>n</math> de la fonction nulle</i>	227
Exercice 93	<i>Deux méthodes pour l'existence et l'unicité</i>	232
Exercice 94	<i>Propriété de la base de LAGRANGE</i>	233
Exercice 95	<i>Somme constante</i>	235
Exercice 96	<i>Une expression de <math>f(x) - P_n(x)</math></i>	237
Exercice 97	<i>Étude d'une fonction auxiliaire</i>	239

Exercice 98	<i>Un équivalent de <math>\prod_{k=1}^m (\alpha^2 + x_k^2)</math></i>	240
Exercice 99	<i>... et le phénomène de Runge</i>	242
Exercice 100	<i>Erreur de l'interpolation polynomiale de LAGRANGE</i>	245
Exercice 101	<i>Les points de TCHEBYCHEV</i>	248
Exercice 102	<i>Vérifications</i>	254
Exercice 103	<i>Exemple des polynômes de TCHEBYCHEV</i>	255
Exercice 104	<i>Les polynômes orthogonaux vérifient une relation de récurrence d'ordre 2</i>	256
Exercice 105	<i>Racines des polynômes orthogonaux</i>	257
Exercice 106	<i>Propriétés des polynômes de Legendre</i>	259
Exercice 107	<i>Orthogonalité des polynômes de LEGENDRE</i>	260
Exercice 108	<i>Intégration numérique ou « Quadrature de GAUSS »</i>	264
Exercice 109	<i>Exemple dans un cas impropre</i>	266
Exercice 110	<i>Meilleure approximation polynomiale en norme <math>L^2</math>, ou au sens de HILBERT</i>	268
Exercice 111	<i>Convergence uniforme des polynômes de BERNSTEIN</i>	269
Exercice 112	<i>Quelques propriétés des polynômes de BERNSTEIN</i>	272
Exercice 113	<i>Suites régularisantes</i>	275
Exercice 114	<i>Heuristique de la convolution</i>	277
Exercice 115	<i>Régularité des convoluées</i>	281
Exercice 116	<i>Suite régularisante de fonctions <math>C^\infty</math></i>	282
Exercice 117	<i>Uniforme continuité et convergence uniforme</i>	284
Exercice 118	<i>Structure d'espace vectoriel</i>	290
Exercice 119	<i>Quelques exemples</i>	290
Exercice 120	<i>Quelques propriétés classiques</i>	291
Exercice 121	<i>Classe de dérivabilité de <math>\mathcal{L}(f)</math></i>	292
Exercice 122	<i>Transformée de la dérivée <math>\mathcal{L}(f')</math></i>	293
Exercice 123	<i>Cas des fonctions paires ou impaires</i>	300
Exercice 124	<i>Lemme de Riemann-Lebesgue</i>	300
Exercice 125	<i>Noyau de Dirichlet</i>	302
Exercice 126	<i>Orthonormalité, projection et inégalité de Bessel</i>	303
Exercice 127	<i>BESSEL et RIEMANN-LEBESGUE pour les fonctions continues par morceaux</i>	306
Exercice 128	<i>Théorème de Dirichlet</i>	308
Exercice 129	<i>Identité de PARSEVAL et application au calcul de sommes</i>	310
Exercice 130	<i>Transformée de Fourier dans l'espace <math>\mathbf{L}_1</math>, transformée de la dérivée</i>	314

