CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants. Dans chacun des exercices, les différentes parties ne sont pas indépendantes, mais tout résultat peut-être admis pour être utilisé par la suite.

Dans tous les exercices, étant donnés deux entiers naturels a, b tels que $a < b$, $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels n tels que $a \leq n \leq b$. On note N^* l'ensemble des entiers naturels non nuls.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien. Le produit scalaire sur E est noté $< \, , \, >$ et la norme associée $\| \ \|$.

A. Préliminaires : Soient u_1, u_2 deux vecteurs de E.

1. Démontrer l'inégalité :

$$| < u_1, u_2 > | \leq \|u_1\| \, \|u_2\|$$

   On pourra considérer la fonction f définie par $f(t) = \|u_1 + tu_2\|^2$ pour t dans $\mathbb{R}$ et démontrer qu'il s'agit d'une fonction polynomiale.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les vecteurs u_1, u_2 pour que $| < u_1, u_2 > | = \|u_1\| \, \|u_2\|$. Justifier votre réponse.

Soit n un entier naturel non nul. Pour toute famille $(u_1, ..., u_n)$ de vecteurs de E, on note $G(u_1, ..., u_n)$ la matrice (n, n) dont le (i, j)-ème coefficient est $< u_i, u_j >$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.

Soit M une matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$, dont le (i, j)-ème coefficient est noté $m_{i,j}$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.
Si p est un entier naturel non nul, $M^{\otimes p}$ désigne la matrice (n, n) dont le (i, j)-ème coefficient est $m_{i,j}^p$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.

On dit que la matrice M vérifie la propriété $\mathtt{G}$ s'il existe des vecteurs $u_1, ..., u_n$ dans E tels que :

$$M = G(u_1, ..., u_n).$$

B. Dans cette partie, on suppose $n = 2$. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice $(2, 2)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

3. On suppose que la matrice B vérifie la propriété $\mathtt{G}$. Soit (u_1, u_2) dans E^2 tels que $B = G(u_1, u_2)$. Justifier que $a \geq 0$, $b = c$, $d \geq 0$ et $\det B \geq 0$.

4. Réciproquement, on suppose que $a \geq 0$, $b = c$, $d \geq 0$ et $\det B \geq 0$. Justifier que B vérifie la propriété $\mathtt{G}$.
   Indications : En considérant (e_1, e_2) une base orthonormale de E, on pourra construire une famille de vecteurs (u_1, u_2) telles que $B = G(u_1, u_2)$ en choisissant u_1 sous la forme xe_1 et u_2 sous la forme $ye_1 + ze_2$ pour des nombres réels x, y, z qu'on précisera. On pourra commencer par étudier le cas $a > 0$.

5. Justifier que la matrice B vérifie la propriété $\mathtt{G}$ si et seulement si, pour tout entier p dans N^*, $B^{\otimes p}$ vérifie la propriété $\mathtt{G}$.

C. Dans cette partie, on suppose $n = 3$. Soient a, b deux nombres réels. On pose :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

6. On suppose que la matrice C vérifie la propriété $\mathtt{G}$. Soient u_1, u_2, u_3 des vecteurs de E tels que $C = G(u_1, u_2, u_3)$.
   (a) Démontrer que $a \geq 1$ et $a \geq b^2$.
   (b) Justifier que la famille (u_1, u_3) est othonormale.

(c) Déterminer le vecteur v_2 projection orthogonale du vecteur u_2 sur le plan engendré par les vecteurs u_1 et u_3.

(d) En déduire que $a \geq b^2 + 1$.

(e) Démontrer que les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont linéairement indépendants si et seulement si $a > b^2 + 1$.

7. On suppose $a \geq b^2 + 1$. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E.

   (a) Déterminer l'ensemble des vecteurs $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tels que $< u, e_1 >= 1$ et $< u, e_3 >= b$.

   (b) Justifier que la matrice C vérifie la propriété `G`.

   (c) Est-il vrai que, pour tout p dans N^*, la matrice $C^{\otimes p}$ vérifie la propriété `G` ? On argumentera précisément la réponse.

D. Soit $\mathcal{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $]0, +\infty[$. Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ des fonctions f telles que pour tout polynôme P, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)^2 P(t)dt$ est absolument convergente. On ne demande pas de vérifier que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

Soit p dans N^*.

8. Démontrer que pour tous f et g dans $\mathcal{E}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}dt$ est absolument convergente.

9. On peut donc définir l'application :

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \to & \mathbb{R} \\ (f, g) & \to & < f, g >_p = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}dt \end{array}$$

   Démontrer que c'est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

10. Démontrer que la fonction h définie par $h(t) = e^{-t}$ pour $t \in]0, +\infty[$, appartient à $\mathcal{E}$.

Dans la suite, on note :

$$\gamma_p = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt.$$

11. Soit α un nombre réel strictement positif. On admet que la fonction h_α définie par $h_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$ pour $t \in]0, +\infty[$, appartient à $\mathcal{E}$. Exprimer $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^{p-1} dt$ en fonction de α, p et γ_p.

12. Soit n un entier naturel ≥ 2. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des nombres réels strictement positifs. On désigne par D la matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont le (i, j)-ème coefficient $d_{i,j}$, pour (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$, est défini par :

$$d_{i,j} = \frac{1}{\alpha_i + \alpha_j}.$$

    Démontrer que pour tout entier naturel non nul p, il existe un espace euclidien E et une famille $(u_1, ..., u_n)$ dans E^n tels que la matrice $D^{\otimes p} = G(u_1, ..., u_n)$. On explicitera E, son produit scalaire ainsi que la famille $(u_1, ..., u_n)$.

Exercice 2

On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

A. Soit F la fonction définie en un nombre réel x par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0 \\ x^2, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée F'. La fonction F' est-elle continue ? est-elle dérivable ?
3. Etablir le tableau de variations de F et dessiner précisément le graphe de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

B. Soit E_0 l'ensemble des fonctions H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à l'intervalle $]-\infty, 0[$ et la restriction à l'intervalle $]0, +\infty[$ sont toutes deux des fonctions polynomiales de degré ≤ 2.

4. Démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
5. Soient P et Q deux fonctions polynomiales de degré ≤ 2. On pose $P : x \to ax^2 + bx + c$ et $Q : x \to dx^2 + ex + f$. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = \begin{cases} P(x), & \text{si } x < 0 \\ Q(x), & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les nombres réels a, b, c, d, e, f pour que H soit une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. En déduire une base de E_0. Quelle est la dimension de E_0 ?

6. Soit Ψ_0 l'application de E_0 dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\Psi_0(H) = (H(0), H'(0), H(1))$.
   (a) Démontrer que Ψ_0 est une application linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de Ψ_0.
   (c) En déduire que Ψ_0 est surjective.

C. Soit α un nombre réel. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $P : x \to ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré ≤ 2. Soient u, v, w des nombres réels tels que $f(\alpha) = u$, $f'(\alpha) = v$. Soit H la fonction définie pour x dans $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \leq \alpha \\ P(x), & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

7. Justifier que H est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $H(\alpha + 1) = w$ si et seulement si (a, b, c) est solution d'un système linéaire qu'on explicitera. *Indication : on pourra exprimer a en fonction de $P(\alpha + 1)$, $P(\alpha), P'(\alpha)$.* Ce système linéaire a-t'il une unique solution ?
8. Ecrire une fonction `prolonge` en python qui prend en entrée des nombres (u, v, w, β) et donne en sortie un triplet (a, b, c) tel que la fonction polynomiale définie par $h : x \to ax^2 + bx + c$ vérifie : $h(\beta - 1) = u, h'(\beta - 1) = v$ et $h(\beta) = w$.

D. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $I_0 =]-\infty, 0], I_1 =]0, 1]$, $I_2 =]1, 2]$, ... , $I_j =]j-1, j]$, ... ,$I_{n-1} =]n-2, n-1]$, $I_n =]n-1, +\infty[$.
Soit E l'ensemble des fonctions H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telles que sur chacun des intervalles $I_0, I_1, ..., I_n$ la restriction de H est une fonction polynomiale de degré ≤ 2. On admet que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

9. Pour j un entier compris entre 0 et n, soit $P_j : x \to a_j x^2 + b_j x + c_j$ une fonction polynomiale de degré ≤ 2. Soit H la fonction définie par : $H(x) = P_j(x)$, si $x \in I_j$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.

   (a) Démontrer que la fonction H appartient à E si et seulement si le vecteur $(a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, ..., a_{n_1}, b_{n_1}, c_{n_1}, a_n, b_n, c_n)$ est solution d'un système linéaire à $2n$ équations qu'on explicitera.

   (b) Résoudre ce système si on suppose de plus que H s'annule en tout point i dans $[\![0, n-1]\!]$. On commencera par exprimer b_i et c_i en fonction de a_i et i pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$.

   (c) On considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & E & \to & \mathbb{R}^n \\ & & H & \to & (H(0), H(1), ..., H(n-1)) \end{array}$$

      i. Justifier que φ est une application linéaire.

      ii. Quel est le noyau de φ ? En préciser la dimension.

      iii. Démontrer que φ est surjective. On pourra faire une démonstration par récurrence sur n.

      iv. Quelle est la dimension de E ? On citera précisément le théorème utilisé.

10. Soient $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{49}$ des nombres réels. Ecrire un programme `interpo` en python qui prend en entrée $\beta_0, ..., \beta_{49}$ et donne en sortie une liste de triplets $(a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), ..., (a_{50}, b_{50}, c_{50})$ tels que la fonction H définie par : $H(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j$, si $x \in I_j$, pour $j \in [\![0, 50]\!]$, est dans E et vérifie de plus $H(i) = \beta_i$ pour tout $i \in [\![0, 49]\!]$.

Exercice 3

A. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n.$$

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction $(x \to \dfrac{1}{1-x})$ au voisinage de 0. Quel est son rayon de convergence ?

2. Calculer les valeurs propres de la matrice M. Justifier qu'elles sont dans l'intervalle $]-1, 1[$. La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note α et β les valeurs propres de la matrice M.

   (a) Justifier qu'il existe des nombres réels A et B tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

   (b) Sans chercher à calculer A et B, justifier les égalités :

i. $A + B = 4$,

ii. $A\alpha + B\beta = 3$,

iii. $A\beta + B\alpha = -1$.

(c) Démontrer l'égalité :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \frac{A(1-\beta)+B(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

(d) En déduire la valeur de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

4. Proposer une fonction en python, `suite`(N), qui prend en entrée l'entier naturel N et renvoie la liste des $N+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sous forme de nombres rationnels. Préciser la complexité de votre algorithme en fonction des opérations que vous utilisez (additions, multiplications...).

B. On dispose d'une pièce qui, lorsqu'elle est lancée, tombe sur « pile » avec la probabilité p et tombe sur « face » avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que p est dans $]0, 1[$.

Alice et Benoît jouent à un jeu de « pile ou face » avec cette pièce de la façon suivante : La pièce est lancée plusieurs fois de suite jusqu'à ce que trois lancers successifs fournissent deux fois « pile » suivies d'une fois « face » ou une fois « face » suivie de deux fois « pile ». Dans le premier cas, deux fois « pile » suivies d'une fois « face » , Alice gagne et dans le cas une fois « face » suivie de deux fois « pile » , Benoît gagne.

On désigne par *motif* le résultat de trois lancers successifs.
Par exemple, si on a effectué 7 lancers dont le résultat est « pile, face, pile, face, face, pile, pile » les motifs de longueur 3 sont « pile, face, pile », « face, pile, face », « pile, face, face », « face, face, pile » et « face, pile, pile » ; à ce stade, Benoît a gagné et la partie est finie.

Soit n un entier naturel non nul. On note X_n la variable aléatoire qui donne la valeur du n-ième lancer : la variable X_n prend la valeur 1 lorsque la pièce tombe sur « pile » et la valeur 0 lorsque la pièce tombe sur« face ».

La probabilité d'un événement A lié à ce jeu sera noté $P(A)$. Ainsi, pour n dans N^*, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = 0) = q$.

Les lancers sont supposés indépendants, donc les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

Soit n dans N^*. On note E_n l'évènement « Ni Alice, ni Benoît n'ont gagné après n lancers » , A_n l'évènement « le n-ième lancer fait gagner Alice » et B_n l'évènement « le n-ième lancer fait gagner Benoît ».

