

Centrale M1 2019

Calculatrices autorisées

Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Dans tout le problème, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans \mathbb{K} .

On note $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base \mathcal{B} de E , de l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$.

La matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée M^T .

On dit qu'un sous-ensemble \mathcal{A} de $\mathcal{L}(E)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$ si \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à \mathcal{A} quels que soient les éléments u et v de \mathcal{A} . (Remarquer qu'on ne demande pas que Id_E appartienne à \mathcal{A}).

On dit qu'une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{L}(E)$ est *commutative* si pour tous u et v dans \mathcal{A} , $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{L}(E)$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout u de \mathcal{A} .

On dit qu'une partie \mathcal{A} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de \mathcal{A} , $AB = BA$. Une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de \mathcal{A} , $P^{-1}MP$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si \mathcal{B} est une base de E , l'application $Mat_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(E)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est *strict* si F est différent de E .

On désigne par $S_n(\mathbb{K})$ (respectivement $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $T_n(\mathbb{K})$ (respectivement $T_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

I. Exemples de sous-algèbres

I.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Les sous-ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Les sous-ensembles $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?
3. On suppose $n \geq 3$. Les sous-ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

I.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et \mathcal{A}_F l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F , c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) | u(F) \subset F\}$.

4. Montrer que \mathcal{A}_F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
5. Montrer que $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2$.
On pourra considérer une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de \mathcal{A}_F est triangulaire par blocs.
6. Déterminer $\max_{1 \leq p \leq n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

I.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

7. Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
8. Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
9. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur \mathbb{C} . En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geq 2$.

Pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i, j) de $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geq j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n .

II.A - Calcul des puissances de J

10. Préciser les matrices J et J^2 . (on pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n \geq 2$).
11. Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leq k \leq n-1$.
12. Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ et les J^k , où $0 \leq k \leq n-1$?

II.B - Une base de \mathcal{A}

13. Montrer que $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est une base de \mathcal{A} .
14. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de \mathcal{A} .
15. Montrer que \mathcal{A} est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.C - Diagonalisation de J

16. Déterminer le polynôme caractéristique de J .
17. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
18. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
19. Déterminer les valeurs propres complexes de J et les espaces propres associés.

II.D - Diagonalisation de \mathcal{A}

20. Le sous-ensemble \mathcal{A} est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
21. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

22. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$?

III. Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égale à $n^2 - n + 1$.

Dans toute cette partie, \mathcal{A} est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ strictement incluse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note d sa dimension. On a donc $d < n^2$.

III.A - Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

La trace de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $\text{tr}(M)$.

23. Montrer que l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On désigne A^\perp l'orthogonal de \mathcal{A} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note r sa dimension.

24. Quelle relation a-t-on entre d et r ?

Jusqu'à la fin de cette partie III, on fixe une base (A_1, \dots, A_r) de \mathcal{A}^\perp .

25. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à \mathcal{A} si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\langle A_i, M \rangle = 0$.
26. Montrer que pour toute matrice $N \in \mathcal{A}$ et tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a $N^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$.

III.B - Conclusion

Soit $\mathcal{A}^T = \{M^T \mid M \in \mathcal{A}\}$.

27. Montrer que \mathcal{A}^T est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que \mathcal{A} .

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. On rappelle qu'à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est associé canoniquement l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X \mapsto MX$.

28. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $F = \text{Vect}(A_1X, \dots, A_rX)$. Montrer que F est stable par les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés aux éléments de \mathcal{A}^T .
29. Montrer que $d \leq n^2 - n + 1$ et conclure.

IV. Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie V.

Théorème de Burnside

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de \mathcal{A} sont $\{0\}$ et E , alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si tous les éléments de \mathcal{A} sont nilpotents, alors \mathcal{A} est trigonalisable.

30. Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geq 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leq n - 1$.

31. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de \mathcal{A} .

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

32. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$

où $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(u)$.

33. Montrer que $\{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\{D(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

34. Montrer que \mathcal{A} est trigonalisable.

35. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des éléments de \mathcal{A} appartiennent à $T_n^+(\mathbb{C})$.

V. Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie IV.

On fixe un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$.