---

Exercice 131	<i>Dans l'espace <math>\mathcal{S}</math>, dérivée de la transformée et transformée de la dérivée</i>	316
Exercice 132	<i>Exemples de calculs de transformées Fourier</i>	317
Exercice 133	<i>Transformation inverse</i>	319
Exercice 134	<i>Principe des zéros isolés en <math>0</math></i>	323
Exercice 135	<i>Principe du maximum en <math>0</math></i>	326
Exercice 136	<i>Taylor et les trois principes généraux</i>	328
Exercice 137	<i>Fonctions entières et dominations</i>	336
Exercice 138	<i>Sous-espaces stables</i>	339
Exercice 139	<i>Droites stables</i>	340
Exercice 140	<i>Sous-espaces vectoriels en dimension finie</i>	343
Exercice 141	<i>Sous-ensembles remarquables de <math>\mathcal{M}_n(\mathbb{R})</math></i>	344
Exercice 142	<i>Et l'ensemble des matrices diagonalisables ?</i>	346
Exercice 143	<i>Exploitation d'un polynôme annulateur</i>	347
Exercice 144	<i>Polynôme minimal et crochets de Lie</i>	350
Exercice 145	<i>Polynôme annulateur scindé à racines simples</i>	353
Exercice 146	<i>Normes usuelles sur <math>E</math></i>	356
Exercice 147	<i>Norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle</i>	356
Exercice 148	<i>Normes subordonnées et inversibilité</i>	359
Exercice 149	<i>Quotient de Rayleigh</i>	360
Exercice 150	<i>Norme subordonnée à la norme euclidienne <math>\ \cdot\ _2</math></i>	362
Exercice 151	<i>Et la norme euclidienne canonique de <math>\mathcal{M}_n(\mathbb{R})</math> ?</i>	363
Exercice 152	<i>Norme matricielle et rayon spectral</i>	365
Exercice 153	<i>Rayon spectral et limite de la suite des puissances</i>	366
Exercice 154	<i>Caractérisation en dimension finie</i>	371
Exercice 155	<i>Théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien</i>	372
Exercice 156	<i>Espace dual <math>\mathcal{E}</math> base duale</i>	374
Exercice 157	<i>Propriété des noyaux et images itérés</i>	377
Exercice 158	<i>Base adaptée à l'étude d'un endomorphisme nilpotent</i>	378
Exercice 159	<i>Propriétés des matrices circulantes élémentaires</i>	381
Exercice 160	<i>Propriétés des matrices circulantes</i>	383
Exercice 161	<i>Éléments propres</i>	387
Exercice 162	<i>Lien avec les suites récurrentes linéaires d'ordre <math>n</math></i>	390
Exercice 163	<i>Lien avec les équations différentielles linéaires scalaires homogènes d'ordre <math>n</math></i>	391
Exercice 164	<i>Localisation des racines d'un polynôme</i>	393
Exercice 165	<i>Propriétés générales des matrices stochastiques</i>	395
Exercice 166	<i>Du côté des éléments propres</i>	396
Exercice 167	<i>Quelques généralités</i>	402

Exercice 168	<i>Représentation matricielle</i>	403
Exercice 169	<i>Éléments de géométrie symplectique</i>	405
Exercice 170	<i>Quelques observations</i>	411
Exercice 171	<i>Fabriquer des matrices symétriques positives et strictement positives pour pas cher</i>	412
Exercice 172	<i>Caractérisation par les valeurs propres</i>	413
Exercice 173	<i>Application à la recherche de racines carrées</i>	414
Exercice 174	<i>Propriétés générales</i>	417
Exercice 175	<i>Cas des matrices diagonalisables</i>	417
Exercice 176	<i>Cas des matrices diagonales</i>	418
Exercice 177	<i>Matrices symplectiques de <math>\mathcal{M}_2(\mathbb{R})</math></i>	421
Exercice 178	<i>Premières propriétés des matrices symplectiques</i>	423
Exercice 179	<i>Déterminant d'une matrice symplectique</i>	425
Exercice 180	<i>Formules pour les matrices de projections orthogonales</i>	429
Exercice 181	<i>Théorème des moindres carrés</i>	432
Exercice 182	<i>Ajustements polynomiaux</i>	433
Exercice 183	<i>Un simple sinus</i>	437
Exercice 184	<i>Méthode des rectangles</i>	438
Exercice 185	<i>Méthode des trapèzes</i>	440
Exercice 186	<i>Méthode de SIMPSON</i>	442
Exercice 187	<i>Méthode de Gauss à trois points</i>	444
Exercice 188	<i>Quadrature numérique de GAUSS</i>	447
Exercice 189	<i>Gauss-Legendre, Pascal, Horner, dichotomie...</i>	448
Exercice 190	<i>Gauss-Tchebychev, exemple d'une intégrale impropre</i>	456
Exercice 191	<i>Définition de la classe <b>Polynome</b></i>	462
Exercice 192	<i>Opérations algébriques usuelles</i>	463
Exercice 193	<i>Évaluation : l'algorithme de HÖRNER</i>	464
Exercice 194	<i>Bases de Lagrange et interpolation</i>	467
Exercice 195	<i>Phénomène de RUNGE</i>	470
Exercice 196	<i>Polynômes de Tchebychev et convergence uniforme</i>	471
Exercice 197	<i>Méthode des différences divisées</i>	472
Exercice 198	<i>Le hasard pour calculer <math>\pi</math></i>	480
Exercice 199	<i>Évaluation de l'aire de l'astroïde</i>	482
Exercice 200	<i>Le paradoxe des anniversaires</i>	484
Exercice 201	<i>Simulation et schéma de Bernoulli</i>	487
Exercice 202	<i>Loi des séries</i>	488
Exercice 203	<i>Marche aléatoire</i>	491
Exercice 204	<i>Quelques propriétés du modèle SIR</i>	497
Exercice 205	<i>Taux de reproduction <math>\mathcal{R}_0</math> et théorème du seuil</i>	499
Exercice 206	<i>Méthodes de dichotomie, du point fixe et de Newton</i>	504

