

## Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Dans tout le problème,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ .

On note  $\mathcal{L}(E)$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des endomorphismes de  $E$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées à  $n$  lignes et  $n$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

On note  $Mat_{\mathcal{B}}(u)$  la matrice, dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , de l'endomorphisme  $u$  de  $\mathcal{L}(E)$ .

La matrice transposée de toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est notée  $M^T$ .

On dit qu'un sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(E)$  est une *sous-algèbre* de  $\mathcal{L}(E)$  si  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ , stable pour la composition, c'est-à-dire que  $u \circ v$  appartient à  $\mathcal{A}$  quels que soient les éléments  $u$  et  $v$  de  $\mathcal{A}$ . (Remarquer qu'on ne demande pas que  $\text{Id}_E$  appartienne à  $\mathcal{A}$ ).

On dit qu'une sous-algèbre  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(E)$  est *commutative* si pour tous  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{A}$ ,  $u \circ v = v \circ u$ .

Une sous-algèbre  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(E)$  est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $Mat_{\mathcal{B}}(u)$  soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout  $u$  de  $\mathcal{A}$ .

On dit qu'une partie  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une *sous-algèbre* de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  si  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{A}$ ,  $AB = BA$ . Une sous-algèbre  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{A}$ ,  $P^{-1}MP$  soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , l'application  $Mat_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de  $\mathcal{L}(E)$  sur une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est *strict* si  $F$  est différent de  $E$ .

On désigne par  $S_n(\mathbb{K})$  (respectivement  $A_n(\mathbb{K})$ ) l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (respectivement antisymétriques). On désigne par  $T_n(\mathbb{K})$  (respectivement  $T_n^+(\mathbb{K})$ ) le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

## I. Exemples de sous-algèbres

### I.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Les sous-ensembles  $T_n(\mathbb{K})$  et  $T_n^+(\mathbb{K})$  sont-ils des sous-algèbres de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ?
2. Les sous-ensembles  $S_2(\mathbb{K})$  et  $A_2(\mathbb{K})$  sont-ils des sous-algèbres de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  ?
3. On suppose  $n \geq 3$ . Les sous-ensembles  $S_n(\mathbb{K})$  et  $A_n(\mathbb{K})$  sont-ils des sous-algèbres de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ?

### I.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p$  et  $\mathcal{A}_F$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  qui stabilisent  $F$ , c'est-à-dire  $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) | u(F) \subset F\}$ .

4. Montrer que  $\mathcal{A}_F$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ .

5. Montrer que  $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2$ .

On pourra considérer une base de  $E$  dans laquelle la matrice de tout élément de  $\mathcal{A}_F$  est triangulaire par blocs.

6. Déterminer  $\max_{1 \leq p \leq n-1} (n^2 - pn + p^2)$ .

### I.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit  $\Gamma(\mathbb{K})$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  constitué des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  où  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ .

7. Montrer que  $\Gamma(\mathbb{K})$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

8. Montrer que  $\Gamma(\mathbb{R})$  n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

9. Montrer que  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . En déduire que  $\Gamma(\mathbb{C})$  est une sous-algèbre diagonalisable de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

## II. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose  $n \geq 2$ .

Pour tout  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $J(a_0, \dots, a_{n-1})$  est  $a_{i-j}$  si  $i \geq j$  et  $a_{i-j+n}$  si  $i < j$ .

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de la forme  $J(a_0, \dots, a_{n-1})$  où  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ .

Soit  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  défini par  $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$  si  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  et  $\varphi(e_n) = e_1$ , où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

### II.A - Calcul des puissances de $J$

10. Préciser les matrices  $J$  et  $J^2$ . (on pourra distinguer les cas  $n = 2$  et  $n \geq 3$ ).
11. Préciser les matrices  $J^n$  et  $J^k$  pour  $2 \leq k \leq n-1$ .
12. Quel est le lien entre la matrice  $J(a_0, \dots, a_{n-1})$  et les  $J^k$ , où  $0 \leq k \leq n-1$ ?

### II.B - Une base de $\mathcal{A}$

13. Montrer que  $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$  est une base de  $\mathcal{A}$ .
14. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $M$  commute avec  $J$  si et seulement si  $M$  commute avec tout élément de  $\mathcal{A}$ .
15. Montrer que  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### II.C - Diagonalisation de $J$

16. Déterminer le polynôme caractéristique de  $J$ .
17. Montrer que  $J$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
18. La matrice  $J$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?
19. Déterminer les valeurs propres complexes de  $J$  et les espaces propres associés.

### II.D - Diagonalisation de $\mathcal{A}$

20. Le sous-ensemble  $\mathcal{A}$  est-il une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ?
21. Montrer qu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que, pour toute matrice  $A \in \mathcal{A}$ , la matrice  $P^{-1}AP$  est diagonale.

Soit  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ . On note  $Q \in \mathbb{R}[X]$  le polynôme  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

22. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice  $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ ?

## III. Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est égale à  $n^2 - n + 1$ .

Dans toute cette partie,  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  strictement incluse dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et on note  $d$  sa dimension. On a donc  $d < n^2$ .

### III.A - Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

La trace de toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est notée  $\text{tr}(M)$ .