On dira qu'une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{L}(E)$ est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de \mathcal{A} sont $\{0\}$ et E .

Soit \mathcal{A} une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

V.A - Recherche d'un élément de rang 1

36. Soient x et y deux éléments de E , x étant non nul. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

On pourra considérer dans E le sous-espace vectoriel $\{u(x) \mid u \in \mathcal{A}\}$.

37. Soit $v \in \mathcal{A}$ de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$0 < \text{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \text{rg}(v).$$

Considérer x et y dans E tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre, justifier l'existence de $u \in \mathcal{A}$ tel que $u \circ v(x) = y$ et considérer l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\text{Im}(v)$.

38. En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans \mathcal{A} .

V.B - Conclusion

Soit $u_0 \in \mathcal{A}$ de rang 1. On peut donc choisir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ soit une base de $\ker u_0$.

39. Montrer qu'il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

40. Conclure

I. Exemples de sous-algèbres

I.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par produit, donc ce sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
Cependant, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$, mais $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{K})$, donc $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit, donc $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in A_2(\mathbb{K})$ et $C^2 = -I_2 \notin A_2(\mathbb{K})$, donc $A_2(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit, donc $A_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
3. En prenant $A_n = \begin{pmatrix} A & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$, $B_n = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$ et $C_n = \begin{pmatrix} C & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{K})$, on a
 $A_n B_n = \begin{pmatrix} AB & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \notin S_n(\mathbb{K})$ et $C_n^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \notin A_n(\mathbb{K})$, donc $A_n(\mathbb{K})$ et $S_n(\mathbb{K})$ ne sont pas stables par produit, donc $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ ne sont pas des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

4. • $\mathcal{A}_F \subset \mathcal{L}(E)$ par définition de \mathcal{A}_F .
- l'application nulle $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{A}_F$ car $0_{\mathcal{L}(E)}(F) = \{0_E\} \subset F$, donc $\mathcal{A}_F \neq \emptyset$.
- Pour tout $(u, v) \in (\mathcal{A}_F)^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in F$,

$$(\lambda u + v)(x) = \lambda \underbrace{u(x)}_{\in F \text{ car } u \in \mathcal{A}_F} + \underbrace{v(x)}_{\in F \text{ car } v \in \mathcal{A}_F} \in F \text{ car } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E,$$

donc $(\lambda u + v)(F) \subset F$, donc $\lambda u + v \in \mathcal{A}_F$.

• \mathcal{A}_F est donc un sous-espace vectoriel de E .

• De plus, pour tout $(u, v) \in (\mathcal{A}_F)^2$, $u \circ v(F) = u(v(F)) \subset u(F) \subset F$, donc $u \circ v \in \mathcal{A}_F$, donc \mathcal{A}_F est stable par composition.

• \mathcal{A}_F est donc bien une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

5. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E .

Alors $u \in \mathcal{A}_F \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Comme $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on a

$$\dim \mathcal{A}_F = \dim \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\} = p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = n^2 - pn + p^2.$$

6. Pour tout $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $n^2 - np + p^2 = \left(p - \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2$, donc $(n^2 - np + p^2)$ est maximum quand $\left(p - \frac{1}{2}n\right)^2$ est maximum, donc pour $p=1$ ou $p=n-1$, et ce maximum vaut $\left(1 - \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 = n^2 - n + 1$.

I.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

7. • $\Gamma(\mathbb{K}) = \text{Vect} \left(I_2, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } C} \right)$, donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
- De plus, comme $C^2 = -I_2$, on a, pour tout $(aI_2 + bC, cI_2 + dC) \in \Gamma(\mathbb{K})^2$,

$$(aI_2 + bC)(cI_2 + dC) = \underbrace{(ac - bd)}_{\in \mathbb{K}} I_2 + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{K}} C \in \Gamma(\mathbb{K}),$$

donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit.