---

Exercice 207 *Les modèles SIR et SEIR par la méthode d'Euler* . . . 510



# Index

- [CCP – 2015 – PC – Partie 1], 193
- [CCP – 2015 – PSI – Partie 3], 193
- [CCP – 2016 – PC – ], 269
- [CCP – 2016 – PSI – ], 395
- [CCP – 2018 – PC – ], 259
- [CCP – 2018 – PSI – Pb 2], 15
- [CCP – 2019 – PC – Exo 1], 253, 263
- [CCP – 2019 – PSI – Pb 1-P1], 193
- [CCP – 2019 – PSI – Pb2-P1], 219
- [CCP – 2020 – PC – Exo no1], 197
- [CCP – 2020 – PC – Exo no2], 401, 411
- [CCP – 2020 – PC – Exo no3], 31, 39
- [CCP – 2020 – PSI – Pb no1], 197
- [CCP-M1 – 2002 – PC – ], 355
- [CCP-M1 – 2014 – PC – Partie II], 355
- [CS-M1 – 2015 – PC – ], 339
- [CS-M1 – 2016 – PC – Partie II], 313
- [CS-M1 – 2016 – PC – Partie I], 193
- [CS-M1 – 2016 – PSI – Partie III], 381
- [CS-M1 – 2018 – PC – Partie IV], 31, 39
- [CS-M1 – 2018 – PC – Parties I & II], 313
- [CS-M1 – 2018 – PSI – Partie III], 387, 417
- [CS-M1 – 2018 – PSI – Partie II], 381
- [CS-M1 – 2019 – PC – Partie II], 381
- [CS-M1 – 2020 – PC – ], 421
- [CS-M2 – 2016 – PSI – Partie IV], 295
- [CS-M2 – 2016 – PSI – Partie VI], 289
- [CS-M2 – 2016 – PSI – Parties I, II & III], 313
- [CS-M2 – 2019 – PSI – ], 377, 417
- [CS-M2 – 2020 – PC – ], 67
- [E3A-M1 – 2016 – PC – Exo 1-D], 193
- [E3A-M1 – 2016 – PC – Exo 3], 387
- [E3A-M1 – 2017 – PSI – Exo 1], 231
- [E3A-M1 – 2017 – PSI – Exo 2], 253
- [E3A-M1 – 2018 – PSI – Exo 3], 343
- [E3A-M1 – 2018 – PSI – Exo no1], 411
- [E3A-M2 – 2017 – PC – Partie II], 289

- [E3A-M2 – 2017 – PSI – ], 377
- [E3A-M2 – 2018 – PSI – Partie I], 289
- [E3A-M2 – 2019 – PSI – Partie 2], 381
- [E3A-M2 – 2019 – PSI – Partie 3], 387
- [E3A-MA – 2013 – MP – Partie II], 355
- [MP-M1 – 2016 – PC-PSI – ], 31, 39
- [MP-M1 – 2017 – PC-PSI – ], 395
- [MP-M1 – 2020 – PC – ], 377
- [MP-M2 – 2015 – PSI – ], 421
- [MP-M2 – 2018 – PC – Partie I], 215
- [MP-M2 – 2018 – PSI – Partie I], 95
- [MP-M2 – 2019 – PSI – Partie II], 269
- [MP-M2 – 2019 – PSI – Partie IV], 313
  
- Ajustement polynomial, 433
- Algorithme de HÉRON, 133
- Algorithme de HÖRNER, 465
- Approximations numériques des dérivées, 96
- Argument moitié, 217
  