23. Montrer que l'application définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par  $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On désigne  $\mathcal{A}^\perp$  l'orthogonal de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et on note  $r$  sa dimension.

24. Quelle relation a-t-on entre  $d$  et  $r$ ?

Jusqu'à la fin de cette partie III, on fixe une base  $(A_1, \dots, A_r)$  de  $\mathcal{A}^\perp$ .

25. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $M$  appartient à  $\mathcal{A}$  si et seulement si, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $\langle A_i, M \rangle = 0$ .
26. Montrer que pour toute matrice  $N \in \mathcal{A}$  et tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a  $N^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$ .

### III.B - Conclusion

Soit  $\mathcal{A}^T = \{M^T | M \in \mathcal{A}\}$ .

27. Montrer que  $\mathcal{A}^T$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de même dimension que  $\mathcal{A}$ .

On note  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices colonnes à  $n$  lignes et à coefficients réels. On rappelle qu'à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est associé canoniquement l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  défini par  $X \mapsto MX$ .

28. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et soit  $F = \text{Vect}(A_1X, \dots, A_rX)$ . Montrer que  $F$  est stable par les endomorphismes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associés aux éléments de  $\mathcal{A}^T$ .

29. Montrer que  $d \leq n^2 - n + 1$  et conclure.

## IV. Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . Soit  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie V.

### Théorème de Burnside

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$ . Soit  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ . Si les seuls sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par tous les éléments de  $\mathcal{A}$  sont  $\{0\}$  et  $E$ , alors  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ .

On se propose de démontrer par récurrence forte sur  $n \in \mathbb{N}^*$  que si tous les éléments de  $\mathcal{A}$  sont nilpotents, alors  $\mathcal{A}$  est trigonalisable.

30. Montrer que le résultat est vrai si  $n = 1$ .

On suppose désormais que  $n \geq 2$  et que le résultat est vrai pour tout entier naturel  $d \leq n - 1$ .

31. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel  $V$  de  $E$  distinct de  $E$  et  $\{0\}$  stable par tous les éléments de  $\mathcal{A}$ .

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note  $r$  sa dimension. Soit aussi  $s = n - r$ .

32. Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que pour tout  $u \in \mathcal{A}$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$

où  $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ ,  $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$  et  $D(u) \in \mathcal{M}_s(u)$ .

33. Montrer que  $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$  constituée de matrices nilpotentes et que  $\{D(u) | u \in \mathcal{A}\}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$  constituée de matrices nilpotentes.

34. Montrer que  $\mathcal{A}$  est trigonalisable.

35. Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices des éléments de  $\mathcal{A}$  appartiennent à  $T_n^+(\mathbb{C})$ .

## V. Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie IV.

On fixe un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 2$ .

On dira qu'une sous-algèbre  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(E)$  est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de  $\mathcal{A}$  sont  $\{0\}$  et  $E$ .

Soit  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre irréductible de  $\mathcal{L}(E)$ . Il s'agit donc de montrer que  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ .

### V.A - Recherche d'un élément de rang 1

36. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$ ,  $x$  étant non nul. Montrer qu'il existe  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $u(x) = y$ .

*On pourra considérer dans  $E$  le sous-espace vectoriel  $\{u(x) | u \in \mathcal{A}\}$ .*

37. Soit  $v \in \mathcal{A}$  de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe  $u \in \mathcal{A}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que :

$$0 < \text{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \text{rg}(v).$$

*Considérer  $x$  et  $y$  dans  $E$  tels que la famille  $(v(x), v(y))$  soit libre, justifier l'existence de  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $u \circ v(x) = y$  et considérer l'endomorphisme induit par  $v \circ u$  sur  $\text{Im}(v)$ .*

38. En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans  $\mathcal{A}$ .

### V.B - Conclusion

Soit  $u_0 \in \mathcal{A}$  de rang 1. On peut donc choisir une base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $E$  telle que  $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  soit une base de  $\ker u_0$ .

39. Montrer qu'il existe  $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{A}$  de rang 1 tels que  $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

40. Conclure

## I. Exemples de sous-algèbres

### I.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1.  $T_n(\mathbb{K})$  et  $T_n^+(\mathbb{K})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  stables par produit, donc ce sont des sous-algèbres de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
2.  $S_2(\mathbb{K})$  et  $A_2(\mathbb{K})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .  
Cependant,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$ , mais  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{K})$ , donc  $S_2(\mathbb{K})$  n'est pas stable par produit, donc  $S_2(\mathbb{K})$  n'est pas une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .  
 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in A_2(\mathbb{K})$  et  $C^2 = -I_2 \notin A_2(\mathbb{K})$ , donc  $A_2(\mathbb{K})$  n'est pas stable par produit, donc  $A_2(\mathbb{K})$  n'est pas une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .
3. En prenant  $A_n = \begin{pmatrix} A & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$ ,  $B_n = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$  et  $C_n = \begin{pmatrix} C & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{K})$ , on a  
 $A_n B_n = \begin{pmatrix} AB & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \notin S_n(\mathbb{K})$  et  $C_n^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \notin A_n(\mathbb{K})$ , donc  $A_n(\mathbb{K})$  et  $S_n(\mathbb{K})$  ne sont pas stables par produit, donc  $S_n(\mathbb{K})$  et  $A_n(\mathbb{K})$  ne sont pas des sous-algèbres de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### I.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