• $\Gamma(\mathbb{K})$ est donc bien une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

8. On a $\chi_C(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur \mathbb{R} , donc C n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9. • Comme $\chi_C(X) = X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ est scindé à racines simples sur \mathbb{C} , C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $D = \text{diag}(i, -i)$ diagonale telles que $C = PDP^{-1}$.
• Alors, pour tout $aI_2 + bC \in \Gamma(\mathbb{K})$,

$$P^{-1}(aI_2 + bC)P = aPI_2P^{-1} + bP^{-1}CP = aI_2 + b\text{diag}(i, -i) = \text{diag}(a + bi, a - bi),$$

donc $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II.A - Calcul des puissances de J

10. • On a $J = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\varphi) = J(0, 1, 0, 0, \dots, 0)$.
• $J^2 = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\varphi^2)$.

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, $\varphi^2(e_i) = \varphi(e_{i+1}) = e_{i+2}$, $\varphi^2(e_{n-1}) = \varphi(e_n) = e_1$ et $\varphi^2(e_n) = \varphi(e_1) = e_2$, donc

$$J_2 = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\varphi^2(e_1), \dots, \varphi^2(e_n)) = \begin{cases} I_2 & \text{si } n = 2 \\ J(0, 0, 1, 0, \dots, 0) & \text{si } n \geq 3 \end{cases}.$$

11. Soit $n \geq 3$.

On vérifie par le calcul que $J \times J(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = J(a_{n-1}, a_0, \dots, a_{n-2})$, puis, par récurrence immédiate, on obtient : $J^k = J(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ($a_k = 1$ et $a_i = 0$ pour tout $i \neq k$) et $J^n = I_n$.

12. On a $J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{position } k}, 0, \dots, 0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$.

II.B - Une base de \mathcal{A}

13. • La famille $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est composée d'éléments de \mathcal{A} d'après la question 11.
• D'après la question 12, $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est génératrice de \mathcal{A} .
• De plus, pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, toujours d'après la question 13, on a :

$$a_0 I_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k J^k = 0_n \Leftrightarrow J(a_0, \dots, a_{n-1}) = 0_n \Leftrightarrow a_0 = \dots = a_{n-1} = 0,$$

donc la famille $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est libre.

• $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est donc bien une base de \mathcal{A} , qui est donc de dimension n .

14. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Si M commute avec J , alors, par récurrence immédiate, M commute avec J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par suite, pour tout $N = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$,

$$MN = M \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k M J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k M = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) M = NM,$$

donc M commute avec tous les éléments de \mathcal{A} .

• Réciproquement, si M commute avec tous les éléments de \mathcal{A} , M commute avec J car $J \in \mathcal{A}$.
• par double-implication, on a donc bien l'équivalence souhaitée.

15. • $\mathcal{A} = \text{Vect}(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, pour tout $N = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} J^i N &= J^i \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^{k+i} = \sum_{k=0}^{n-1-i} a_k J^{k+i} + \sum_{k=n-i}^{n-1} a_k J^{k+i} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1-i} a_k J^{k+i} + \sum_{k=n-i}^{n-1} a_k \underbrace{J^n}_{=I_n} J^{k+i-n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1-i} a_k \underbrace{J^{k+i}}_{\epsilon \mathcal{A} \text{ car } k+i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} + \sum_{k=n-i}^{n-1} a_k \underbrace{J^{k+1-n}}_{\epsilon \mathcal{A} \text{ car } k+i-n \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \in \mathcal{A} \text{ comme combinaison linéaire d'éléments de } \mathcal{A}. \end{aligned}$$

\mathcal{A} est donc stable par produit, donc \mathcal{A} est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Pour tout $N = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$,

$$JN = J \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k J = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) J = NJ,$$

donc N commute avec J , donc, d'après la question précédente, N commute avec tous les éléments de \mathcal{A} . \mathcal{A} est donc bien une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II.C - Diagonalisation de J

16. On a

$$\begin{aligned}\chi_J(X) &= \det(XI_n - J) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= X \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & X & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{[n-1]} \\ &\quad (\text{dvlpt par rapport à la dernière colonne}) \\ &= X \times X^{n-1} + (-1)^{n+2} \times (-1)^{n-1} \quad (\text{déterminant de matrices triangulaires}) \\ &= X^n + (-1)^{2n+1} = X^n - 1.\end{aligned}$$

17. Par suite, χ_J est scindé à racines simples dans \mathbb{C} (ses racines sont les racines n -ème de l'unité), donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

18. Pour $n = 2$, $\chi_J = (X - 1)(X + 1)$ est scindé à racines simples dans \mathbb{R} , donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si $n \geq 3$, χ_J n'est pas scindé sur \mathbb{R} , donc J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

19. D'après la question 17, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{e^{2ik\pi/n}, k \in [[0, n-1]]\} = \{\omega^k, k \in [[0, n-1]]\}$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Pour tout $k \in [[0, n-1]]$,

$$J \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{nk} \\ \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \omega^k \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre ω^k .