- Base de LAGRANGE, 467
- Base duale, 374
  
- Calcul de  $\zeta(2)$ , 187, 311
- Calcul de  $\zeta(4)$ , 190, 311
- Classe d'objet en PYTHON, 461
- Coefficient de corrélation linéaire, 11
- Commutant d'une matrice carrée, 417
- Constante  $\gamma$  d'EULER, 105, 123
- Constante  $\gamma$  d'EULER, 211
- Continuité de l'intégrale à paramètre, 292
- Continuité monotone de la probabilité, 36, 47
- Continuité uniforme, 285
- Critère de DIRICHLET, 125
- Crochets de Lie, 350
  
- Démonstration par dénombrement, 92, 93
- Dérivation sous l'intégrale, 194, 195, 292
- Déterminant de VANDERMONDE, 102, 232, 265, 388, 435, 452
- Division euclidienne dans  $\mathbb{R}[X]$ , 265, 348
- Droites stables, 340
  
- Endomorphisme nilpotent, 377
- Entropie de SHANNON, 63
- Équations différentielles linéaires scalaires homogènes d'ordre  $n$ , 391
- Espace de SCHWARTZ, 316
- Espace dual, 371, 407
- Espaces  $L^2$  de HILBERT, 253, 267
- Espérance conditionnelle, 25
- Espérance totale, 25
  
- Fonction caractéristique d'une V.A., 68
- Fonction convexe, 129
- Fonction cotangente, 187
- Fonction d'ordre exponentiel, 289
- Fonction  $\Gamma$  d'EULER, 195, 266, 290
- Fonction  $\Gamma$  d'EULER, 213
- Fonction génératrice, 43
- Fonction lorentzienne, 318
- Fonction poids, 253

---

Forme bilinéaire, 401  
 Forme linéaire, 371  
 Forme quadratique, 401  
 Forme symplectique, 406  
 Formule de CAUCHY, 336  
 Formule de DE MOIVRE, 219  
 Formule d'EULER de l'arc tangente, 177  
 Formule de l'espérance totale, 26  
 Formule de LEIBNIZ, 91  
 Formule de MACHIN, 172  
 Formule de PASCAL, 32, 91  
 Formule de STIRLING, 37, 108, 203  
 Formule de TAYLOR avec reste intégral, 85, 95, 111  
 Formule de TAYLOR pour les polynômes, 95  
 Formule de TAYLOR pour les séries entières, 328  
 Formule de VANDERMONDE, 18  
 Formule de VIÈTE, 181  
 Formule de WALLIS, 182  
 Formule du binôme de NEWTON, 91, 216, 219, 273  
 Formule sommatoire d'ABEL, 123  
 Formules d'EULER, 215, 303, 318  
  
 Générateur aléatoire, 479  
  
 Hyperplan, 371  
  
 Identité de PARSEVAL, 310  
 Identité du parallélogramme, 402  
 Indice de nilpotence, 377  
 Inégalité de BESSEL, 303, 306  
 Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, 16, 56, 270  
 Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, 11, 364  
 Inégalité de GIBBS, 65  
  
 Inégalité de HÖLDER, 140  
 Inégalité de JENSEN, 136  
 Inégalité de MARKOV, 15, 52  
 Inégalité de MINKOWSKI, 140  
 Inégalité de TAYLOR-LAGRANGE, 73  
 Inégalité de TAYLOR-LAGRANGE, 98  
 Inégalités de KOLMOGOROV, 100  
 Intégrale de DIRICHLET, 197  
 Intégrale de GAUSS, 193, 207, 318, 320  
 Intégrale de RIEMANN, 195  
 Intégrale de WALLIS, 108, 177, 183  
 Intégrale semi-convergente, 200  
 Interpolation polynomiale de LAGRANGE, 231, 245  
 Intervalle de fluctuation, 56  
 Irrationalité de  $e$ , 164  
 Irrationalité de  $\log_{10}(2)$ , 164  
 Irrationalité de  $\pi$ , 165  
 Irrationalité de  $\sqrt{2}$ , 163  
  
 Lemme de RIEMANN-LEBESGUE, 301, 303, 306  
 Lemmes de BOREL-CANTELLI, 46  
 limsup, 46  
 Linéarisation trigonométrique, 215, 256, 484  
 Localisation des racines d'un polynôme, 393  
 Loi faible des grands nombres, 56, 271, 479  
 Loi forte des grands nombres, 50  
 Loi hypergéométrique, 18  
 Loi multinomiale, 21  
  