4. •  $\mathcal{A}_F \subset \mathcal{L}(E)$  par définition de  $\mathcal{A}_F$ .  
• l'application nulle  $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{A}_F$  car  $0_{\mathcal{L}(E)}(F) = \{0_E\} \subset F$ , donc  $\mathcal{A}_F \neq \emptyset$ .  
• Pour tout  $(u, v) \in (\mathcal{A}_F)^2$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , pour tout  $x \in F$ ,

$$(\lambda u + v)(x) = \lambda \underbrace{u(x)}_{\in F \text{ car } u \in \mathcal{A}_F} + \underbrace{v(x)}_{\in F \text{ car } v \in \mathcal{A}_F} \in F \text{ car } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E,$$

donc  $(\lambda u + v)(F) \subset F$ , donc  $\lambda u + v \in \mathcal{A}_F$ .

- $\mathcal{A}_F$  est donc un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
• De plus, pour tout  $(u, v) \in (\mathcal{A}_F)^2$ ,  $u \circ v(F) = u(v(F)) \subset u(F) \subset F$ , donc  $u \circ v \in \mathcal{A}_F$ , donc  $\mathcal{A}_F$  est stable par composition.  
•  $\mathcal{A}_F$  est donc bien une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ .
5. Soit  $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$  complétée en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ .

Alors  $u \in \mathcal{A}_F \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est de la forme  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$  où  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ .

Comme  $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on a

$$\dim \mathcal{A}_F = \dim \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\} = p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = n^2 - pn + p^2.$$

6. Pour tout  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $n^2 - np + p^2 = \left(p - \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2$ , donc  $(n^2 - np + p^2)$  est maximum quand  $\left(p - \frac{1}{2}n\right)^2$  est maximum, donc pour  $p = 1$  ou  $p = n - 1$ , et ce maximum vaut  $\left(1 - \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 = n^2 - n + 1$ .

### I.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

7. •  $\Gamma(\mathbb{K}) = \text{Vect} \left( I_2, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } C} \right)$ , donc  $\Gamma(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

- De plus, comme  $C^2 = -I_2$ , on a, pour tout  $(aI_2 + bC, cI_2 + dC) \in \Gamma(\mathbb{K})^2$ ,

$$(aI_2 + bC)(cI_2 + dC) = \underbrace{(ac - bd)}_{\in \mathbb{K}} I_2 + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{K}} C \in \Gamma(\mathbb{K}),$$

donc  $\Gamma(\mathbb{K})$  est stable par produit.

- $\Gamma(\mathbb{K})$  est donc bien une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

8. On a  $\chi_C(X) = X^2 + 1$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ , donc  $C$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , donc  $\Gamma(\mathbb{R})$  n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

9. • Comme  $\chi_C(X) = X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$ ,  $C$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et il existe  $P \in GL_2(\mathbb{C})$  et  $D = \text{diag}(i, -i)$  diagonale telles que  $C = PDP^{-1}$ .  
 • Alors, pour tout  $aI_2 + bC \in \Gamma(\mathbb{K})$ ,

$$P^{-1}(aI_2 + bC)P = aPI_2P^{-1} + bP^{-1}CP = aI_2 + b\text{diag}(i, -i) = \text{diag}(a + bi, a - bi),$$

donc  $\Gamma(\mathbb{C})$  est une sous-algèbre diagonalisable de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

## II. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

### II.A - Calcul des puissances de $J$

10. • On a  $J = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\varphi) = J(0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ .  
 •  $J^2 = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\varphi^2)$ .  
 Or, pour tout  $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ ,  $\varphi^2(e_i) = \varphi(e_{i+1}) = e_{i+2}$ ,  $\varphi^2(e_{n-1}) = \varphi(e_n) = e_1$  et  $\varphi^2(e_n) = \varphi(e_1) = e_2$ , donc

$$J_2 = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\varphi^2(e_1), \dots, \varphi^2(e_n)) = \begin{cases} I_2 & \text{si } n = 2 \\ J(0, 0, 1, 0, \dots, 0) & \text{si } n \geq 3 \end{cases}.$$

11. Soit  $n \geq 3$ .

On vérifie par le calcul que  $J \times J(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = J(a_{n-1}, a_0, \dots, a_{n-2})$ , puis, par récurrence immédiate, on obtient :  $J^k = J(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  ( $a_k = 1$  et  $a_i = 0$  pour tout  $i \neq k$ ) et  $J^n = I_n$ .

12. On a  $J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{position } k}, 0, \dots, 0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$ .

### II.B - Une base de $\mathcal{A}$

13. • La famille  $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$  est composée d'éléments de  $\mathcal{A}$  d'après la question 11.  
 • D'après la question 12,  $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$  est génératrice de  $\mathcal{A}$ .  
 • De plus, pour tout  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ , toujours d'après la question 13, on a :

$$a_0 I_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k J^k = 0_n \Leftrightarrow J(a_0, \dots, a_{n-1}) = 0_n \Leftrightarrow a_0 = \dots = a_{n-1} = 0,$$

donc la famille  $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$  est libre.