Par suite, $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset E_{\omega^k}(J)$, et, comme ω^k est une valeur propre simple, on a $\dim E_{\omega^k}(J) = 1 = \dim \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

donc, comme on a une inclusion et l'égalité des dimensions, on a :

$$E_{\omega^k}(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

II.D - Diagonalisation de \mathcal{A}

20. La preuve faite en question 15 avec \mathbb{K} au lieu de \mathbb{R} permet de conclure directement ici que \mathcal{A} est une sous-algèbre (commutative) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

21. Comme J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale telles que $P^{-1}JP = D$.

On peut même particulariser P et D à l'aide de la question 19, mais une telle précision ne servira à rien dans la suite de cette preuve.

Alors, par récurrence immédiate, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{-1}J^kP = D^k$. Puis, pour tout $M = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$,

$$P^{-1}MP = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P^{-1}J^k P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k,$$

qui est diagonale comme combinaison linéaire de matrices diagonales.

\mathcal{A} est donc une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

22. En choisissant bien la matrice P dans la question précédente, on a $D = \text{diag}((\omega^i)_{i=0..n-1})$, donc

$$\begin{aligned} P^{-1}J(a_0, \dots, a_{n-1})P &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \text{diag}((\omega^{ki})_{i=0..n-1}) \\ &= \text{diag}\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{ki}\right)_{i=0..n-1}\right), \end{aligned}$$

$$\text{donc } \text{Sp}_{\mathbb{C}}(J(a_0, \dots, a_{n-1})) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{ki}, \quad i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

III. Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

III.A - Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

23. • Pour tout $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^T N) = \text{tr}((M^T N)^T) = \text{tr}(N^T M) = \langle N, M \rangle$, donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
• Pour tout $(M, N, P) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda M + N, P \rangle &= \text{tr}((\lambda M + N)^T P) = \text{tr}(\lambda M^T P + N^T P) \quad (\text{linéarité de la transposition}) \\ &= \lambda \text{tr}(M^T P) + \text{tr}(N^T P) \quad (\text{linéarité de la trace}) \\ &= \lambda \langle M, P \rangle + \langle N, P \rangle, \end{aligned}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique et linéaire à gauche, donc bilinéaire.
• Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(M^T M)_{i,i} = \sum_{k=1}^n (M^T)_{i,k} (M)_{k,i} = \sum_{k=1}^n m_{k,i}^2,$$

donc

$$\langle M, M \rangle = \text{tr}(M^T M) = \sum_{i=1}^n (M^T M)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{k,i}^2 = \sum_{1 \leq i, k \leq n} m_{i,k}^2.$$

Par suite, il est clair que $\langle M, M \rangle \geq 0$ (comme somme de positifs) et on a

$$\langle M, M \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{1 \leq i, k \leq n} m_{i,k}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,k} = 0 \Leftrightarrow M = 0_n.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc bien défini positif.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit donc bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

24. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien, donc $\dim \mathcal{A} + \dim \mathcal{A}^\perp = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ie $d + r = n^2$.

25. Comme $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\perp)^\perp$.

- Soit $M \in \mathcal{A}$. Alors, pour tout $N \in \mathcal{A}^\perp$, $\langle M, N \rangle = 0$.

En particulier, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, comme $A_i \in \mathcal{A}^\perp$, on a $\langle A_i, M \rangle = 0$.

- Réciproquement, supposons que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\langle A_i, M \rangle = 0$. Comme (A_1, \dots, A_r) est une base de \mathcal{A}^\perp , pour tout $N \in \mathcal{A}^\perp$, il existe $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $N = \sum_{i=1}^r a_i A_i$.