5. Déterminer $P(E_n), P(A_n), P(B_n)$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
6. Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Soit $(x_0, ..., x_k)$ dans $\{0, 1\}^{k+1}$. Justifier que les évènements $E_n \cap (X_n = x_0)$ et $(X_{n+1} = x_1) \cap (X_{n+2} = x_2) \cap \cdots \cap (X_{n+k} = x_k)$ sont indépendants.
   Que peut-on en déduire pour la probabilité de l'événement
   $E_n \cap (X_n = x_0) \cap (X_{n+1} = x_1) \cap (X_{n+2} = x_2) \cap \cdots \cap (X_{n+k} = x_k)$?
7. Soit n dans N^*. On note v_n la probabilité de l'évènement $E_n \cap (X_n = 0)$ et w_n la probabilité de l'évènement $E_n \cap (X_n = 1)$.

   (a) Exprimer v_1, v_2, w_1, w_2 en fonction de p et q.

(b) Soit n un entier naturel ≥ 3. En décomposant l'événement $E_n \cap (X_n = 0)$ selon la valeur prise par X_{n-1}, démontrer que $v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}$.

(c) Soit n un entier naturel ≥ 3. On considère une suite de n lancers consécutifs qui n'a fait gagner ni Alice, ni Benoît et qui se conclut par un « pile » (X_n prend la valeur 1.) On suppose que lors de l'un au moins de ces lancers, la pièce est tombée sur « face ». On note k le plus grand indice tel que, pour cette suite, X_k a pris la valeur 0 (c'est-à-dire le dernier lancer pour lequel la pièce est tombée sur « face »). Justifier que $k = n - 1$.

(d) Soit n un entier naturel ≥ 3. Démontrer que $w_n = p^n + pv_{n-1}$.

8. Soit T la variable aléatoire « durée du jeu » , c'est-à-dire que T prend la valeur n lorsque « Alice ou Benoît gagne à la n-ième étape » , pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si la partie ne se termine pas, T prend la valeur $+\infty$.

   (a) Soit n un entier naturel ≥ 2.

      i. Que peut-on dire des événements $(T > n)$ et E_n ?

      ii. En déduire l'expression de $P(T > n)$ en fonction de v_n, v_{n-1} et p.

      iii. Justifier que $P(T = +\infty) = 0$.
      Indication : On pourra étudier la suite $(v_n + pv_{n-1})_{n\geq 2}$ et démontrer qu'elle est décroissante.

      iv. Quelle propriété du jeu obtient-on ainsi ?

   (b) Si la série $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ est convergente, démontrer que la variable T est d'espérance finie. En notant $E(T)$ cette espérance, justifier l'égalité :

$$E(T) = 2 + p + \frac{p^3}{1-p} + (1+p)(\sum_{n=2}^{+\infty} v_n).$$

   (c) On suppose dans cette question seulement que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire $p = q = \frac{1}{2}$. Démontrer que la variable T est d'espérance finie et calculer $E(T)$.
   Indication : On pourra calculer v_2 et v_3.

9. Soit n un entier naturel ≥ 3.

   (a) On considère une suite de n lancers consécutifs telle qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer. Démontrer que lors des $n - 1$ premiers lancers, la pièce n'est pas tombée sur « face ».

   (b) En déduire la probabilité qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer , soit $P(A_n)$, puis la probabilité que Benoît gagne la partie au n-ième lancer , soit $P(B_n)$.

10. Exprimer en fonction de p la probabilité qu'Alice gagne la partie et la probabilité que Benoît gagne la partie. Quelles valeurs obtient-on pour ces deux probabilités lorsque la pièce est équilibrée ?

11. Quelle valeur donner à p pour que le jeu soit équitable ?

e3a 2016 - PC math 1- Corrigé succinct

Avertissement :
Il s'agit d'un corrigé succinct, non destiné à être donné tel quel aux élèves. En particulier les questions de cours ne sont pas démontrées et certains raisonnements mériteraient une rédaction plus précise.

1 Exercice 1

A.

1. Il s'agit de l'inégalité de Schwarz .: cf cours.

2. Cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz(cf cours). $|\langle u_1, u_2\rangle| = \| u_1 \| \| u_2 \|$ si et seulement si (u_1, u_2) est un système lié.

B.

3. Comme $B = G(u_1, u_2)$, $a = \langle u_1, u_1\rangle \geq 0$, $d = \langle u_2, u_2\rangle \geq 0$, $b = \langle u_1, u_2\rangle = \langle u_2, u_1\rangle = c$ et d'après l'inégalité de Schwarz (A), $b^2 \leq \| u_1 \|^2 \| u_2 \|^2 = ad$ d'où $\det(B) = ad - bc \geq 0$.

4. Réciproquement si $a \geq 0, d \geq 0, \det(B) \geq 0$ et $b = c$. On considère une base orthonormée (e_1, e_2) de E.

Soit $\alpha = \sqrt{a}$ et $u_1 = \alpha e_1$. On a $\langle u_1, u_1\rangle = a$.

- Si $a > 0$, $\alpha > 0$. On cherche u_2 sous la forme $u_2 = xe_1 + ye_2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  $B = G(u_1, u_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = d \\ \alpha x = b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{\alpha} \\ y^2 = \frac{ad-b^2}{a} = \frac{ad-bc}{\alpha^2} \end{cases}$
  Comme $\det(B) = ad - bc \geq 0$, ce système admet des solutions.Par exemple $B = G(u_1, u_2)$ avec $u_1 = \alpha e_1$ et $u_2 = \frac{b}{\alpha} e_1 + \frac{\sqrt{\det(B)}}{\alpha} e_2$.
- Si $a = 0$, $u_1 = 0_E$
  $\det(B) = -b^2 \geq 0$ donc $b = 0$.On a alors $B = G(0_E, \sqrt{d} e_2)$.

Dans tous les cas B vérifie la propriété G.

5. Si B vérifie la propriété G. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $M = B^{\otimes p} = \begin{pmatrix} a^p & b^p \\ b^p & d^p \end{pmatrix}$ car $b = c$.

Comme $a \geq 0$ et $d \geq 0$, $a^p \geq 0$ et $d^p \geq 0$.

D'autre part $\det(B) \geq 0$ donc $ad \geq b^2 \geq 0$ et par croissance de $t \mapsto t^p$ sur $\mathbb{R}^+$, $\quad (ad)^p \geq b^{2p}$ donc $\det(M) \geq 0$.