•  $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$  est donc bien une base de  $\mathcal{A}$ , qui est donc de dimension  $n$ .

14. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

• Si  $M$  commute avec  $J$ , alors, par récurrence immédiate,  $M$  commute avec  $J^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Par suite, pour tout  $N = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$ ,

$$MN = M \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k M J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k M = \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) M = NM,$$

donc  $M$  commute avec tous les éléments de  $\mathcal{A}$ .

• Réciproquement, si  $M$  commute avec tous les éléments de  $\mathcal{A}$ ,  $M$  commute avec  $J$  car  $J \in \mathcal{A}$ .

• par double-implication, on a donc bien l'équivalence souhaitée.

15. •  $\mathcal{A} = \text{Vect}(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

• Pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , pour tout  $N = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$ ,

$$\begin{aligned} J^i N &= J^i \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^{k+i} = \sum_{k=0}^{n-1-i} a_k J^{k+i} + \sum_{k=n-i}^{n-1} a_k J^{k+i} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1-i} a_k J^{k+i} + \sum_{k=n-i}^{n-1} a_k \underbrace{J^n}_{=I_n} J^{k+i-n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1-i} a_k \underbrace{J^{k+i}}_{\in \mathcal{A} \text{ car } k+i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} + \sum_{k=n-i}^{n-1} a_k \underbrace{J^{k+i-n}}_{\in \mathcal{A} \text{ car } k+i-n \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \in \mathcal{A} \text{ comme combinaison linéaire d'éléments de } \mathcal{A}. \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$  est donc stable par produit, donc  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

• Pour tout  $N = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$ ,

$$JN = J \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k J = \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) J = NJ,$$

donc  $N$  commute avec  $J$ , donc, d'après la question précédente,  $N$  commute avec tous les éléments de  $\mathcal{A}$ .  
 $\mathcal{A}$  est donc bien une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

## II.C - Diagonalisation de $J$

16. On a

$$\begin{aligned}\chi_J(X) &= \det(XI_n - J) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= X \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & X & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{[n-1]} \\ &\quad \text{(dvlpt par rapport à la dernière colonne)} \\ &= X \times X^{n-1} + (-1)^{n+2} \times (-1)^{n-1} \quad \text{(déterminant de matrices triangulaires)} \\ &= X^n + (-1)^{2n+1} = X^n - 1.\end{aligned}$$

17. Par suite,  $\chi_J$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$  (ses racines sont les racines  $n$ -ème de l'unité), donc  $J$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
18. Pour  $n = 2$ ,  $\chi_J = (X - 1)(X + 1)$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{R}$ , donc  $J$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
Si  $n \geq 3$ ,  $\chi_J$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ , donc  $J$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
19. D'après la question 17,  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{e^{2ik\pi/n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\} = \{\omega^k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$  où  $\omega = e^{2i\pi/n}$ .  
Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,

$$J \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{nk} \\ \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \end{pmatrix} = \omega^k \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc  $\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $J$  associé à la valeur propre  $\omega^k$ .

Par suite,  $\text{Vect} \left( \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset E_{\omega^k}(J)$ , et, comme  $\omega^k$  est une valeur propre simple, on a  $\dim E_{\omega^k}(J) = 1 = \dim \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

donc, comme on a une inclusion et l'égalité des dimensions, on a :

$$E_{\omega^k}(J) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

## II.D - Diagonalisation de $\mathcal{A}$

20. La preuve faite en question 15 avec  $\mathbb{K}$  au lieu de  $\mathbb{R}$  permet de conclure directement ici que  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre (commutative) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
21. Comme  $J$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $D$  diagonale telles que  $P^{-1}JP = D$ .  
On peut même particulariser  $P$  et  $D$  à l'aide de la question 19, mais une telle précision ne servira à rien dans la suite de cette preuve.

Alors, par récurrence immédiate, on a, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P^{-1}J^kP = D^k$ . Puis, pour tout  $M = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$ ,

$$P^{-1}MP = P^{-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P^{-1} J^k P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k,$$

qui est diagonale come combinaison linéaire de matrices diagonales.

$\mathcal{A}$  est donc une sous-algèbre diagonalisable de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

22. En choisissant bien la matrice  $P$  dans la question précédente, on a  $D = \text{diag}((\omega^i)_{i=0..n-1})$ , donc

$$\begin{aligned} P^{-1}J(a_0, \dots, a_{n-1})P &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \text{diag}((\omega^{ki})_{i=0..n-1}) \\ &= \text{diag} \left( \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{ki} \right)_{i=0..n-1} \right), \end{aligned}$$

$$\text{donc } \text{Sp}_{\mathbb{C}}(J(a_0, \dots, a_{n-1})) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{ki}, \quad i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

### III. Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

#### III.A - Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

23. • Pour tout  $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ ,  $\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^T N) = \text{tr}((M^T N)^T) = \text{tr}(N^T M) = \langle N, M \rangle$ , donc  $\langle, \rangle$  est symétrique.  
 • Pour tout  $(M, N, P) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \lambda M + N, P \rangle &= \text{tr}((\lambda M + N)^T P) = \text{tr}(\lambda M^T P + N^T P) \quad (\text{linéarité de la transposition}) \\ &= \lambda \text{tr}(M^T P) + \text{tr}(N^T P) \quad (\text{linéarité de la trace}) \\ &= \lambda \langle M, P \rangle + \langle N, P \rangle, \end{aligned}$$

donc  $\langle, \rangle$  est linéaire à gauche.