Alors, par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\langle N, M \rangle = \sum_{i=1}^r a_i \underbrace{\langle A_i, M \rangle}_{=0} = 0,$$

donc $M \in (\mathcal{A}^\perp)^\perp = \mathcal{A}$.

- On a donc bien, par double-implication, l'équivalence souhaitée.

26. Soit $N \in \mathcal{A}$ et $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Pour tout $M \in \mathcal{A}$,

$$\langle M, N^T A_i \rangle = \text{tr}(M^T N^T A_i) = \text{tr}((NM)^T A_i) = \langle NM, A_i \rangle = 0$$

d'après la question précédente avec $NM \in \mathcal{A}$ car \mathcal{A} est stable par produit.

On a donc bien $N^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$.

III.B - Conclusion

27. • L'application transposition $Trans : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (et $Trans^{-1} = Trans$), donc $\mathcal{A}^T = Trans(\mathcal{A})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que \mathcal{A} comme image d'un sous-espace vectoriel par un isomorphisme.
- Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{A}^T)^2$, il existe $(M, N) \in \mathcal{A}^2$ tel que $A = M^T$ et $B = N^T$. Alors $AB = M^T N^T = (NM)^T \in \mathcal{A}^T$ car \mathcal{A} est stable par produit, donc $NM \in \mathcal{A}$. \mathcal{A}^T est donc stable par produit, donc c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
28. Pour tout $M^T \in \mathcal{A}^\perp$, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $M^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$ d'après la question 26, donc, comme (A_1, \dots, A_r) est une base de \mathcal{A}^\perp , il existe $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $M^T A_i = \sum_{k=1}^r a_k A_k$ et, par suite,
- $$M^T A_i X = \sum_{k=1}^r a_k A_k X \in \text{Vect}(A_1 X, \dots, A_r X).$$
- Par suite, $M^T(F) = \text{Vect}(M^T A_1 X, \dots, M^T A_r X) \subset F$ comme espace vectoriel engendré par des éléments de F , donc F est stable par M^T . cqfd.
29. • Si $d > n^2 - n + 1$, alors $r = n^2 - d < n - 1$. Soit $X \notin \text{Ker } A_1$ (possible car $A_1 \neq 0$ car la famille (A_1, \dots, A_r) est libre). Soit $F = \text{Vect}(A_1 X, \dots, A_r X)$. On a :
- $\dim F \leq r < n$, donc $F \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
 - $\dim F \geq 1$, car $A_1 X \neq 0$, donc $F \neq \{0\}$.
- De plus, en identifiant les matrices et leur application linéaire canoniquement associée, on a

$$\mathcal{A}^T \subset \mathcal{A}_F, \quad \text{où cette notation a été introduite dans la partie I.B.}$$

On a donc

$$\begin{aligned} d &= \dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}^T \quad (\text{d'après la question 27}) \\ &\leq \dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2 \quad (\text{d'après la question 5}) \\ &\leq \max_{1 \leq p \leq n-1} n^2 - pn + p^2 = n^2 - n + 1, \quad \text{ce qui est contraire à l'hypothèse sur } d. \end{aligned}$$

D'où, par l'absurde, $d \leq n^2 - n + 1$.

- Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. En posant $F = \text{Vect}(X)$ de dimension 1, $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) : u(F) \subset F\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n^2 - n + 1$ d'après la question 5.
- Soit \mathcal{B} une base de E . Alors, d'après les remarques préliminaires, $\{Mat_{\mathcal{B}}(u), u \in \mathcal{A}_F\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension, donc de dimension $n^2 - n + 1$.
- Le majorant $n^2 - n + 1$ de la dimension d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donc atteint, donc $n^2 - n + 1$ est la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV. Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