On déduit de la question 4 que M vérifie la propriété G.

La réciproque étant claire, on en déduit que B vérifie la propriété G si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\quad B^{\otimes p}$ vérifie la propriété G.

C.

6. On suppose que $C = G(u_1, u_2, u_3)$.

- **(a)** $\| u_1 \|^2 = 1$, $\| u_2 \|^2 = a$ et $\langle u_1, u_2\rangle^2 = 1$. D'après l'inégalité de Schwarz, $1 \leq a$. De même $\| u_3 \|^2 = 1$ et $\langle u_2, u_3\rangle^2 = b^2$ d'où $b^2 \leq a$.
- **(b)** $\| u_1 \| = \| u_3 \| = 1$ et $\langle u_1, u_3\rangle = 0$ donc (u_1, u_3) est orthonormale.
- **(c)** (u_1, u_3) est une base orthonormée de $P = \mathrm{Vect}(u_1, u_3)$ donc $v_2 = \langle u_1, u_2\rangle\, u_1 + \langle u_3, u_2\rangle\, u_3 = u_1 + bu_3$.
- **(d)** On a $\langle v_2, u_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle + b\langle u_3, u_2\rangle = 1 + b^2$ et $\| v_2 \|^2 = 1 + b^2$ car (u_1, u_3) est orthonormale.
  D'après l'inégalité de Schwarz, $\langle v_2, u_2\rangle^2 \leq \| v_2 \|^2 \| u_2 \|^2$ soit $(1 + b^2)^2 \leq a(1 + b^2)$ d'où $1 + b^2 \leq a$ car $1 + b^2 > 0$.

(e) Comme (u_1,u_3) est libre, si (u_1,u_2,u_3) est lié, $u_2 \in \mathrm{Vect}(u_1,u_3)$ d'où $u_2 = v_2$ et (u_2,v_2) est lié.
Réciproquement si (u_2,v_2) est lié, $u_2 \in \mathrm{Vect}(u_1,u_3)$ et (u_1,u_2,u_3) est lié.
Finalement, (u_1,u_2,u_3) est lié si et seulement si (u_2,v_2) est lié ce qui équivaut à $(1+b^2)^2 = a(1+b^2)$ d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz (A.2)
On en déduit que le système est libre si et seulement si $a > 1+b^2$.

7. On suppose $a \geq 1+b^2$.

(a) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$.
$\begin{cases} \langle u, e_1\rangle = 1 \\ \langle u, e_3\rangle = b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = b \end{cases}$
L'ensemble cherché est $\{e_1 + ye_2 + be_3\ ,\ y \in \mathbb{R}\}$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$ et $u = e_1 + ye_2 + be_3$.
$G(e_1,u,e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+y^2+b^2 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$.
$G(e_1,u,e_3) = C \Longleftrightarrow a-(1+b^2) = y^2$
Comme $a \geq 1+b^2$, cette équation admet (au moins) une solution $y = \sqrt{a-1-b^2}$ et C vérifie la propriété G.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $C^{\otimes p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a^p & b^p \\ 0 & b^p & 1 \end{pmatrix}$, du même type que C.
D'après ce qui précède, $C^{\otimes p}$ vérifie la propriété G si et seulement si $a^p \geq 1+b^{2p}$.
Or $a \geq 1+b^2 \geq 0$ donc par croissance de $t \mapsto t^p$ sur $\mathbb{R}^+$, $\quad a^p \geq (1+b^2)^p \geq 1+b^{2p}$
En effet par la formule du binôme,
$(1+b^2)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b^{2k} = 1+b^{2p} + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} b^{2k} \geq 1+b^{2p}$ car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad b^{2k} \geq 0$.

D.

8. Pour tous f et g dans $\mathscr{E}$, $t \mapsto f(t)g(t)t^{p-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et

$\forall t \in]0,+\infty[,\quad \left|f(t)g(t)t^{p-1}\right| \leq \dfrac{f(t)^2}{2} + \dfrac{g(t)^2 t^{2p-2}}{2}$.

Par définition de $\mathscr{E}$, les fonctions $t \mapsto f(t)^2$ et $t \mapsto g(t)^2 t^{2p-2}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$,

donc il en est de même pour $t \mapsto \dfrac{f(t)^2}{2} + \dfrac{g(t)^2 t^{2p-2}}{2}$ et par comparaison, la fonction $t \mapsto f(t)g(t)t^{p-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (ou encore l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente).

9. $\langle\ ,\ \rangle_p$ est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ et linéaire à gauche par propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$ et linéarité des intégrales impropres convergentes. C'est donc une forme bilinéaire symétrique.

Pour tout $f \in \mathscr{E}$ $\quad \langle f, f\rangle_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2 t^{p-1}\,\mathrm{d}t \geq 0$ car $\forall t \in]0,+\infty[,\quad f(t)^2 t^{p-1} \geq 0$

De plus la fonction $t \mapsto f(t)^2 t^{p-1}$ est continue, positive sur $]0,+\infty[$, donc

$\langle f, f\rangle_p = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in]0,+\infty[\quad f(t)^2 t^{p-1} \Longleftrightarrow \forall t \in]0,+\infty[\quad f(t) = 0 \Longleftrightarrow f = 0_{\mathscr{E}}$.

On en déduit que $\langle\ ,\ \rangle_p$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire sur $\mathscr{E}$.

10. La fonction h est continue sur $[0,+\infty[$. Pour tout polynôme P, la fonction $t \mapsto h(t)^2 P(t) = \mathrm{e}^{-2t}P(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et par croissances comparées, $\mathrm{e}^{-2t}P(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$. Comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison sur les fonctions intégrables, $t \mapsto h(t)^2 P(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc $h \in \mathscr{E}$.

11. Dans $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, t^{p-1}\, \mathrm{d}t$, on effectue le changement de variable $\mathscr{C}^1$ bijectif $x = \alpha t$ où $\alpha > 0$.

Si $t \to 0$, $\quad x \to$ et si $t \to +\infty$, $\quad x \to +\infty$. De plus formellement, $\mathrm{d}x = \alpha\, \mathrm{d}t$.

On déduit du théorème de changement de variable pour les intégrales convergentes que $I_p = \dfrac{\gamma_p}{\alpha^p}$.