- $\langle, \rangle$  est symétrique et linéaire à gauche, donc bilinéaire.
- Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$(M^T M)_{i,i} = \sum_{k=1}^n (M^T)_{i,k} (M)_{k,i} = \sum_{k=1}^n m_{k,i}^2,$$

donc

$$\langle M, M \rangle = \text{tr}(M^T M) = \sum_{i=1}^n (M^T M)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{k,i}^2 = \sum_{1 \leq i, k \leq n} m_{i,k}^2.$$

Par suite, il est clair que  $\langle M, M \rangle \geq 0$  (comme somme de positifs) et on a

$$\langle M, M \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{1 \leq i, k \leq n} m_{i,k}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,k} = 0 \Leftrightarrow M = 0_n.$$

$\langle, \rangle$  est donc bien défini positif.

- $\langle, \rangle$  définit donc bien un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

24. Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie,  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle, \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace euclidien, donc  $\dim \mathcal{A} + \dim \mathcal{A}^\perp = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , ie  $d + r = n^2$ .

25. Comme  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle, \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace euclidien,  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\perp)^\perp$ .

- Soit  $M \in \mathcal{A}$ . Alors, pour tout  $N \in \mathcal{A}^\perp$ ,  $\langle M, N \rangle = 0$ .

En particulier, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , comme  $A_i \in \mathcal{A}^\perp$ , on a  $\langle A_i, M \rangle = 0$ .

- Réciproquement, supposons que pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $\langle A_i, M \rangle = 0$ . Comme  $(A_1, \dots, A_r)$  est une base de  $\mathcal{A}^\perp$ , pour tout  $N \in \mathcal{A}^\perp$ , il existe  $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$  tel que  $N = \sum_{i=1}^r a_i A_i$ .

Alors, par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\langle N, M \rangle = \sum_{i=1}^r a_i \underbrace{\langle A_i, M \rangle}_{=0} = 0,$$

donc  $M \in (\mathcal{A}^\perp)^\perp = \mathcal{A}$ .

- On a donc bien, par double-implication, l'équivalence souhaitée.

26. Soit  $N \in \mathcal{A}$  et  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

Pour tout  $M \in \mathcal{A}$ ,

$$\langle M, N^T A_i \rangle = \text{tr}(M^T N^T A_i) = \text{tr}((NM)^T A_i) = \langle NM, A_i \rangle = 0$$

d'après la question précédente avec  $NM \in \mathcal{A}$  car  $\mathcal{A}$  est stable par produit.

On a donc bien  $N^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$ .

### III.B - Conclusion

27. • L'application transposition  $Trans : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (et  $Trans^{-1} = Trans$ ), donc  $\mathcal{A}^T = Trans(\mathcal{A})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de même dimension que  $\mathcal{A}$  comme image d'un sous-espace vectoriel par un isomorphisme.  
 • Pour tout  $(A, B) \in (\mathcal{A}^T)^2$ , il existe  $(M, N) \in \mathcal{A}^2$  tel que  $A = M^T$  et  $B = N^T$ .  
 Alors  $AB = M^T N^T = (NM)^T \in \mathcal{A}^T$  car  $\mathcal{A}$  est stable par produit, donc  $NM \in \mathcal{A}$ .  
 $\mathcal{A}^T$  est donc stable par produit, donc c'est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
28. Pour tout  $M^T \in \mathcal{A}^\perp$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $M^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$  d'après la question 26, donc, comme  $(A_1, \dots, A_r)$  est une base de  $\mathcal{A}^\perp$ , il existe  $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$  tel que  $M^T A_i = \sum_{k=1}^r a_k A_k$  et, par suite,

$$M^T A_i X = \sum_{k=1}^r a_k A_k X \in \text{Vect}(A_1 X, \dots, A_r X).$$

Par suite,  $M^T(F) = \text{Vect}(M^T A_1 X, \dots, M^T A_r X) \subset F$  comme espace vectoriel engendré par des éléments de  $F$ , donc  $F$  est stable par  $M^T$ . cqfd.

29. • Si  $d > n^2 - n + 1$ , alors  $r = n^2 - d < n - 1$ . Soit  $X \notin \text{Ker } A_1$  (possible car  $A_1 \neq 0$  car la famille  $(A_1, \dots, A_r)$  est libre).  
 Soit  $F = \text{Vect}(A_1 X, \dots, A_r X)$ . On a :  
 –  $\dim F \leq r < n$ , donc  $F \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$   
 –  $\dim F \geq 1$ , car  $A_1 X \neq 0$ , donc  $F \neq \{0\}$ .  
 De plus, en identifiant les matrices et leur application linéaire canoniquement associée, on a

$$\mathcal{A}^T \subset \mathcal{A}_F, \quad \text{où cette notation a été introduite dans la partie I.B.}$$

On a donc

$$\begin{aligned} d &= \dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}^T \quad (\text{d'après la question 27}) \\ &\leq \dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2 \quad (\text{d'après la question 5}) \\ &\leq \max_{1 \leq p \leq n-1} n^2 - pn + p^2 = n^2 - n + 1, \quad \text{ce qui est contraire à l'hypothèse sur } d. \end{aligned}$$

D'où, par l'absurde,  $d \leq n^2 - n + 1$ .