30. Si E est de dimension 1, alors $\mathcal{L}(E)$ est de dimension $1^2 = 1$, donc $\mathcal{A} = \{0\}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$. Comme Id_E n'est pas nilpotente, $\mathcal{A} \neq \mathcal{L}(E)$, donc $\mathcal{A} = \{0\}$, et \mathcal{A} est bien trigonalisable. *On peut aussi remarquer que la matrice de n'importe quel endomorphisme de E est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, donc automatiquement triangulaire.*
31. Comme Id_E n'est pas nilpotente, $\text{Id}_E \notin \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A} \neq \mathcal{L}(E)$. La contraposée du théorème de Burnside assure alors l'existence d'un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de \mathcal{A} .
32. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ une base de V complétée en une base (e_1, \dots, e_n) de E . Alors, pour tout $u \in \mathcal{A}$, pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u(e_j) \in F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, donc il existe $(a_{i,j})_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ tel que $u(e_j) = \sum_{i=1}^r a_{i,j} e_i$. Alors on a
- $$Mat_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_r), u(e_{r+1}), \dots, u(e_n)) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix},$$
- où $A(u) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq r} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.
33. • Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$. Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $B_p \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix}$ (HR_p)
- Initialisation :** Pour $p = 0$, $M^0 = I_p = \begin{pmatrix} A^0 & B_0 \\ 0 & D^0 \end{pmatrix}$ en posant $B_0 = 0_{r,s}$.
- Pour $p = 1$, $B_1 = B$ convient.

Héritéité : Soit $p \in \mathbb{N}$ et supposons HR_p vérifiée.

Alors

$$M^{p+1} = M^p M \underset{HR_p}{=} \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{p+1} & A^p B + B_p D \\ 0 & D^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{p+1} & B_{p+1} \\ 0 & D^{p+1} \end{pmatrix}$$

en posant $B_{p+1} = A^p B + B_p D$. On a bien HR_{p+1} .

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $B_p \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix}$.

- Soit $A \in \{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$. Alors il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Alors, d'après le premier point, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$Mat_{\mathcal{B}}(u^p) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix}.$$

Or $u \in \mathcal{A}$, donc u est nilpotent, donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u^{p_0} = 0$ et, par suite, $0 = \begin{pmatrix} A^{p_0} & B_{p_0} \\ 0 & D^{p_0} \end{pmatrix}$, donc $A^{p_0} = 0$, donc A est nilpotente.

- Pour tout $(u, v) \in \mathcal{A}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$Mat_{\mathcal{B}}(\lambda u + v) = \lambda Mat_{\mathcal{B}}(u) + Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda A(u) + A(v) & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

donc $A(\lambda u + v) = \lambda A(u) + A(v)$.

$\varphi : u \in \mathcal{A} \mapsto A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ est donc une application linéaire, donc $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\} = \text{Im } \varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$.

- Pour tout $(A, B) \in (\{A(u) | u \in \mathcal{A}\})^2$, il existe u et $v \in \mathcal{A}$ tels que $A = A(u)$ et $B = A(v)$, c'est-à-dire $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ et $Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Alors $u \circ v \in \mathcal{A}$ car \mathcal{A} est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et

$$Mat_{\mathcal{B}}(u \circ v) = Mat_{\mathcal{B}}(u) \times Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} AB & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

donc $AB = A(u \circ v) \in \{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$.

$\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est donc stable par produit.

- $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est donc bien une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

- On montre de même que $\{D(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

34. • $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ dont tous les éléments sont nilpotents, donc, comme $r \leq n - 1$, $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est trigonalisable (version matricielle de l'hypothèse de récurrence), ie il existe $P \in GL_r(\mathbb{C})$ telle que pour tout $A \in \{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$, $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

- De même, il existe $Q \in GL_s(\mathbb{C})$ telle que pour tout $D \in \{D(u) | u \in \mathcal{A}\}$, $P^{-1}DP$ soit triangulaire supérieure.

- Posons alors $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Comme $\det(R) = \det(P)\det(Q) \neq 0$, R est inversible.

En voyant R comme une matrice de changement de base, et en posant donc \mathcal{C} base de E telle que $R = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, on a, pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{C}}(u) &= R^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(u) R = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(u)P & B(u)Q \\ 0 & D(u)Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1}A(u)P & P^{-1}B(u)Q \\ 0 & Q^{-1}D(u)Q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et cette dernière matrice est triangulaire supérieure car $P^{-1}A(u)P$ et $Q^{-1}D(u)Q$ le sont. *On peut alors conclure la propriété annoncée par récurrence...*

35. Dans cette base \mathcal{C} , les valeurs propres de u sont les éléments diagonaux de la matrice associée.

Or, comme il existe p tel que $u^p = 0$, si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ , alors

$$u^p(x) = u^{p-1}(u(x)) = u^{p-1}(\lambda x) = \lambda u^{p-1}(x) = \dots = \lambda^p x,$$

donc, comme $u^p = 0$, on a $\lambda^p x = 0$, donc, comme $x \neq 0$, on a $\lambda^p = 0$, donc $\lambda = 0$.