12. *Rque : le calcul de γ_p n'est pas demandé .Il n'est pas non plus indispensable mais cela aurait pu être l'objet d'une question "facile"..*

$\gamma_p = \langle h_{1/2}, h_{1/2}\rangle_p > 0$ car $h_{1/2} \neq 0$ et $\langle\ ,\ \rangle_p$ est un produit scalaire.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ soit $u_i = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_p}} h_{\alpha_i} : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_p}} \mathrm{e}^{-\alpha_i t}$.

D'après 11, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\quad u_i \in \mathscr{E}$ et pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$,

$\langle u_i, u_j\rangle_p = \dfrac{1}{\gamma_p} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha_i+\alpha_j)t}\, t^{p-1}\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{(\alpha_i+\alpha_j)^p}$

Soit E le sous espace vectoriel de l'espace préhilbertien $(\mathscr{E}, \langle\ ,\ \rangle_p)$ engendré par $u_1, \ldots, u_n$. $(E, \langle\ ,\ \rangle_p)$ est un espace euclidien et $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E telle que $D^{\otimes p} = G(u_1, \ldots, u_n)$

Est ce ce vraiment une question raisonnable dans un sujet d'e3a PC ?

2 Exercice 2

A.

1. F est continue sur $]-\infty, 0]$, sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = 0 = F(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x)$: elle est donc continue en 0 et finalement continue sur $\mathbb{R}$.

2. F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. $\forall x > 0$, $\quad F'(x) = 0$ et $\forall x < 0$, $\quad F'(x) = 2x$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F'(x) = 0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F'(x)$. D'après le théorème limite de la dérivée, F est dérivable en 0 de dérivée $F'(0) = 0$ et F' est continue en 0. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée F' y est continue.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F'(x) - F'(0)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{F'(x) - F'(0)}{x} = 2$: F' n'est pas dérivable en 0.

3. *Cette question est mathématiquement élémentaire mais un peu pénible en latex : joker ....*

B.

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On identifie abusivement cet espace à l'espace des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur à 2.

4. E_0 est un sous ensemble non vide (il contient toutes les fonctions de $\mathbb{R}_2[X]$) de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Pour tous $f, g \in E_0$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

D'autre part comme $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel et que $f|_{]-\infty,0[}$ et $g|_{]-\infty,0[}$ sont des fonctions polynômiales de degré inférieur à 2, $f + \lambda g|_{]-\infty,0[}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. De même $f + \lambda g|_{]0,+\infty[}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 et donc $f + \lambda g \in E_0$.

E_0 est donc un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

5. *Rque Au vu de la question A et de la question C, il y a une maladresse dans le texte. Il semble plus naturel de considérer que $H(x) = P(x)$ pour $x \leq 0$ et $H(x) = Q(x)$ pour $x > 0$.*

Je suppose le texte ainsi modifié , afin de simplifier la rédaction

Comme les fonctions P et Q sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si seulement si elle est continue en 0 et si les dérivées à gauche et à droite de H en 0 coïncident, ce qui équivaut à :

$\left\{\begin{array}{l} P(0)=Q(0) \\ P'(0)=Q'(0) \end{array}\right.$, ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{l} c=f \\ b=e \end{array}\right.$.

E_0 est donc l'ensemble des fonctions H telles qu'il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $H(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{si } x\le 0 \\ dx^2+bx+c & \text{si } x>0 \end{cases}$.

Soit f_1, f_2, f_3, f_4 les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$f_1 : x\mapsto 1, \quad f_2 ; x\mapsto x, \quad f_3 = F \quad f_4 : x\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\le 0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

Comme f_1 et f_2 sont des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de degrés inférieurs à 2, elles sont dans E_0.

On a démontré en A que F est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Ses restrictions à $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ sont polynomiales de degré inférieur à 2 donc $F\in E_0$. De la même façon, $f_4\in E_0$.

En reprenant les notations précédentes, si $H\in E_0$, $\exists (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \quad H = df_4+af_3+bf_2+cf_1$. La famille (f_1,f_2,f_3,f_4) est une famille génératrice de E_0. Reste à prouver qu'elle est libre.

Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tels que $H=df_4+af_3+bf_2+cf_1=0$

Necessairement $H(0)=H'(0)=0$ donc $c=b=0$. On a aussi $H(1)=0$ d'où $d=0$ et $H(-1)=0$ d'où $a=0$.

La famille (f_1,f_2,f_3,f_4) est une base de E_0 .On a donc $\dim(E_0)=4$.

6.

(a) *élémentaire*

(b) Soit $H=df_4+af_3+bf_2+cf_1\in E_0$. On a $H(0)=c,\ H'(0)=b$ et $H(1)=d+b+c$.
On en déduit que $\Psi_0(H)=0 \iff b=c=d=0 \iff H\in \mathrm{Vect}(f_3)$. Ou encore $\mathrm{Ker}(\Psi_0)=\mathrm{Vect}(f_3)$.

(c) D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}\,\Psi_0$ est un sous espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension :
$\mathrm{rg}(\Psi_0)=\dim(E_0)-\dim(\mathrm{Ker}(\Psi_0))=3$ donc $\mathrm{Im}(\Psi_0)=\mathbb{R}^3$ et Ψ_0 est surjective.

C.

7. De la même manière qu'en B.5, comme les fonctions f et P sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} f(\alpha)=P(\alpha) \\ f'(\alpha)=P'(\alpha) \end{array}\right.$.

Finalement $\left\{\begin{array}{l} H\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ H(\alpha+1)=w \end{array}\right. \iff (\Sigma)\left\{\begin{array}{l} a\alpha^2+b\alpha+c=u \\ 2a\alpha+b=v \\ a(\alpha+1)^2+b(\alpha+1)+c=w \end{array}\right.$

$(\Sigma) \iff \left\{\begin{array}{l} a\alpha^2+b\alpha+c=u \\ 2a\alpha+b=v \\ a=w-v-u \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=-u-v+w \\ b=2\alpha u+(2\alpha+1)v-2\alpha w \\ c=(1-\alpha^2)u-\alpha(1+\alpha)v+\alpha^2 w \end{array}\right.$

Le système linéaire (Σ) admet une solution unique .