- Soit  $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nul. En posant  $F = \text{Vect}(X)$  de dimension 1,  $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) : u(F) \subset F\}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  de dimension  $n^2 - n + 1$  d'après la question 5.  
 Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Alors, d'après les remarques préliminaires,  $\{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u), u \in \mathcal{A}_F\}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de même dimension, donc de dimension  $n^2 - n + 1$ .  
 Le majorant  $n^2 - n + 1$  de la dimension d'une sous-algèbre stricte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est donc atteint, donc  $n^2 - n + 1$  est la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### IV. Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

30. Si  $E$  est de dimension 1, alors  $\mathcal{L}(E)$  est de dimension  $1^2 = 1$ , donc  $\mathcal{A} = \{0\}$  ou  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ .  
 Comme  $\text{Id}_E$  n'est pas nilpotente,  $\mathcal{A} \neq \mathcal{L}(E)$ , donc  $\mathcal{A} = \{0\}$ , et  $\mathcal{A}$  est bien trigonalisable.  
*On peut aussi remarquer que la matrice de n'importe quel endomorphisme de  $E$  est une matrice de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ , donc automatiquement triangulaire.*
31. Comme  $\text{Id}_E$  n'est pas nilpotente,  $\text{Id}_E \notin \mathcal{A}$ , donc  $\mathcal{A} \neq \mathcal{L}(E)$ . La contraposée du théorème de Burnside assure alors l'existence d'un sous-espace vectoriel  $V$  de  $E$  distinct de  $E$  et  $\{0\}$  stable par tous les éléments de  $\mathcal{A}$ .
32. Soit  $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$  une base de  $V$  complétée en une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ .  
 Alors, pour tout  $u \in \mathcal{A}$ , pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $u(e_j) \in F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ , donc il existe  $(a_{i,j})_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  tel que  $u(e_j) = \sum_{i=1}^r a_{i,j} e_i$ .  
 Alors on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_r), u(e_{r+1}), \dots, u(e_n)) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix},$$

où  $A(u) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ ,  $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$  et  $D(u) \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ .

33. • Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$  où  $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$  et  $D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ .

Montrons par récurrence que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe  $B_p \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$  telle que  $M^p = \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix} (HR_p)$

**Initialisation :** Pour  $p = 0$ ,  $M^0 = I_p = \begin{pmatrix} A^0 & B_0 \\ 0 & D^0 \end{pmatrix}$  en posant  $B_0 = 0_{r,s}$ .

Pour  $p = 1$ ,  $B_1 = B$  convient.



**Hérédité :** Soit  $p \in \mathbb{N}$  et supposons  $HR_p$  vérifiée.

Alors

$$M^{p+1} = M^p M \underset{HR_p}{=} \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{p+1} & A^p B + B_p D \\ 0 & D^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{p+1} & B_{p+1} \\ 0 & D^{p+1} \end{pmatrix}$$

en posant  $B_{p+1} = A^p B + B_p D$ . On a bien  $HR_{p+1}$ .

**Conclusion :** D'où, par récurrence, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe  $B_p \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$  telle que  $M^p = \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix}$ .

- Soit  $A \in \{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ . Alors il existe  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ .

Alors, d'après le premier point, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$Mat_{\mathcal{B}}(u^p) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix}.$$

Or  $u \in \mathcal{A}$ , donc  $u$  est nilpotent, donc il existe  $p_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u^{p_0} = 0$  et, par suite,  $0 = \begin{pmatrix} A^{p_0} & B_{p_0} \\ 0 & D^{p_0} \end{pmatrix}$ , donc  $A^{p_0} = 0$ , donc  $A$  est nilpotente.

- Pour tout  $(u, v) \in \mathcal{A}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$Mat_{\mathcal{B}}(\lambda u + v) = \lambda Mat_{\mathcal{B}}(u) + Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda A(u) + A(v) & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

donc  $A(\lambda u + v) = \lambda A(u) + A(v)$ .

$\varphi : u \in \mathcal{A} \mapsto A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$  est donc une application linéaire, donc  $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\} = \text{Im } \varphi$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ .

- Pour tout  $(A, B) \in (\{A(u) | u \in \mathcal{A}\})^2$ , il existe  $u$  et  $v \in \mathcal{A}$  tels que  $A = A(u)$  et  $B = A(v)$ , c'est-à-dire  $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

$$\text{et } Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Alors  $u \circ v \in \mathcal{A}$  car  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  et

$$Mat_{\mathcal{B}}(u \circ v) = Mat_{\mathcal{B}}(u) \times Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} AB & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

donc  $AB = A(u \circ v) \in \{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ .

$\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$  est donc stable par produit.

- $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$  est donc bien une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$  constituée de matrices nilpotentes.
- On montre de même que  $\{D(u) | u \in \mathcal{A}\}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$  constituée de matrices nilpotentes.