Par suite, les éléments diagonaux de la matrice associée à u dans la base \mathcal{C} sont nuls, donc cette matrice triangulaire est dans $T_n^+(\mathbb{C})$.

V. Le théorème de Burnside

V.A - Recherche d'un élément de rang 1

Comme \mathcal{A} est irréductible, $\mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$, car tous les sous-espaces vectoriels de E seraient alors stable par tous les éléments de \mathcal{A} .

36. • Soient x un élément non nul de E .

$F = \{u(x) | u \in \mathcal{A}\}$ est un sous-espace vectoriel car \mathcal{A} en est un. De plus, pour tout $y \in F$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(x)$. Alors, pour tout $v \in \mathcal{A}$, $v(y) = \underbrace{v \circ u}_{\in \mathcal{A}}(x) \in \{f(x) | f \in \mathcal{A}\} = F$. F est donc stable par tous les éléments de \mathcal{A} , donc $F = \{0\}$

ou $F = E$.

- Si $F = \{0\}$, alors, pour tout $u \in \mathcal{A}$, $u(x) = 0$, donc $\text{Vect}(x)$ est stable par tous les éléments de \mathcal{A} , ce qui est exclu car \mathcal{A} est une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$ et car $\text{Vect}(x) \neq \{0\}$ (car $x \neq 0$).
- On a donc $F = E$, et, par suite, pour tout $y \in E$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

37. • Soit x et y dans E tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre (x et y existent car $\text{rg}(v) \geq 2$). D'après la question précédente, comme $v(x) \neq 0$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(v(x)) = u \circ v(x)$.

- Considérons alors $\varphi : z \in \text{Im}(v) \mapsto v \circ u(z) \in \text{Im}(v)$.

φ est un endomorphisme de $\text{Im}(v)$, \mathbb{C} espace vectoriel de dimension au moins 1, donc φ admet au moins une valeur propre λ . (car son polynôme caractéristique, de degré au moins 1, admet au moins une racine sur \mathbb{C}). Par suite, $\varphi - \lambda \text{Id}_{\text{Im}(v)}$ n'est pas injective, donc non surjective (endomorphisme en dimension finie), donc $\text{rg}(\varphi) \leq \dim(\text{Im}(v)) - 1 = \text{rg}(v) - 1$.

- Soit alors $\psi = v \circ u \circ v - \lambda v \in \mathcal{L}(E)$.

Comme $\psi = \varphi \circ v$, $\text{rg}(\psi) \leq \min(\text{rg}(\varphi), \text{rg}(v)) \leq \text{rg}(v) - 1$ et, comme $\psi(x) = v \circ u \circ v(x) - \lambda v(x) = v((u \circ v)(x)) - \lambda v(x) = v(y) - \lambda v(x) \neq 0$ (car $(v(x), v(y))$ est une famille libre), donc $\text{rg}(\psi) \geq 1$.

On a donc bien $0 < \text{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \text{rg}(v)$.

38. Supposons qu'il n'existe pas d'élément de \mathcal{A} de rang 1.

Posons alors $r = \min\{\text{rg}(u), u \in \mathcal{A} \setminus \{0_{\mathcal{L}(E)}\}\}$, qui existe comme minimum d'un ensemble fini non vide (car $\mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$). Soit alors $v \in E$ tel que $\text{rg}(v) = r$. Alors, en prenant u comme dans la question précédente, $v \circ u \circ v \in \mathcal{A}$ comme composé d'éléments de \mathcal{A} , et $v \circ u \circ v - \lambda v \in \mathcal{A}$ car \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Or $0 < \text{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \text{rg}(v) = r$, ce qui est exclu.