8. Il suffit dans les formules précédentes de poser $\alpha=\beta-1$.

Rque : la résolution du système n'étant pas explicitement demandée, on pouvait montrer que la matrice $M=\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ (\alpha+1)^2 & (\alpha+1) & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible en calculant* $\det(M)$ *puis écrire un programme python résolvant le système en utilsant le module numpy.linalg*

```
def prolonge(u,v,w,beta):
    al=beta−1
    return(−u−v+w,2*al*u+(2*al+1)*v−2*al*w,(1−al**2)*u−al*(al+1)*v+al**2*w)
```

D.

9.

(a) En généralisant le raisonnement effectué en B.5,

$H \in E \iff \forall j \in [\![0, n-1]\!], \quad \begin{cases} P_j(j) = P_{j+1}(j) \\ P'_j(j) = P'_{j+1}(j) \end{cases} \iff \forall j \in [\![0, n-1]\!], \quad \begin{cases} a_j j^2 + b_j j + c_j - a_{j+1} j^2 - b_{j+1} j - c_{j+1} = 0 \\ 2a_j j + b_j - 2a_{j+1} j - b_{j+1} = 0 \end{cases}$

(S) est un système linéaire à 2n équations d'inconnues $a_0, b_0, c_0, \ldots, a_n, b_n, c_n$.

(b) On cherche à résoudre le système (S_b) : $\forall j \in [\![0, n-1]\!] \quad \begin{cases} P_j(j) = 0 P_{j+1}(j) = 0 \\ P'_j(j) = P'_{j+1}(j) \end{cases}$

$$(S_b) \iff \begin{cases} (\Sigma_1)\ \forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad P_i(i) = P_i(i-1) = 0 \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad P'_i(i) = P'_{i+1}(i) \\ P_0(0) = 0 \\ P_n(n-1) = 0 \end{cases}.$$

Après quelques lignes de calculs,

$(\Sigma_1) \iff \forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad \begin{cases} b_i = (1-2i))a_i \\ c_i = (i^2 - i)a_i \end{cases}$

D'autre part, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\quad P'_i(i) = P'_{i+1}(i) \iff 2i a_i + b_i = 2i a_{i+1} + b_{i+1}$

$$(S_b) \iff \begin{cases} c_0 = 0 \\ b_0 = b_1 \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad b_i = (1-2i)a_i \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad c_i = (i^2 - i)a_i \\ \forall i \in [\![1, n-2]\!]\, a_i = -a_{i+1} a_n(n-1)^2 + b_n(n-1) + c_n = 0 \\ a_{n-1} = 2a_n(n-1) + b_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_i = (-1)^{i-1} a_1 \quad \forall i \in [\![1, n-1]\!] \\ b_i = (1-2i)(-1)^{i-1} a_1 \quad \forall i \in [\![1, n-1]\!] \\ c_i = (i^2 - i)(-1)^{i-1} a_1 \quad \forall i \in [\![1, n-1]\!] \\ c_0 = 0 \\ b_0 = -a_1 \\ b_n = a_{n-1} - 2(n-1)a_n \\ c_n = -(n-1)a_{n-1} + (n-1)^2 a_n \end{cases}$$

C'est vraiment aussi affreux ou j'ai loupé quelque chose ?

(c)

(i). *élémentaire*

(ii). Une fonction H définie par $H(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$ sur tout I_i pour $0 \le i \le n$ est dans $\operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si $(a_0, b_0, c_0, \ldots, a_n, b_n, c_n)$ est solution du système (S_b) résolu en 9.b. La dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$ est celle des solutions de ce système, donc $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 3$ puisque les seules inconnues libres sont a_0, a_1 et a_n.

(iii). *Le texte précisait $n \ge 2$. On ne change rien aux calculs précédents en englobant le cas $n = 1$ .Je suppose ici que $n \ge 1$*

• Si $n = 1$, $E = E_0$ qui est de dimension 4 d'après B.5. Comme $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 3$, le théorème du rang donne $\operatorname{rg}\varphi = 1$ et donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$: φ est surjective.

• Supposons que pour un certain $n \ge 1$, l'application φ soit surjective. On se place dans $E = E_n$, espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ polynomiales de degré inférieur à 2 sur tous les I_k pour $0 \le k \le n+1$.

Soit $(\beta_0, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Par hypothèse de récurrence il existe $f \in E_{n-1}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, polynomiale de degré inférieur à 2 sur tous les I_k pour $0 \le k \le n$ telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad f(i) = \beta_i$. D'après la question C.7, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la fonction H définie par :

$H(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} x \le n-1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} x > n-1 \\ H(n) = \beta_n \end{cases}$ soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est bien dans E_n : elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et polynomiale de degré inférieur à 2 sur tous les I_k pour $0 \le k \le n$ donc aussi sur les I_k

pour $0 \le k \le n+1$. De plus elle vérifie $H(k) = \beta_k$ pour tout $k \in [[0,n]]$.On a donc $\varphi(H) = (\beta_0, \dots, \beta_n)$, ce qui prouve que φ est surjective de E_n sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

On en déduit par récurrence sur $n \ge 1$ que φ est surjective de E_{n-1} sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(iv). On déduit du théorème du rang que $\dim(E_{n-1}) = n+3$

10.

```
def interpo(B):#B est une liste de longueur N=50
    N=len(B)#on prendra N=50
    P=(0,0,B[0])
    #le polynôme constant de valeur B[0] convient en 0
    L=[P]
    for i in range(N−1):
        a,b,c=L[i][0], L[i][1], L[i][2] #le dernier polynôme trouvé est f: x−>ax^2+bx+c et vaut beta_i en i
        u=a*i**2+b*i+c#u=f(i)
        v=2*a*i+b#v=f'(i)
        w=B[i+1]
        L.append(prolonge(u,v,w,i+1))
    return L
```

Exercice 3

A.

1. $\forall x \in]-1,1[\quad \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Le Rayon de convergence est 1.

2. $Sp(M) = \left\{ \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \right\}$.

Comme $2 < \sqrt{5} < 3$, $\quad 0 < \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} < 1$ et $-1 < \dfrac{-1}{2} < \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$.

M est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant 2 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

3.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = MX_n$. Par récurrence facile, on montrerait que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0$.

D'autre part, comme M est diagonalisable, il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$ où $D = \text{Diag}(\alpha, \beta)$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

En effectuant les produits matriciels, on en déduit l'existence de réels A et B tels que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = A\alpha^n + B\beta^n$.