34. •  $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$  dont tous les éléments sont nilpotents, donc, comme  $r \leq n - 1$ ,  $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$  est trigonalisable (version matricielle de l'hypothèse de récurrence), ie il existe  $P \in GL_r(\mathbb{C})$  telle que pour tout  $A \in \{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ ,  $P^{-1}AP$  soit triangulaire supérieure.

- De même, il existe  $Q \in GL_s(\mathbb{C})$  telle que pour tout  $D \in \{D(u) | u \in \mathcal{A}\}$ ,  $P^{-1}DP$  soit triangulaire supérieure.

- Posons alors  $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Comme  $\det(R) = \det(P)\det(Q) \neq 0$ ,  $R$  est inversible.

En voyant  $R$  comme une matrice de changement de base, et en posant donc  $\mathcal{C}$  base de  $E$  telle que  $R = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ , on a, pour tout  $u \in \mathcal{A}$ ,

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{C}}(u) &= R^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(u) R = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(u)P & B(u)Q \\ 0 & D(u)Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1}A(u)P & P^{-1}B(u)Q \\ 0 & Q^{-1}D(u)Q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et cette dernière matrice est triangulaire supérieure car  $P^{-1}A(u)P$  et  $Q^{-1}D(u)Q$  le sont. On peut alors conclure la propriété annoncée par récurrence...

35. Dans cette base  $\mathcal{C}$ , les valeurs propres de  $u$  sont les éléments diagonaux de la matrice associée.

Or, comme il existe  $p$  tel que  $u^p = 0$ , si  $x$  est un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors

$$u^p(x) = u^{p-1}(u(x)) = u^{p-1}(\lambda x) = \lambda u^{p-1}(x) = \dots = \lambda^p x,$$

donc, comme  $u^p = 0$ , on a  $\lambda^p x = 0$ , donc, comme  $x \neq 0$ , on a  $\lambda^p = 0$ , donc  $\lambda = 0$ .

Par suite, les éléments diagonaux de la matrice associée à  $u$  dans la base  $\mathcal{C}$  sont nuls, donc cette matrice triangulaire est dans  $T_n^+(\mathbb{C})$ .

## V. Le théorème de Burnside

### V.A - Recherche d'un élément de rang 1

Comme  $\mathcal{A}$  est irréductible,  $\mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ , car tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  seraient alors stable par tous les éléments de  $\mathcal{A}$ .

36. • Soient  $x$  un élément non nul de  $E$ .

$F = \{u(x) | u \in \mathcal{A}\}$  est un sous-espace vectoriel car  $\mathcal{A}$  en est un. De plus, pour tout  $y \in F$ , il existe  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $y = u(x)$ . Alors, pour tout  $v \in \mathcal{A}$ ,  $v(y) = \underbrace{v \circ u}_{\in \mathcal{A}}(x) \in \{f(x) | f \in \mathcal{A}\} = F$ .  $F$  est donc stable par tous les éléments de  $\mathcal{A}$ , donc  $F = \{0\}$  ou  $F = E$ .

• Si  $F = \{0\}$ , alors, pour tout  $u \in \mathcal{A}$ ,  $u(x) = 0$ , donc  $\text{Vect}(x)$  est stable par tous les éléments de  $\mathcal{A}$ , ce qui est exclu car  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre irréductible de  $\mathcal{L}(E)$  et car  $\text{Vect}(x) \neq \{0\}$  (car  $x \neq 0$ ).

• On a donc  $F = E$ , et, par suite, pour tout  $y \in E$ , il existe  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $u(x) = y$ .

37. • Soit  $x$  et  $y$  dans  $E$  tels que la famille  $(v(x), v(y))$  soit libre ( $x$  et  $y$  existent car  $\text{rg}(v) \geq 2$ ). D'après la question précédente, comme  $v(x) \neq 0$ , il existe  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $y = u(v(x)) = u \circ v(x)$ .

• Considérons alors  $\varphi : z \in \text{Im}(v) \mapsto v \circ u(z) \in \text{Im}(v)$ .

$\varphi$  est un endomorphisme de  $\text{Im}(v)$ ,  $\mathbb{C}$  espace vectoriel de dimension au moins 1, donc  $\varphi$  admet au moins une valeur propre  $\lambda$ . (car son polynôme caractéristique, de degré au moins 1, admet au moins une racine sur  $\mathbb{C}$ ). Par suite,  $\varphi - \lambda \text{Id}_{\text{Im}(v)}$  n'est pas injective, donc non surjective (endomorphisme en dimension finie), donc  $\text{rg}(\varphi) \leq \dim(\text{Im}(v)) - 1 = \text{rg}(v) - 1$ .

• Soit alors  $\psi = v \circ u \circ v - \lambda v \in \mathcal{L}(E)$ .

Comme  $\psi = \varphi \circ v$ ,  $\text{rg}(\psi) \leq \min(\text{rg}(\varphi), \text{rg}(v)) \leq \text{rg}(v) - 1$  et, comme  $\psi(x) = v \circ u \circ v(x) - \lambda v(x) = v((u \circ v)(x)) - \lambda v(x) = v(y) - \lambda v(x) \neq 0$  (car  $(v(x), v(y))$  est une famille libre), donc  $\text{rg}(\psi) \geq 1$ .