D'où, par l'absurde, il existe $v \in \mathcal{A}$ tel que $\text{rg}(v) = 1$.

V.B - Conclusion

39. Comme u_0 est de rang 1, et $u_0(\varepsilon_k) = 0$ pour tout $k \in [[2, n]]$, on a $u_0(\varepsilon_1) \neq 0$.

D'où, d'après la question 36, pour tout $i \in [[2, n]]$, il existe $v_i \in \mathcal{A}$ tel que $v_i(u_0(\varepsilon_1)) = \varepsilon_i$. Alors $u_i = v_i \circ u \in \mathcal{A}$ car \mathcal{A} est stable par composition et

$$u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i \quad \text{et} \quad \forall k \in [[2, n]], u_i(\varepsilon_k) = v_i(u_0(\varepsilon_k)) = v_i(0) = 0,$$

donc $\dim \text{Im}(u_i) = \dim \text{Vect}(u_i(\varepsilon_k)_{k \in [[1, n]]}) = \dim \text{Vect}(u_i(\varepsilon_1)) = 1$, donc u_i est de rang 1 et $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$.

40. On construit maintenant des endomorphismes $u_{i,j}$ dans \mathcal{A} dont les matrices dans \mathcal{B} sont les $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On a déjà construit $u_{i,1} = u_i$ dans la question précédente.

– Notons (V_1, \dots, V_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et

$$G = \{x \in E : \forall u \in \mathcal{A}, V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0\}.$$

– G est un sous-espace vectoriel de E .

De plus, si $x \in G$, alors, pour tout $v \in \mathcal{A}$, $v(x) \in G$ car pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v(x)) = V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = V_1^T \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v)}_{\text{car } x \in G} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0.$$

Par suite, comme \mathcal{A} est supposée irréductible, on a $G = \{0\}$ ou $G = E$.

Supposons $G = E$. Soit alors $\varphi : x \in E \mapsto V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathbb{C}$. φ est une forme linéaire non nulle de $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, donc $K = \text{Ker } \varphi = \{x \in E : V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

De plus, pour tout $x \in K$, pour tout $u \in \mathcal{A}$, $u(x) \in K$ car

$$V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(x)) = V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0$$

car $x \in E = G$.

K est donc un sous-espace vectoriel non trivial de E stable par \mathcal{A} , ce qui est contraire au caractère irréductible de \mathcal{A} .

On a donc $G = \{0\}$.

- Soit à présent $H = \{(Mat_{\mathcal{B}}(u))^T V_1, u \in \mathcal{A}\}$.

H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Si $H \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors on note $p = \dim H < n$ et $H = \text{Vect}(W_1, \dots, W_p)$.

On choisit $X \neq 0$ dans l'intersection d'hyperplans

$$\text{Ker}(W_1^T) \cap \text{Ker}(W_2^T) \cap \dots \cap \text{Ker}(W_p^T)$$

qui est de dimension $\geq n - p > 0$.

Alors, en prenant $x \in E$ tel que $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = X$, on a $x \in G$ et $x \neq 0$, ce qui est exclu.

D'où, par l'absurde, $H = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

- Comme $H = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $w_j \in \mathcal{A}$ tel que $(Mat_{\mathcal{B}}(w_j))^T V_1 = V_j$.

On a alors $E_{i,j} = V_i V_j^T = V_i V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(w_j) = E_{i,1} Mat_{\mathcal{B}}(w_j) = Mat_{\mathcal{B}}(u_{i,1} w_j)$, où $u_{i,1} w_j \in \mathcal{A}$ car \mathcal{A} est stable par composition.

- Posons alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $u_{i,j} = u_{i,1} w_j$.

$(u_{i,j})_{(i,j) \in [\![1, n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ car $(Mat_{\mathcal{B}}(u_{i,j}))_{(i,j) \in [\![1, n]\!]^2} = (E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1, n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Par suite, $\mathcal{L}(E) = \text{Vect}((u_{i,j})_{(i,j) \in [\![1, n]\!]^2}) \subset \mathcal{A}$ comme espace vectoriel engendré par des éléments de \mathcal{A} .

L'inclusion réciproque étant évidente, on a bien l'égalité : $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.