Rque : Il est plus rapide d'utiliser les résultats connus pour une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique admet 2 racines distinctes α et β mais ce n'est pas la direction suggérée par le texte ..

(b) Pour $n = 0$, $\quad 4 = u_0 = A + B$ et pour $n = 1$, $\quad 3 = u_1 = A\alpha + B\beta$.

On a donc aussi $4\beta = A\beta + B\beta$ et $4\alpha = A\alpha + B\alpha$.

En ajoutant : $A\beta + B\alpha + \underbrace{B\beta + A\alpha}_{=3} = 4\underbrace{(\alpha+\beta)}_{=1/2}$ d'où $A\beta + B\alpha = -1$.

(c) Comme α et β sont dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$, les séries $\sum \alpha^n$ et $\sum \beta^n$ sont convergentes et par opérations sur les séries convergentes $\sum u_n$ converge.

De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{A}{1-\alpha} + \frac{B}{1-\beta}$.

En utilisant les égalités précédentes et les égalités $\alpha+\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha\beta = \frac{-1}{4}$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 20$.

4. *Le module fractions n'étant pas un module explicitement au programme, j'ai un peu la flemme d'introduire une nouvelle relation de récurrence sur la suite à valeurs entières $(4^n v_n)_{n\geq 0}$ je répond à la question en omettant le "sous forme de nombres rationnels"*

```python
def suite(N):
    L=[4]
    if  N==0:
        return L
    else:
        L=[4,3]
        for k in range(1,N):
            u=L[-1]/2+L[-2]/4 #u_{k+1}=u_k/2+u_{k-1}/4
            L.append(u)
    return L
```

Si on appelle $C(N)$ le nombre d'opérations nécéssaires, on a $C(0) = 0$ et $C(N) = 3(N-1)$ si $N \geq 1$ puisque pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$ on effectue 1 addition et 2 divisions.

B.

1. Un joueur ne peut gagner qu'à partir du 3ème tour donc

$\mathbf{P}(E_1) = 1, \quad \mathbf{P}(E_2) = 1, \quad \mathbf{P}(A_1) = 0, \quad \mathbf{P}(A_2) = 0, \quad \mathbf{P}(B_1) = 0, \quad \mathbf{P}(B_2) = 0$

$\mathbf{P}(A_3 = \mathbf{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3) = 0) = p^2 q$ car les (X_i) sont indépendantes.

De même $\mathbf{P}(B_3) = qp^2$.

Comme les joueurs ne peuvent pas gagner avant le 3ème tour, $E_3 = \overline{A_3 \cup B_3}$.

On a $\mathbf{P}(E_3) = 1 - \mathbf{P}(A_3 \cup B_3) = 1 - \mathbf{P}(A_3) - \mathbf{P}(B_3)$ car A_3 et B_3 sont incompatibles d'où $\mathbf{P}(E_3) = 1 - 2p^2 q$.

2. L'évenement $E_n \cap (X_n = x_0)$ ne dépend que des variables X_i pour $1 \leq i \leq n$ et l'évenement $(X_{n+1} = x_{n+1}) \cap \ldots \cap (X_{n+k} = x_{n+k})$ ne dépend que des variables X_i pour $n+1 \leq i \leq n+k$.

Comme les variables $(X_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes, ces deux évenements sont indépendants.

On en déduit que

$\mathbf{P}(E_n \cap (X_n = x_0) \cap (X_{n+1} = x_{n+1}) \cap \ldots \cap (X_{n+k} = x_{n+k})) = \mathbf{P}(E_n \cap (X_n = x_0))\mathbf{P}((X_{n+1} = x_{n+1}) \cap \ldots \cap (X_{n+k} = x_{n+k}))$.

3.

(a) $v_1 = \mathbf{P}(E_1 \cap (X_1 = 0)) = \mathbf{P}(X_1 = 0) = q, \quad w_1 = \mathbf{P}(E_1 \cap (X_1 = 1)) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ car $\mathbf{P}(E_1) = 1$

De même $v_2 = q$ et $w_2 = p$.

(b) $E_n \cap (X_n = 0) = E_n \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0) \bigcup E_n \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)$.

Comme il s'agit d'une union d'évenements incompatibles,

$\mathbf{P}(E_n \cap (X_n = 0)) = \mathbf{P}(E_n \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0)) + \mathbf{P}(E_n \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0))$.

Si $X_{n-1} = 0$ et $X_n = 0$ le dernier motif est PFF ou FFF et aucun des joueurs ne gagne au nième tour, donc

$\mathbf{P}(E_n \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0)) = \mathbf{P}(E_{n-1} \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0)) = v_{n-1}\mathbf{P}(X_n = 0) = qv_{n-1}$ d'après 6 .

$E_n \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0) = (E_n \cap (X_{n-2} = 0) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)) \bigcup (E_n \cap (X_{n-2} = 1) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0))$.

$E_n \cap (X_{n-2} = 1) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0) = \emptyset$ car le dernier motif est alors PPF et Alice gagne au rang n

Si $X_{n-2}=0$ et $(X_{n-1}=1$ et $(X_n=0)$, le dernier motif est FPF et aucun des joueurs ne peut gagner aux rangs n et $n-1$.
On en déduit que $E_n \cap (X_{n-2}=1)\cap(X_{n-1}=1)\cap(X_n=0) = E_{n-2}\cap(X_{n-2}=1)\cap(X_{n-1}=1)\cap(X_n=0)$
En utilisant de nouveau le résultat de 6,
$\mathbf{P}(E_n\cap(X_{n-1}=1)\cap(X_n=0)) = \mathbf{P}(E_n\cap(X_{n-2}=1)\cap(X_{n-1}=1)\cap(X_n=0)) = \mathbf{P}(E_{n-2}\cap(X_{n-2}=1)\cap(X_{n-1}=1)\cap(X_n=0)) = v_{n-2}pq$
Finalement,

$$\forall n \geq 3, \quad v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}$$

(c) Comme $X_n=1$, on a $k \leq n-1$.
Supposons $k \leq n-2$, on a alors $k+1 \leq n$, $k+2 \leq n$, $X_k=0$, $X_{k+1}=1$, $X_{k+2}=1$: Benoit gagne au rang $k+2 \leq n$, c'est absurde donc $k=n-1$.

(d) D'après ce qui précède, $E_n\cap(X_n=1) = \left(\bigcap_{k=1}^n (X_k=1)\right)\bigcup(E_n\cap(X_{n-1}=0)\cap(X_n=1))$
Comme il s'agit d'une union disjointe,
$w_n = \mathbf{P}(E_n\cap(X_n=1)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k=1)\right) + \mathbf{P}((E_n\cap(X_{n-1}=0)\cap(X_n=1)))$
Les X_i étant mutuellement indépendantes, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k=1)\right) = p^n$.
D'autre part $E_n\cap(X_{n-1}=0)\cap(X_n=1) = E_{n-1}\cap(X_{n-1}=0)\cap(X_n=1)$ et
$\mathbf{P}(E_{n-1}\cap(X_{n-1}=0)\cap(X_n=1)) = v_{n-1}p$ d'après 6.
Finalement $\forall n \geq 3, \quad w_n = p^n + pv_{n-1}$.

4.

(a)

(i) $(T>n) = E_n$.

(ii) d'après la formule des probabilités totales,
$\mathbf{P}(T>n) = \mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}(E_n\cap(X_n=0)) + \mathbf{P}(E_n\cap(X_n=1)) = v_n + w_n = v_n + p^n + pv_{n-1}$.

(iii) Les évenements $(T>n)_{n\geq 2}$ forment une suite décroissante , donc par continuité monotone décroissante, $\mathbf{P}(T=\infty) = \mathbf{P}(\bigcap_{n=2}^{+\infty}(T>n)) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(T>n)$
Comme $0<p<1$, $\lim_{n\to+\infty} p^n = 0$, on a donc $\mathbf{P}(T=\infty) = \lim_{n\to+\infty} v_n + pv_{n-1}$.
Soit $a_n = v_n + pv_{n-1} = \dfrac{v_{n+1}}{q}$. Cette suite est convergente de limite $\mathbf{P}(T=\infty)$, on en déduit que la suite (v_n) est convergente de limite $\ell = q\mathbf{P}(T=\infty)$.
En passant à la limite dans la relation de récurrence vérifiée par (v_n) on a $\ell = (q+pq)\ell$ soit $p^2\ell = 0$ d'où $\ell=0$ car $p>0$
On en déduit que $\mathbf{P}(T=\infty) = \dfrac{\ell}{q} = 0$.

(iv) Avec une probabilité égale à 1, l'un des joueurs gagne la partie.

(b) Comme $\sum v_n$ converge et que $\sum p^n$ converge car $0<p<1$, la série $\sum \mathbf{P}(T>n)$ converge.
Comme T est à valeurs positives montrer que T est d'espérance finie revient à montrer la convergence de la suite croissante (S_n) où pour $n\geq 3$, $\quad S_n = \sum_{k=3}^n k\mathbf{P}(T=k)$.

Rque : le fait que si T est d'espérance finie, alors $\sum \mathbf{P}(T\geq n)$ converge et $E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(T\geq n)$ figure au programme PC mais pas la réciproque !

$S_n = \sum_{k=3}^n k(\mathbf{P}(T>k-1) - \mathbf{P}(T>k)) = \sum_{k=2}^{n-1}(k+1)\mathbf{P}(T>k) - \sum_{k=3}^n k\mathbf{P}(T>k)$

$S_n = 3\mathbf{P}(T>2) + \sum_{k=3}^{n-1}\mathbf{P}(T>k) - n\mathbf{P}(T>n)$

On en déduit que $S_n \leq 3\mathbf{P}(T>2) + \sum_{k=3}^{n-1}\mathbf{P}(T>k) \leq 3\mathbf{P}(T>2) + \sum_{k=3}^{+\infty}\mathbf{P}(T>k)$.
La suite (S_n) est une suite croissante majorée donc convergente et T est d'espérance finie.

D'après un résultat de cours, on sait alors que $E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T \geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T > n) = 2 + \sum_{n=2}^{\mathbf{P}} (T > n)$ car $\mathbf{P}(T > 0) = \mathbf{P}(T > 1) = 1$.

On a donc $E(T) = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n + \sum_{n=2}^{+\infty} p^n + p \sum_{n=2}^{+\infty} v_{n-1} = 2 + pq + \dfrac{p^2}{1-p} + (1+p)\left(\sum_{n=2}^{+\infty} v_n\right)$.

(c) Si $p = q = \frac{1}{2}$, la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence de la partie A mais avec les conditions initiales $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{1}{2}$ et $v_3 = \frac{3}{8}$.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n = 8v_{n+2}$, la suite (u_n) est la suite étudiée dans la partie A. On en déduit que $\sum_{n=2}^{+\infty} v_{n+2} = \dfrac{1}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \dfrac{5}{2}$.

D'où

$$E(T) = \frac{13}{2}$$

5.

(a) Si Alice gagne au nième lancer (év'nement A_n), le dernier motif est PPF. D'autre part comme $A_n \subset E_{n-1}$, on a $A_n \subset E_{n-1} \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_{n-2}) = 1)$. D'après la question 7.b, si au cours des n-1 premiers lancers, la pièce était tombée sur Face, on aurait $X_{n-2} = 0$. On a donc $A_n \subset (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \ldots (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)$

(b) On en déduit par double inclusion que $A_n = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \ldots (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)$ puis $\mathbf{P}(A_n) = p^{n-1}q$.

$B_n = (E_{n-2} \cap (X_{n-2} = 0)) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 1)$.

Donc $\mathbf{P}(B_n) = p^2 \mathbf{P}(E_{n-2} \cap (X_{n-2} = 0)) = p^2 v_{n-2}$

6. Notons $A = \bigcup_{n=3}^{+\infty} A_n$, l'événement "Alice gagne" et $B = \bigcup_{n=3}^{+\infty} B_n$, l'évenement "Benoit gagne".

Comme $\mathbf{P}(T = \infty) = 0$ (8.a), $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 1$.

D'autre part, les évenements (A_n) étant 2 à 2 incompatibles, $\mathbf{P}(A) = \sum_{n=3}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} p^{n-1}q = p^2$.

On en déduit $\mathbf{P}(B) = 1 - p^2$

Si la pièce est équilibrée, $\mathbf{P}(A) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbf{P}(B) = \dfrac{3}{4}$. (Paradoxe de Penney).

7. Le jeu est équitable si $p^2 = 1 - p^2$, soit $p = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.