 Marche aléatoire, 31, 39, 49, 492  
 Matrice compagnon d'un polynôme, 387  
 Matrice de covariance, 21

- Matrice de rotation, 340
- Matrice de symétrie orthogonale, 420
- Matrices circulantes, 381
- Matrices stochastiques, 395
- Matrices symétriques positives, 411
- Matrices symétriques strictement positives, 411
- Matrices symplectiques, 408, 421
- Meilleure approximation au sens de HILBERT, 268
- Méthode d'EULER, 510
- Méthode de dichotomie, 450, 505
- Méthode de LAGRANGE, 151
- Méthode de quadrature de GAUSS, 263, 444, 447
- Méthode de SIMPSON, 442
- Méthode des approximations successives, 81, 505
- Méthode des différences divisées, 473
- Méthode des différences finies, 510
- Méthode des rectangles, 438
- Méthode des tangentes de NEWTON, 84, 133, 507
- Méthode des trapèzes, 441
- Méthode du point fixe, 84, 505
- Moyennes arithmétique, géométrique & harmonique, 139
  
- Nombre d'or, 81
- Norme matricielle, 356
- Norme matricielle subordonnée, 357
- Normes  $\|\cdot\|_p$ , 140
- Noyau de DIRICHLET, 302
  
- Partie convexe, 395
- Partie dense, 343
- Partie fermée, 343, 395
  
- Partie ouverte, 343
- Phénomène de RUNGE, 237, 470
- Pile (structure), 449
- Plus court chemin, 131
- Points de TCHEBYCHEV, 248, 471
- Polynôme annulateur, 347, 382
- Polynôme minimal, 350
- Polynômes de BERNSTEIN, 272
- Polynômes de HERMITE, 254
- Polynômes de LAGRANGE, 233, 237, 451, 467
- Polynômes de LAGUERRE, 254
- Polynômes de LEGENDRE, 254, 259
- Polynômes de TCHEBYCHEV, 219, 254
- Principe des zéros isolés, 323, 328
- Principe du maximum, 326, 328
- Principe du prolongement analytique, 328
- Procédé de GRAM-SCHMIDT, 266
- Produit de CAUCHY, 42
- Produit de convolution, 280
- Produit infini, 181
- Programmation orientée objet (POO), 461
- Projecteur orthogonal, 303, 412
- Projection et meilleure approximation en norme, 268, 432
- Propriété des noyaux et images itérés, 377
  
- Quotient de RAYLEIGH, 360
  
- Racines carrées d'une matrice carrée, 414, 417
- Racines des polynômes orthogonaux, 257
- Racines multiples et polynômes dérivés, 260
- Racines  $n$ -èmes de l'unité, 382
- Rayon spectral, 360

---

Récurtivité, 449, 457  
Régularisée d'une fonction c.p.m.,  
277, 308

Séries de FOURIER, 299  
Séries de RIEMANN, 109, 310  
Séries doubles, 328  
Séries entières, 323  
sinus cardinal, 74, 197, 317  
Sommmation par parties, 121  
Somme géométrique, 303  
Somme trigonométrique, 216, 302  
Sous-espaces stables, 339  
Sous-multiplicativité, 356  
Stabilité de la loi binomiale, 40  
Stabilité pour le produit matriciel,  
384, 395  
Suite de FIBONACCI, 122  
Suite régularisante, 275, 283  
Suites récurrentes linéaires d'ordre  
 $n$ , 390

Taux de reproduction, 499  
Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ,  
147  
Théorème de convergence domi-  
née, 204, 205  
Théorème de DIRICHLET, 308

Théorème de FUBINI, 319, 328  
Théorème de HEINE, 285  
Théorème de LEBESGUE, 212, 320  
Théorème de LIOUVILLE, 336  
Théorème de représentation des  
formes linéaires, 372  
Théorème de ROLLE, 99, 130, 260  
Théorème de TAYLOR-LAGRANGE,  
98  
Théorème de transfert, 27, 30, 60,  
68, 271  
Théorème de WEIERSTRASS, 269  
Théorème des moindres carrés, 432  
Théorème du seuil, 499  
Théorème fondamental de l'ana-  
lyse, 194  
Théorème spectral, 415  
Transformation d'ABEL, 121  
Transformée de FOURIER, 314  
Transformée de LAPLACE, 289

Unicité d'un polynôme, 220

Variation des constantes, 151  
Voisinage, 323

Wronskien, 146