On a donc bien  $0 < \text{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \text{rg}(v)$ .

38. Supposons qu'il n'existe pas d'élément de  $\mathcal{A}$  de rang 1.

Posons alors  $r = \min\{\text{rg}(u), u \in \mathcal{A} \setminus \{0_{\mathcal{L}(E)}\}\}$ , qui existe comme minimum d'un ensemble fini non vide (car  $\mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ ). Soit alors  $v \in E$  tel que  $\text{rg}(v) = r$ . Alors, en prenant  $u$  comme dans la question précédente,  $v \circ u \circ v \in \mathcal{A}$  comme composé d'éléments de  $\mathcal{A}$ , et  $v \circ u \circ v - \lambda v \in \mathcal{A}$  car  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .

Or  $0 < \text{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \text{rg}(v) = r$ , ce qui est exclu.

D'où, par l'absurde, il existe  $v \in \mathcal{A}$  tel que  $\text{rg}(v) = 1$ .

### V.B - Conclusion

39. Comme  $u_0$  est de rang 1, et  $u_0(\varepsilon_k) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on a  $u_0(\varepsilon_1) \neq 0$ .

D'où, d'après la question 36, pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , il existe  $v_i \in \mathcal{A}$  tel que  $v_i(u_0(\varepsilon_1)) = \varepsilon_i$ . Alors  $u_i = v_i \circ u \in \mathcal{A}$  car  $\mathcal{A}$  est stable par composition et

$$u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, u_i(\varepsilon_k) = v_i(u_0(\varepsilon_k)) = v_i(0) = 0,$$

donc  $\dim \text{Im}(u_i) = \dim \text{Vect}(u_i(\varepsilon_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}) = \dim \text{Vect}(u_i(\varepsilon_1)) = 1$ , donc  $u_i$  est de rang 1 et  $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ .

40. On construit maintenant des endomorphismes  $u_{i,j}$  dans  $\mathcal{A}$  dont les matrices dans  $\mathcal{B}$  sont les  $E_{i,j}$  de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On a déjà construit  $u_{i,1} = u_i$  dans la question précédente.

– Notons  $(V_1, \dots, V_n)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  et

$$G = \{x \in E : \forall u \in \mathcal{A}, V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0\}.$$

–  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

De plus, si  $x \in G$ , alors, pour tout  $v \in \mathcal{A}$ ,  $v(x) \in G$  car pour tout  $u \in \mathcal{A}$ ,

$$V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v(x)) = V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\underbrace{u \circ v}_{\in \mathcal{A}}) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \underset{\text{car } x \in G}{=} 0.$$

Par suite, comme  $\mathcal{A}$  est supposée irréductible, on a  $G = \{0\}$  ou  $G = E$ .

Supposons  $G = E$ . Soit alors  $\varphi : x \in E \mapsto V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathbb{C}$ .  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ , donc  $K = \text{Ker } \varphi = \{x \in E : V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - 1$ .

De plus, pour tout  $x \in K$ , pour tout  $u \in \mathcal{A}$ ,  $u(x) \in K$  car

$$V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(x)) = V_1^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0$$

car  $x \in E = G$ .

$K$  est donc un sous-espace vectoriel non trivial de  $E$  stable par  $\mathcal{A}$ , ce qui est contraire au caractère irréductible de  $\mathcal{A}$ .

On a donc  $G = \{0\}$ .

- Soit à présent  $H = \{(Mat_{\mathcal{B}}(u))^T V_1, u \in \mathcal{A}\}$ .  
 $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ .  
 Si  $H \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , alors on note  $p = \dim H < n$  et  $H = \text{Vect}(W_1, \dots, W_p)$ .  
 On choisit  $X \neq 0$  dans l'intersection d'hyperplans

$$\text{Ker}(W_1^T) \cap \text{Ker}(W_2^T) \cap \dots \cap \text{Ker}(W_p^T)$$

qui est de dimension  $\geq n - p > 0$ .

Alors, en prenant  $x \in E$  tel que  $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = X$ , on a  $x \in G$  et  $x \neq 0$ , ce qui est exclu.

D'où, par l'absurde,  $H = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ .

- Comme  $H = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $w_j \in \mathcal{A}$  tel que  $(Mat_{\mathcal{B}}(w_j))^T V_1 = V_j$ .  
 On a alors  $E_{i,j} = V_i V_j^T = V_i V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(w_j) = E_{i,1} Mat_{\mathcal{B}}(w_j) = Mat_{\mathcal{B}}(u_{i,1} w_j)$ , où  $u_{i,1} w_j \in \mathcal{A}$  car  $\mathcal{A}$  est stable par composition.
- Posons alors, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $u_{i,j} = u_{i,1} w_j$ .  
 $(u_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  est une base de  $\mathcal{L}(E)$  car  $(Mat_{\mathcal{B}}(u_{i,j}))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} = (E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .  
 Par suite,  $\mathcal{L}(E) = \text{Vect}((u_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}) \subset \mathcal{A}$  comme espace vectoriel engendré par des éléments de  $\mathcal{A}$ .  
 L'inclusion réciproque étant évidente, on a bien l'égalité :  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ .